$$\lim_{h \to 1+0} \underline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} \frac{1}{x}\left(\ln \frac{1}{f(x)} - h \ln F(x+0) \right) \le \sigma_{зб} \le \overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} \frac{1}{x}\left(\ln \frac{1}{f(x)} - \ln F(x-0) \right);$$

б) якщо функція $F \in L$ обмежена, тоді $\underline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \le \sigma_{зб}$. Окрім того, якщо $(\forall \varepsilon > 0): \int_{x_0}^{+\infty} e^{\varepsilon x} dF(x) = +\infty$, тоді $\sigma_{зб} \le \overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}$.

Наслідок. Для абсциси збіжності інтеграла Лапласа $\int_0^{+\infty} f(x) e^{\sigma x} dx$ має місце нерівність $\underline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)} \le \sigma_{зб} \le \overline{\lim}_{\substack{x \to +\infty \\ x \in S}} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{f(x)}$.

1. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский – Москва: Техносфера, 2003. – 512 с. 2. Тихоненко О. М. Моделирование процессов и систем обработки информации: курс лекций / О. М. Тихоненко – Мн.: БГУ, 2007. – 147 с. 3. Назаров А. А. Теория массового обслуживания: учебное пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпухов – Томск: Изд-во НТЛ, 2004. –228 с. 4. Задорожна О. Ю. Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілтьєса / О. Ю. Задорожна, О. Б. Скасків // Буков. мат. журн. – 2013. – Т1, №3-4. – С.45-50.

КРИТЕРІЇ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НУЛЬОВОГО ПОРЯДКУ

Костюк О.В.

Національний університет "Львівська політехніка"

Аналітичну в усій комплексній площині функцію називають цілою. Оскільки довільну цілу функцію можна розвинути в збіжний в $\boldsymbol{C}$ степеневий ряд, то їх ще називають многочленами нескінченно великого степеня.

Нехай $M(r;f) = \max\{|f(z)| : |z| \le r\}$ - максимум модуля функції f в крузі. Порядком цілої функції f називається число

$$\rho = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\ln \ln M(r;f)}{\ln r}.$$

Величина порядку характеризує швидкість зростання функції.

Для цілих функцій додатного порядку в 30-их роках XX століття Б.Левіним та А. Пфлюгером незалежно один від одного була створена теорія цілком регулярного зростання (ц. р. зр.), зокрема цими математиками були доведені критерії ц. р. зр. цілої функції додатного порядку в термінах розподілу її нулів за аргументами. Пізніше В.Азарін отримав критерії цієї регулярності в термінах коефіцієнтів Фур'є, а А. Кондратюк - в термінах p-норми логарифма модуля цілої функції.

Ми розглянемо цілі функції нульового порядку, які ще називають цілими функціями повільного зростання. Виявляється, якщо для таких функцій аналогічно ввести поняття ц. р. зр., то отримана теорія буде тривіальною. Так, ц. р. зр. цілої функції нульового порядку не залежить від аргументів її нулів, а тільки від їхніх модулів; з ц. р. зр. цілої функції на одному промені випливає ц. р. зр. цієї функції в усій площині. В 90-их роках минулого століття М. Заболоцький ввів поняття сильного регулярного зростання (с. р. зр.) для цілих функцій нульового порядку, яке володіє властивостями, подібними до тих, якими володіє поняття ц. р. зр. цілих функцій додатного порядку. Він також отримав критерій с. р. зр. в термінах розподілу нулів функції за аргументами [1]. Нам вдалося встановити нові критерії с. р. зр., зокрема, аналог критерію В. Азаріна ц. р. зр. в термінах коефіцієнтів Фур'є, дослідити зв'язок між с. р. зр. та регулярним зростанням логарифма модуля і аргумента цілої функції.

Додатні, неспадні, необмежені на $[0,+\infty)$ функції будемо називати функціями зростання. Клас неперервно-диференційовних функцій зростання v, для яких $\frac{rv'(r)}{v(r)} \to 0$ при $r \to +\infty$ позначимо через L. Нехай $\boldsymbol{H_0}$ - клас цілих функцій нульового порядку, $n(r,\alpha,\beta)$ - кількість нулів функції $f \in \boldsymbol{H_0}$ в секторі $\{z : |z| \le 0, \alpha < \arg z \le \beta\}$.

Будемо говорити, що множина нулів f має кутову v-щільність, якщо для всіх $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$ за винятком не більш, ніж зліченної множини значень α і β, існує границя

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{n(r,\alpha,\beta)}{v(r)} = \Delta(\alpha,\beta).$$

Назвемо звичайними для функції $f \in \boldsymbol{H_0}$ ті промені $\{z : \arg z = \theta\}$, які задовольняють умову

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{n(r,\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)}{v(r)}\right\}=0.$$

Функція $f\in \boldsymbol{H_0}$ називається функцією с. р. зр. відносно $v(r), v\in L$, якщо для всіх звичайних променів $\{z:\arg z=\theta\}$, $\theta\in[0,2\pi]$, існує границя

$$H(\theta,f)=\lim_{r\to+\infty}{}^{*}\frac{\ln f(re^{i\theta})-N(r,0,f)}{v(r)}, \quad \text{де } N(r)=\int_1^r\frac{n(t,0,2\pi)}{t}dt.$$

Клас таких функцій позначимо через $\boldsymbol{H_0}(v)$.

Нехай $v_1(r)=\int_1^r\frac{v(t)}{t}dt$, $\quad l_k(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln f(re^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta, k\in Z$ - коефіцієнти Фур'є функції $\ln f(re^{i\theta})$, $\|\cdot\|_p$ - норма в просторі $L^p[0,2\pi]$.

Теорема 1. *Якщо* $f\in\boldsymbol{H_0}$ *і множина нулів функції* f *має кутову* v *-щільність, то* $f\in\boldsymbol{H_0}(v)$.

Навпаки, якщо $f\in\boldsymbol{H_0}(v)$ *і нулі* f *розміщені на скінченній системі променів, то множина цих нулів має кутову* v *-щільність.*

Теорема 2. *Нехай* $f\in\boldsymbol{H_0}$ *і існують границі*

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{l_k(r)}{v(r)}=l_k,\quad k\in Z\setminus\{0\},\qquad \lim_{r\to+\infty}\frac{l_0(r)}{v_1(r)}=l_0.$$

Тоді $f\in\boldsymbol{H_0}(v)$.

Теорема 3. *Нехай* $f\in\boldsymbol{H_0}$ *і для деяких чисел* $p\in[1,+\infty)$, $b_0\in R$ *та функції* $G\in L^p[0,2\pi]$ *виконуються умови*

$$\left\|\frac{\ln\left|f(re^{i\theta})\right|}{v_1(r)}-b_0\right\|_p\to 0,\quad \left\|\frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)}-G(\theta)\right\|_p\to 0,\quad r\to+\infty.$$

Тоді $f\in\boldsymbol{H_0}(v)$ *і* $G(\theta)=-iH(\theta,f)$ *для майже всіх* $\theta\in[0,2\pi]$.

Теореми обернені до теорем 2 і 3, аналогічно до теореми 1, правильні лише за умови розташування нулів функції $f\in\boldsymbol{H_0}(v)$ на скінченній системі променів.

1. Заболоцкий Н.В. Сильно регулярный рост целых функций нулевого порядка / Н.В. Заболоцкий // Матем. заметки – 1998. – 63, №2. — С. 196–208.