ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.643 № 643, (2009) с. 5–14

JOURNAL OF LVIV POLITECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical & mathematical sciences"
Vol.643 No 643, (2009) 5–14

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ПОЛІНОМАМИ ЛЕЖАНДРА В КОМПЛЕКСНІЙ ОБЛАСТІ

М.А. Сухорольський

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 14 липня 2008 р.)

Досліджено властивості систем поліномів Лежандра в комплексній області. Сформульовано умови існування асоційованих з поліномами функцій, зображення поліномів контурними інтегралами та клас аналітичних функцій, що розвиваються у ряди за системами поліномів. Наведено приклади розвинення функцій в ряди за системою поліномів Лежандра у комплексній області.

Ключові слова: біортогональні системи поліномів, інтеграл по контуру, поліноми Лежандра

2000 MSC: 41A10

УДК: 517.53.57

Вступ

Властивості ортогональних систем поліномів дійсної змінної та розвинення функцій у ряди за ними доволі ґрунтовно досліджено в науковій літературі і, зокрема, викладено у роботах [1, 2, 4]. Значно менше досліджень стосуються властивостей цих систем у комплексній області. Так у роботі [1] розглянуто розвинення аналітичних функцій у комплексній області за системою поліномів Чебишова.

1. Система поліномів Чебишова $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна з вагою $\delta(t)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на проміжку [-1; 1] і, $\int\limits_{-1}^{1} T_n^2(x)\,\delta(x)\,dx=\frac{\pi}{2}$ $(n>0)$, $\int\limits_{-1}^{1} T_0^2(x)\,\delta(x)\,dx=\pi$. Справедливі формули і оцінка

$$T_n(x)=n\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k\,2^{n-2k-1}C_{n-k}^k}{n-k}x^{n-2k}$$

$$(n=1,2,...)\,,\quad T_0(x)=1,$$

$$x^n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{[n/2]}{}^0C_n^kT_{n-2k}(x)\,, \tag{1}$$

$$|T_n(x)|\le 1\quad (n=0,1,...)\,,\quad 0\le x\le 1.$$

де $\sum\limits_{k=0}^{n}{}^0a_kT_k=\sum\limits_{k=0}^{n}\varepsilon_{0k}a_kT_k=\frac{a_0}{2}T_0+a_1T_1+...+a_nT_n$; $\varepsilon_{0k}=\begin{cases}1/2, & k=0,\\ 1, & k>0\,.\end{cases}$

Система поліномів Чебишова комплексної змінної $\{T_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ біортогональна з системою асоційованих функцій $\left\{\omega_n^T(z)\right\}_{n=0}^{\infty}$, $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}T_n(z)\,\omega_m^T(z)\,dz=\delta_{nm}$, де

$$\omega_n^T(z)=\frac{2}{\sqrt{z^2-1}\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^n}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{n+2k}^k}{2^{n+2k-1}}\frac{1}{z^{n+2k+1}}\quad (n=0,1,...);$$

δ_{nm} – символ Кронекера.

В області E_R і на її границі Γ_R справедлива оцінка

$$|T_n(z)|\le\frac{1}{2}\left(R^n+R^{-n}\right) \tag{2}$$

де Γ_R – еліпс з фокусами (-1, 0), (1, 0), сумою півосей R $(R>1)$ і рівнянням

$$z=\frac{1}{2}\left(R\,e^{i\varphi}+R^{-1}e^{-i\varphi}\right)\quad (\,0\le\varphi<2\pi)\,. \tag{3}$$

Крім того, якщо функція $f(z)$ однозначна і аналітична в E_R, то ряд $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}L_n(f)\,T_n(z)$, рівномірно збігається в області E_r $(1\le r<R)$, де $L_n(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\rho}f(z)\,\omega_n^T(z)\,dz$; E_r область з границею Γ_r $(1\le r<R)$; Γ_ρ – еліпс $(r<\rho<R)$.

2. Система поліномів Лежандра $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ортогональна на проміжку [-1; 1]

$$\frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}P_n(x)\,P_m(x)\,dx=\delta_{nm}. \tag{4}$$

Справедливі формули

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k C_n^k C_{2(n-k)}^n x^{n-2k} \quad (n=0,1,...), \tag{5}$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right)^n d\varphi.$$

З останньої формули (5) очевидна обмеженість поліномів на проміжку [-1; 1]

$$|P_n(x)| \le 1 \quad (n=0,1,...) \tag{6}$$

і таке інтегральне зображення

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(x + i\,t\sqrt{1-x^2}\right)^n \gamma(t)\,dt, \tag{7}$$

де Γ додатно орієнтоване коло $|t| = \rho$, $1 < \rho < \infty$;

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{2k}^k}{2^{2k}}\frac{1}{t^{2k+1}} \quad (|t|>1) \tag{8}$$

Зазначимо, що поліноми Чебишова також можна подати у вигляді (7), якщо прийняти $\gamma(t) = \frac{t}{t^2-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2k+1}} \quad (|t|>1)$.

У цій роботі побудовано систему функцій, біортогональних з поліномами Лежандра на замкнутих кривих у комплексній області. Досліджено властивості поліномів Лежандра в комплексній області та розвинення аналітичних функцій в ряди за системами поліномів.

I. Властивості поліномів Лежандра в комплексній області

Введемо, ґрунтуючись на поданні (7), систему поліномів Лежандра $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ комплексної змінної z,

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left(z + t\sqrt{z^2-1}\right)^n \gamma(t)\,dt, \tag{9}$$

де $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$. Якщо тут врахувати розвинення (8) і тотожність [3]

$$\sum_{k=l}^{[n/2]}\frac{1}{2^{2k}}C_{2k}^k C_n^{2k} C_k^l = \frac{1}{2^n}C_n^l C_{2(n-l)}^n, \tag{10}$$

то одержимо першу формулу (5). З цієї формули знайдемо (для парних і непарних значень індексів) такі подання:

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} C_{2(n+k)}^{2n} z^{2k},$$

$$P_{2n+1}(z) = \frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} C_{2n+1}^{n-k} C_{2(n+k+1)}^{2n+1} z^{2k+1} \quad (n=0,1,...). \tag{11}$$

Відзначимо основні властивості системи поліномів $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

Твердження 1. Справедливе співвідношення

$$z^k = \sum_{n=0}^{[k/2]}\frac{2^{k-2n}(2k-4n+1)}{(2k-2n+1)}\frac{C_k^n}{C_{2(k-n)}^{k-n}}P_{k-2n}(z). \tag{12}$$

□ *Доведення.* Для одержання формули (12) скористаємося комбінаторними тотожностями, одержаними з використанням математичного апарата [3],

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} C_{2(n+k)}^{2n} C_{k+m}^{2m}}{C_{2(k+m)+1}^{2m+1}} = 2^{2(n-m)}\frac{2m+1}{4m+1}\delta_{nm},$$

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k} C_{2n+1}^{n-k} C_{2(n+k+1)}^{2n+1} C_{k+m+1}^{2m+1}}{C_{2(k+m)+3}^{2m+2}} = 2^{2(n-m)}\frac{2m+2}{4m+3}\delta_{nm}. \tag{13}$$

Якщо записати формулу (12) у вигляді

$$z^{2k} = \sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m}(4m+1)C_{2k}^{k-m}}{(2k+2m+1)C_{2(k+m)}^{k+m}}P_{2m}(z), \tag{14}$$

$$z^{2k+1} = \sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m+1}(4m+3)C_{2k+1}^{k-m}}{(2k+2m+3)C_{2(k+m)+2}^{k+m+1}}P_{2m+1}(z),$$

підставити у формули (11) і перетворити з урахуванням співвідношень (13), то прийдемо до тотожності $P_n(z) = P_n(z)$, що підтверджує справедливість формули (12). ■

Твердження 2. Справедливі залежності між поліномами Лежандра і поліномами Чебишова

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{[n/2]}{}^0 C_{2k}^k C_{2(n-k)}^{n-k} T_{n-2k}(z) \quad (n=0,1,...), \tag{15}$$

$$T_n(z) = n\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{2^{n-2m-1}(2n-4m+1)}{(n-m)(2n-2m+1)(1-2m)}\frac{C_{2m}^m}{C_{2(n-m)}^{n-m}}P_{n-2m}(z) \quad (n=1,2,...).$$

□ *Доведення.* Підставимо залежності (1) степенів змінної z (окремо для парних і непарних значень індексів) через поліноми Чебишова у формули (11)

$$P_{2n}(z)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n}\frac{1}{2^{2r-1}}\sum_{k=0}^{r}{}^{0}C_{2r}^{r-k}T_{2k}(z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}^{0}T_{2k}(z)\sum_{r=k}^{n}\frac{(-1)^{n-r}}{2^{2n+2r-1}}C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n}C_{2r}^{r-k}=\frac{1}{2^{4n-1}}\sum_{k=0}^{n}{}^{0}C_{2(n-k)}^{n-k}C_{2(n+k)}^{n+k}T_{2k}(z),$$

$$P_{2n+1}(z)=\frac{1}{2^{2n+1}}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{n-r}C_{2n+1}^{n-r}C_{2(n+r+1)}^{2n+1}\frac{1}{2^{2r}}\sum_{k=0}^{r}C_{2r+1}^{r-k}T_{2k+1}(z)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}T_{2k+1}(z)\sum_{r=k}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{2(n+r)+1}}C_{2n+1}^{n-k}C_{2(n+k+1)}^{2n+1}C_{2r+1}^{r-k}=\frac{1}{2^{4n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_{2(n-k)}^{n-k}C_{2(n+k+1)}^{n+k+1}T_{2k+1}(z).$$

Якщо тут врахувати комбінаторні тотожності

$$\sum_{r=k}^{n}\frac{(-1)^{n-r}}{2^{2n+2r}}C_{2n}^{n-r}C_{2(n+r)}^{2n}C_{2r}^{r-k}=\frac{1}{2^{4n}}C_{2(n-k)}^{n-k}C_{2(n+k)}^{n+k},\tag{16}$$

$$\sum_{r=k}^{n}\frac{(-1)^{n-r}}{2^{2n+2r+1}}C_{2n+1}^{n-r}C_{2(n+r+1)}^{2n+1}C_{2r-1}^{r-k}=\frac{1}{2^{4n+1}}C_{2(n-k)}^{n-k}C_{2(n+k+1)}^{n+k+1},$$

то одержимо формули

$$P_{2n}(z)=\frac{1}{2^{4n-1}}\sum_{k=0}^{n}{}^{0}C_{2(n-k)}^{n-k}C_{2(n+k)}^{n+k}T_{2k}(z),$$

$$P_{2n+1}(z)=\frac{1}{2^{4n+1}}\sum_{k=0}^{n}C_{2(n-k)}^{n-k}C_{2(n+k+1)}^{n+k+1}T_{2k+1}(z).\tag{17}$$

Звідси, змінивши порядок підсумовування, матимемо першу формулу (15).

Другу формулу (15) одержимо підстановкою формул (14) у першу формулу (1)

$$T_{2n}(x)=2n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{2k-1}C_{n+k}^{n-k}}{n+k}\sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m}(4m+1)C_{2k}^{k-m}}{(2k+2m+1)C_{2(k+m)}^{k+m}}P_{2m}(z)=$$

$$=2n\sum_{m=0}^{n}P_{2m}(z)\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{2(k+m)-1}(4m+1)}{(n+k)(2k+2m+1)}\frac{C_{n+k}^{n-k}C_{2k}^{k-m}}{C_{2(k+m)}^{k+m}},$$

$$T_{2n+1}(x)=(2n+1)\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{2k}C_{n+k+1}^{n-k}}{n+k+1}\sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m+1}(4m+3)C_{2k+1}^{k-m}}{(2k+2m+3)C_{2(k+m)+2}^{k+m+1}}P_{2m+1}(z)=$$

$$=(2n+1)\sum_{m=0}^{n}P_{2m+1}(z)\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{2(k+m)+1}(4m+3)}{(n+k+1)(2k+2m+3)}\frac{C_{n+k+1}^{n-k}C_{2k+1}^{k-m}}{C_{2(k+m)+2}^{k+m+1}}.$$

Врахувавши тут комбінаторні тотожності

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{2(k+m)-1}}{(n+k)(2k+2m+1)}\frac{C_{n+k}^{n-k}C_{2k}^{k-m}}{C_{2(k+m)}^{k+m}}=\frac{2^{4m-1}}{(n+m)(2n+2m+1)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}}{C_{2(n+m)}^{n+m}},\tag{18}$$

$$\sum_{k=m}^{n}\frac{(-1)^{n-k}2^{2(k+m)+1}}{(n+k+1)(2k+2m+3)}\frac{C_{n+k+1}^{n-k}C_{2k+1}^{k-m}}{C_{2(k+m)+2}^{k+m+1}}=\frac{2^{4m+1}}{(n+m+1)(2n+2m+3)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}}{C_{2(n+m+1)}^{n+m+1}},$$

одержимо формули

$$T_{2n}(z)=2n\sum_{m=0}^{n}\frac{2^{4m-1}(4m+1)}{(n+m)(2n+2m+1)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}}{C_{2(n+m)}^{n+m}}P_{2m}(z)\quad(n=1,2,...),\tag{19}$$

$$T_{2n+1}(z)=(2n+1)\sum_{m=0}^{n}\frac{2^{4m+1}(4m+3)}{(n+m+1)(2n+2m+3)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}}{C_{2(n+m+1)}^{n+m+1}}P_{2m+1}(z)\quad(n=0,1,...).$$

Звідси очевидні відповідні залежності (15). ■

Наслідок 1. Справедливі комбінаторні тотожності

$$\sum_{m=k}^{n}\frac{2n(4m+1)}{(n+m)(2n+2m+1)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}C_{2(m-k)}^{m-k}C_{2(m+k)}^{m+k}}{C_{2(n+m)}^{n+m}}=\delta_{nk},\tag{20}$$

$$\sum_{m=k}^{n}\frac{(2n+1)(4m+3)}{(n+m+1)(2n+2m+3)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}C_{2(m-k)}^{m-k}C_{2(m+k+1)}^{m+k+1}}{C_{2(n+m+1)}^{n+m+1}}=\delta_{nk}$$

□ *Доведення.* Якщо підставити співвідношення (17) в (19), то доходимо до таких співвідношень:

$$T_{2n}(z)=\sum_{m=0}^{n}\frac{2n(4m+1)}{(n+m)(2n+2m+1)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}}{C_{2(n+m)}^{n+m}}\sum_{k=0}^{m}{}^{0}C_{2(m-k)}^{m-k}C_{2(m+k)}^{m+k}T_{2k}(z)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}{}^{0}T_{2k}(z)\sum_{m=k}^{n}\frac{2n(4m+1)}{(n+m)(2n+2m+1)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}C_{2(m-k)}^{m-k}C_{2(m+k)}^{m+k}}{C_{2(n+m)}^{n+m}},$$

$$T_{2n+1}(z)=\sum_{m=0}^{n}\frac{(2n+1)(4m+3)}{(n+m+1)(2n+2m+3)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}}{C_{2(n+m+1)}^{n+m+1}}\sum_{k=0}^{m}C_{2(m-k)}^{m-k}C_{2(m+k+1)}^{m+k+1}T_{2k+1}(z)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}T_{2k+1}(z)\sum_{m=k}^{n}\frac{(2n+1)(4m+3)}{(n+m+1)(2n+2m+3)(1-2n+2m)}\frac{C_{2(n-m)}^{n-m}C_{2(m-k)}^{m-k}C_{2(m+k+1)}^{m+k+1}}{C_{2(n+m+1)}^{n+m+1}}.$$

Звідси, через незалежність поліномів Чебишова, отримаємо формулу (20). ■

Твердження 3. Для полінома (5) справедлива оцінка

$$|P_n(z)|\le\frac{1}{2}\left(R^n+R^{-n}\right),\tag{21}$$

де $z\in E_R$; E_R – область з границею Γ_R – еліпсом з рівнянням (3).

□ *Доведення.* Вважаємо, що аргумент полінома $P_n(z)$ пробігає еліпс Γ_r: $z=\frac{1}{2}\left(r\,e^{i\varphi}+r^{-1}e^{-i\varphi}\right)$ $(1\le r\le R,\ 0\le\varphi<2\pi)$. Через формулу (4) і нерівність (2)

$$|T_n(z)|\le\frac{1}{2}\left(r^n+r^{-n}\right)$$

знайдемо

$$|P_n(z)|=\frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{[n/2]}{}^{0}C_{2k}^{k}C_{2(n-k)}^{n-k}\left|T_{n-2k}(z)\right|\le$$
$$\le\frac{|T_n(z_0)|}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{[n/2]}\varepsilon_{0,n-2k}C_{2k}^{k}C_{2(n-k)}^{n-k}\le$$
$$\le\frac{r+r^{-1}}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{[n/2]}\varepsilon_{0,n-2k}C_{2k}^{k}C_{2(n-k)}^{n-k}.$$

Врахувавши тут тотожність

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\varepsilon_{0,n-2k}C_{2k}^{k}C_{2(n-k)}^{n-k}=2^{2n-1},\tag{22}$$

матимемо оцінку $|P_n(z_0)|\le\frac{1}{2}\left(r^{\,n}+r^{-n}\right)$ і, відповідно, оцінку (21). ■

Зазначимо, що оцінку (21) також можна одержати з використанням твердження [4] про оцінку модуля многочлена в довільній точці комплексної області за заданою його оцінкою (6).

II. Асоційовані функції

Розглянемо систему поліномів $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$, що задаються формулою (3), і функцію комплексної змінної $f(z)$, однозначну і аналітичну в крузі $|z|<$ $<R_0$ $(1<R_0\le\infty)$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}z^n\tag{23}$$

Знайдемо її формальне розвинення за системою поліномів $\{P_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$. Для цього скористаємось формулами (14). Підставивши вирази степенів у формулу (23) і змінивши порядок підсумовування, одержимо

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m}^{2n} P_{2m}(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^{n} B_{n-m}^{2n+1} P_{2m+1}(z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} B_{n-m}^{2n} \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} \right) P_{2m}(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} B_{n-m}^{2n+1} \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!} \right) P_{2m+1}(z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n}^{2(n+m)} \frac{f^{(2n+2m)}(0)}{(2n+2m)!} \right) P_{2m}(z) + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n}^{2(n+m)+1} \frac{f^{(2n+2m+1)}(0)}{(2n+2m+1)!} \right) P_{2m+1}(z) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_{n}^{2n+m} \frac{f^{(2n+m)}(0)}{(2n+m)!} \right) P_m(z),$$

де

$$B_{n-m}^{2n} = \frac{2^{2m}(4m+1)\,C_{n+m}^{2m}}{(2m+1)\,C_{2n+2m+1}^{2m+1}},\ B_{n-m}^{2n+1} = \frac{2^{2m+1}(4m+3)\,C_{n+m+1}^{2m+1}}{(2m+2)\,C_{2n+2m+3}^{2m+2}} B_{n}^{2n+m} = \frac{2^{m}(2m+1)\,C_{n+m}^{m}}{(m+1)\,C_{2n+2m+1}^{m+1}}. \tag{24}$$

Розвинення функції $f(z)$ з урахуванням позначень (24) запишемо так:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(f)\, P_m(z), \tag{25}$$

де

$$L_m(f) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n}^{2n+m} \frac{f^{(2n+m)}(0)}{(2n+m)!}. \tag{26}$$

Введемо асоційовані функції

$$\omega_m(z) = \frac{2^m(2m+1)}{(m+1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{n+m}^{m}}{C_{2n+2m+1}^{m+1}} \frac{1}{z^{2n+m+1}} \tag{27}$$
$$(m = 0, 1, ...),$$

які аналітичні в області $|z| > 1$. Насправді, використовуючи асимптотичну формулу $n! \sim n^n/e^n$ для великих значень змінної, одержимо оцінку для коефіцієнтів рядів (27)

$$\frac{2^m(2m+1)\,C_{n+m}^{m}}{(m+1)\,C_{2n+2m+1}^{m+1}} \sim \frac{(2m+1)\left(1+\frac{m}{2n}\right)^{2n+m}}{(2n+2m+1)\left(1+\frac{m}{n}\right)^{n+m}} \sim$$

$$\sim \frac{(2m+1)}{(2n+2m+1)}.$$

Звідси маємо $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^m(2m+1)C_{n+m}^{m}}{(m+1)C_{2n+2m+1}^{m+1}}} = 1.$

Вирази коефіцієнтів (26) з урахуванням (27) запишемо у вигляді контурних інтегралів

$$L_k(f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} f(z)\,\omega_k(z)\,dz, \tag{28}$$

де Γ – додатно орієнтоване коло $|z| = q \quad (1 < q < R_0)$.

Твердження 1. Системи функцій $\{P_n(z),\ \omega_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ біортогональні на довільному кусково-гладкому замкнутому контурі Γ, що охоплює круг $|z| \le 1$, тобто справджуються рівності

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} P_n(z)\,\omega_m(z)\,dz = \delta_{nm}. \tag{29}$$

$\square$ *Доведення.* Підставимо вирази (11) і (27) у ліву частину формули (29). Знайдемо (окремо для парних і непарних значень індексів)

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} P_{2n}(z)\,\omega_{2m}(z)\,dz = \frac{2^{2(m-n)}(4m+1)}{(2m+1)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n}^{k} C_{2(2n-k)}^{2n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{C_{l+2m}^{2m}}{C_{2(2m+l)+1}^{2m+1}} \frac{1}{z^{2(l+k-n+m)+1}} dz =$$

$$= \frac{2^{m-n}(2m+1)}{(m+1)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k} C_{2n}^{n-k} C_{2(n+k)}^{n} C_{l+m}^{2m}}{C_{2(l+m)+1}^{2m+1}} \frac{dz}{z^{2(l-k)+1}} =$$

$$= \frac{2^{2(m-n)}\,(4m+1)}{(2m+1)} \sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, C_{2n}^{n-k} C_{2(n+k)}^{n} C_{k+m}^{2m}}{C_{2(k+m)+1}^{2m+1}},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} P_{2n+1}(z)\,\omega_{2m+1}(z)\,dz = \frac{2^{2(m-n)}\,(4m+3)}{(2m+2)} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k}\, C_{2n+1}^{k} C_{2(2n-k+1)}^{2n+1} C_{l+2m+1}^{2m+1}}{C_{2l+4m+3}^{2m+2}} \frac{dz}{z^{2l+2k-2n+2m+1}} =$$

$$= \frac{2^{(m-n)}\,(4m+3)}{(2m+2)} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}\, C_{2n+1}^{n-k} C_{2(n+k+1)}^{n} C_{l+m+1}^{2m+1}}{C_{2(l+m)+3}^{2m+2}} \frac{dz}{z^{2(l-k)+1}} =$$

$$= \frac{2^{(m-n)}\,(4m+3)}{(2m+2)} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}\, C_{2n+1}^{n-k} C_{2(n+k+1)}^{n} C_{k+m+1}^{2m+1}}{C_{2(k+m)+3}^{2m+2}}.$$

Якщо тут врахувати тотожності

$$\frac{2^{2(m-n)}\,(4m+1)}{(2m+1)} \sum_{k=m}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, C_{2n}^{n-k} C_{2(n+k)}^{n} C_{k+m}^{2m}}{C_{2(k+m)+1}^{2m+1}} = \delta_{nm}, \tag{30}$$

$$\frac{2^{(m-n)}\,(4m+3)}{(2m+2)} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}\, C_{2n+1}^{n-k} C_{2(n+k+1)}^{n} C_{k+m+1}^{2m+1}}{C_{2(k+m)+3}^{2m+2}} = \delta_{nm},$$

то одержимо співвідношення (29). ■

Твердження 2. Асоційовані функції мають інтегральне зображення

$$\omega_n(z) = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,dx}{z-x} \tag{31}$$

і, відповідно, явний вигляд

$$\omega_n(z) = \frac{2n+1}{2}\Bigg(P_n(z)\ln\frac{z+1}{z-1} - \\ -\frac{1}{2^{n-1}} \sum_{l=0}^{[(n-1)/2]} z^{n-2l-1}\Bigg(\sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k C_n^k C_{2(n-k)^n}}{2(l-k)+1}\Bigg)\Bigg), \tag{32}$$

де $\omega_0(z) = \frac{1}{2}\ln\frac{z+1}{z-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{z^{2k+1}}$.

□ *Доведення.* Запишемо поліном $P_n(x)$ у вигляді контурного інтегралу $P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{P_n(z)dz}{z-x}$, де Γ контур, який є границею області, що містить всередині відрізок [-1; 1]. Підставивши його у формулу (4) і змінивши порядок інтегрування, одержимо співвідношення

$$\frac{2n+1}{2}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} P_n(z)\left(\int\limits_{-1}^{1} \frac{P_m(x)}{z-x}dx\right)dz = \delta_{nm}.$$

Звідси з урахуванням співвідношень (29), одержимо формулу (31). Інтеграл у формулі (31) обчислюється безпосередньо і зображується у вигляді (32).

Зазначимо, що вираз функції $\omega_m(z)$ у вигляді (27) можна також одержати з формули (31), якщо врахувати розвинення $\frac{1}{z-x} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{z^{k+1}}$. ■

Твердження 3. Для асоційованих функцій справедливі розвинення

$$\omega_n(z) = \frac{2^n\,(2n+1)}{\sqrt{z^2-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n+2k}{(n+k)\,(2n+2k+1)\,(1-2k)} \frac{C_{2k}^{k}}{C_{2(n+k)}^{n+k}} \frac{1}{\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)^{n+2k}} \quad (n=0,1,...), \tag{33}$$

які збігаються на еліпсі Γ_q з рівнянням $z = \frac{1}{2}\left(q\,e^{i\varphi} + q^{-1}e^{-i\varphi}\right) \quad (0 \le \varphi < 2\pi)$,
а також збігаються в області, що містить нескінченно віддалену точку, з границею Γ_q.

□ *Доведення.* Перетворимо інтеграл у формулі (31). Врахувавши формулу $\frac{1}{z-x} = \frac{2}{\sqrt{z^2-1}} \sum\limits_{k=0}^{\infty}{}^{0} \frac{T_k(x)}{p^k}$, де $p = z + \sqrt{z^2-1}$, справедливу за умови $|p| > 1$, другу формулу (15), властивість ортогональності поліномів

Лежандра (12) і властивість $\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)\,Q_m(x)\,dx = 0$, де $Q_m(x)$ поліном степеня m $(m < n)$, одержимо (окремо для парних і непарних індексів)

$$\omega_{2n+1}(z) = \frac{4n+3}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_{2n+1}(x)\,dx}{z-x} = \frac{4n+3}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{p^{2k+1}}\int\limits_{-1}^{1}P_{2n+1}(x)\,T_{2k+1}(x)\,dx =$$

$$= \frac{(4n+3)}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2k+1}{p^{2k+1}}\sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m}(4m+3)}{(k+m+1)(2k+2m+3)(1-2(k-m))}\frac{C_{2(k-m)}^{k-m}}{C_{2(k+m+1)}^{k+m+1}}\int\limits_{-1}^{1}P_{2n+1}(x)\,P_{2m+1}(x)\,dx =$$

$$= \frac{(4n+3)}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2k+1}{p^{2k+1}}\frac{2^{2n+1}}{(k+n+1)(2k+2n+3)(1-2(k-n))}\frac{C_{2(k-n)}^{k-n}}{C_{2(k+n+1)}^{k+n+1}} =$$

$$= \frac{2^{2n+1}(4n+3)}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2n+2k+1}{(k+2n+1)(2k+4n+3)(1-2k)}\frac{C_{2k}^{k}}{C_{2(k+2n+1)}^{k+2n+1}}\frac{1}{p^{2(n+k)+1}},$$

$$\omega_{2n}(z) = \frac{4n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{P_{2n}(x)\,dx}{z-x} = \frac{4n+1}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{p^{2k}}\int\limits_{-1}^{1}P_{2n}(x)\,T_{2k}(x)\,dx =$$

$$= \frac{(4n+1)}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{2k}{p^{2k}}\sum_{m=0}^{k}\frac{2^{2m-1}(4m+1)}{(k+m)(2k+2m+1)(1-2(k-m))}\frac{C_{2(k-m)}^{k-m}}{C_{2(k+m)}^{k+m}}\int\limits_{-1}^{1}P_{2n}(x)\,P_{2m}(x)\,dx =$$

$$= \frac{2^{2n+1}(4n+1)}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{k}{(k+n)\left((2n+1)^2-4k^2\right)}\frac{C_{2(k-n)}^{k-n}}{C_{2(k+n)}^{k+n}}\frac{1}{p^{2k}} =$$

$$= \frac{2^{2n}(4n+1)}{\sqrt{z^2-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2n+2k}{(2n+k)(4n+2k+1)(1-2k)}\frac{C_{2k}^{k}}{C_{2(2n+k)}^{2n+k}}\frac{1}{p^{2(n+k)}}.$$

Звідси очевидна формула (33).

Збіжність рядів (33) зрозуміла з асимптотичних оцінок для їх коефіцієнтів

$$\frac{2^n(2n+1)(n+2k)}{(n+k)(2n+2k+1)(1-2k)}\frac{C_{2k}^{k}}{C_{2(n+k)}^{n+k}} = \frac{2^n(2n+1)(n+2k)(2k)!\,(n+k)!\,(n+k)!}{(n+k)(2n+2k+1)(1-2k)\,k!\,k!\,(2n+2k)!} \sim$$

$$\sim \frac{(2n+1)(n+2k)}{(n+k)(2n+2k+1)(1-2k)} \quad (n=0,1,...).$$

Якщо точка пробігає еліпс Γ_ρ $(q \ge \rho > 1)$: $z = \frac{1}{2}\left(\rho e^{i\varphi} + \rho^{-1}e^{-i\varphi}\right)$, то $z + \sqrt{z^2-1} = \rho e^{i\varphi}$ і для ряду (33) знайдемо мажорантний ряд

$$|\omega_n(z)| \le (2n+1)\,M_\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n+2k}{(n+k)(2k+2n+1)\,|1-2k|}\frac{1}{\rho^{2k+n+1}} \le \tag{34}$$

$$\le M_\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\rho^{2k+n+1}} \le \frac{M_\rho\rho}{(\rho^2-1)\,\rho^n} \quad (n=0,1,...,\ \ M_\rho = const),$$

який збігається при $\rho > 1$. ■

Твердження 4. Справедливе розвинення

$$\frac{1}{t-z} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\,\omega_n(t), \tag{35}$$

яке рівномірно збігається для $t \in \overline{E}_\rho^\infty$ і $z \in \overline{E}_r^0$, де ρ, r будь-які числа, що задовольняють умови $0 < q < r < \infty$, $\rho > \max\{r,\ q\}$; $\overline{E}_\rho^\infty$ замкнута область (що містить нескінченно віддалену точку) з границею Γ_ρ (еліпсом); $\overline{E}_r^0$ замкнута область (що містить нульову точку) з границею Γ_r (еліпсом).

□ *Доведення.* Підставимо в праву частину формули (35) вирази асоційованих функцій (27)

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\,\omega_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(z)\,\omega_{2n}(t) + \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(z)\,\omega_{2n+1}(t) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(z)\frac{2^{2n}(4n+1)}{(2n+1)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2n+l}^{2n}}{C_{4n+2l+1}^{2n+1}}\frac{1}{t^{2(l+n)+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(z)\frac{2^{2n+1}(4n+3)}{(2n+2)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{2n+l+1}^{2n+1}}{C_{4n+2l+3}^{2n+2}}\frac{1}{t^{2(l+n)+2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n}(z)\frac{2^{2n}(4n+1)}{(2n+1)}\sum_{l=n}^{\infty}\frac{C_{n+l}^{2n}}{C_{2n+2l+1}^{2n+1}}\frac{1}{t^{2l+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} P_{2n+1}(z)\frac{2^{2n+1}(4n+3)}{(2n+2)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_{n+l+1}^{2n+1}}{C_{2n+2l+3}^{2n+2}}\frac{1}{t^{2l+2}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2l+1}}\sum_{n=0}^{l}\frac{2^{2n}(4n+1)}{(2n+1)}\frac{C_{n+l}^{2n}}{C_{2n+2l+1}^{2n+1}}P_{2n}(z) + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{t^{2l+2}}\sum_{n=0}^{l}\frac{2^{2n+1}(4n+3)}{(2n+2)}\frac{C_{n+l+1}^{2n+1}}{C_{2n+2l+3}^{2n+1}}P_{2n+1}(z)$$

Врахувавши тут зображення (14), одержимо

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\,\omega_n(t) = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l}}{t^{2l+1}} + \sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^{2l+1}}{t^{2l+2}} = \frac{1}{t-z}.$$

Для поліномів Лежандра в області $\overline{E}_r^0$ справедлива оцінка (21) $P_n(z) \le \frac{1}{2}\left(r^n + \frac{1}{r^n}\right)$. Через асимптотичну оцінку (34) в області $\overline{E}_\rho^\infty$ маємо для ряду (35) таку оцінку:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\,\omega_n(t)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}|P_n(z)|\,|\omega_n(t)| \le \frac{M_\rho \rho}{(\rho^2-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right)^n\frac{1}{\rho^n} \le \frac{2M_\rho\rho}{(\rho^2-1)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n.$$

Оскільки $\rho > r$, одержаний ряд збігається і, відповідно, ряд (35) рівномірно збігається у зазначених областях. ■

III. Розвинення аналітичних функцій за системою поліномів Лежандра

Твердження 1. Нехай функція комплексної змінної $f(z)$, однозначна і аналітична у відкритій області E_R^0, границя якої еліпс Γ_R $(1 < R \le \infty)$ з рівнянням $z = \frac{1}{2}\left(Re^{i\varphi} + R^{-1}e^{-i\varphi}\right)$ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ і нехай функція $f(z)$ обмежена на Γ_R,

$$|f(z)| \le M. \tag{36}$$

Тоді ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(f) P_n(z) \tag{37}$$

рівномірно збігається в замкнутій області E_r^0, обмеженій еліпсом Γ_r, де $1 \le r < R$.

□ *Доведення.* За формулою (28) знайдемо коефіцієнти ряду (37), коли контур інтегрування - еліпс Γ_R, і оцінимо їх з урахуванням нерівностей (2.15) і (36) $|L_n(f)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_R}|f(z)|\,|\omega_n(z)|\,|dz| \le$ $\le \frac{M_R M}{\pi(R^2-1)\,R^{n-1}}\int\limits_{\Gamma_R}|dz| = \frac{M_0}{R^n}$ $(M_0 = const)$. Тепер для ряду (37) в області E_r^0 маємо з урахуванням оцінки (21) такий мажорантний ряд:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} L(f) P_n(z)\right| \le \sum_{n=0}^{\infty}|L(f)|\,|P_n(z)| \le$$

$$\le M_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{R^n}\left(r^n+\frac{1}{r^n}\right) \le 2M_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n.$$

Одержаний ряд збігається, оскільки $r < R$, і, відповідно, ряд (37) рівномірно збігається в області E_r^0. ■

Приклад 1. Ґрунтуючись на зображенні (2.16), маємо розвинення функцій

$$\frac{1}{a-z} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_n(a)\,P_n(z)\,, \quad \frac{a}{a^2-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_{2n}(a)\,P_{2n}(z)\,,$$

$$\frac{z}{a^2-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\omega_{2n+1}(a)\,P_{2n+1}(z) \quad (|a| > |z|)\,,$$

де $\omega_n(a)$ – коефіцієнти, що визначаються за формулою (27).

Приклад 2. Знайдемо розвинення функції комплексної змінної

$$e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a)\,P_n(z)\,. \tag{38}$$

Коефіцієнти ряду (37) для цієї функції шукаємо за формулою (26)

$$A_n(a) = L_n(e^{ax}) = \frac{2^n(2n+1)}{(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{k+n}^n}{C_{2n+2k+1}^{n+1}}\frac{f^{(2k+n)}(0)}{(2k+n)!} =$$

$$= \frac{2^n(2n+1)}{(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_{n+k}^n}{C_{2n+2k+1}^{n+1}}\frac{a^{2k+n}}{(2k+n)!} =$$

$$= 2^n(2n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{k!(2n+2k+1)!}a^{2k+n} =$$

$$= (2n+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+2)(2k+4)\dots(2k+2n)}{(2n+2k+1)!}a^{2k+n}.$$

Звідси маємо

$$A_n(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{(2k+1)(2k+3)\dots(2n+2k+1)}\frac{a^{2k+n}}{(2k)!}. \tag{39}$$

Одержані ряди для коефіцієнтів ряду (38) можна підсумувати, зокрема

$$A_0(a) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{sh\,a}{a},$$

$$A_1(a) = 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}\frac{a^{2k+1}}{(2k)!} = 3\frac{a\,ch\,a - sh\,a}{a^2}.$$

Приклад 3. З ряду (38) одержимо розвинення гіперболічних функцій

$$\begin{aligned} ch\,az &= \sum_{n=0}^{\infty}A_{2n}(a)\,P_{2n}(z), \\ sh\,az &= \sum_{n=0}^{\infty}A_{2n+1}(a)\;P_{2n+1}(z). \end{aligned} \tag{40}$$

Приклад 4. Для коефіцієнтів рядів тригонометричних функцій за системою поліномів Лежандра, ґрунтуючись на рівностях $\cos az = ch\,iaz$ і $\sin az = -i\,sh\,iaz$, одержимо з (40) такі формули:

$$\cos az = \sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}(a)\,P_{2n}(z),$$

$$\sin az = \sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}(a)\;P_{2n+1}(z),$$

де $B_{2n}(a) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}(4n+1)}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+4n+1)}\frac{a^{2k+2n}}{(2k)!}$,

$B_{2n+1}(a) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+n}(4n+3)}{(2k+1)(2k+3)\dots(2k+4n+3)}\frac{a^{2k+2n+1}}{(2k)!}.$$

IV. Висновки

Ґрунтуючись на інтегральному поданні систем поліномів у формі (6) чи (9), можемо будувати розв'язки (у вигляді контурних інтегралів рівнянь) з частинними похідними з поліноміальними коефіцієнтами [5]. Природно, що розглянуту схему (побудови функцій, асоційованих з поліномами Лежандра) можна поширити на інші системи поліномів. Виведені в роботі комбінаторні тотожності (10), (13), (16), (18), (20), (1.15), (30) мають самостійний інтерес.

Література

[1] Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

[2] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. – М.: Наука, 1978. – 392 с.

[3] Риордан Дж. Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

[4] Сеге Г. Ортогональные многочлены. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 500 с.

[5] Сухорольський М.А. Розв'язки рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Методи математики. – 2007. № 5. – С. 5 – 11.

APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY LEGANDRE POLYNOMIALS IN THE COMPLEX DOMAIN

M.A. Sukhorolsky

National University "Lvivska Politechnika"
12 S. Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

Properties of the systems of Legandre polynomials in the complex domain are investigated. Conditions of existence of functions associated with polynomials, presentation of the polynomials by contour integrals, and the class of analytical function expansion into series by polynomial systems are formulated. Examples of functions expending into the series by the system of Legandre are given of function expansion and those of constructing solutions of differential equations with partial derivatives (with polynomial coefficients).

Keywords: biothogonal system of polynomials, contour integral, Legandre polinomials

2000 MSC: 41A10

УДК: 517.53.57