

Ю. Верес, А. Катренко

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра інформаційних систем та мереж

## ШКАЛЮВАННЯ ПРИ РОЗПОДІЛІ ОБМЕЖЕНИХ РЕСУРСІВ

© Верес Ю., Катренко А., 2009

**Здійснено аналітичний огляд основних методик шкалювання, котрі застосовуються у процесі розподілу обмежених ресурсів. Описано типи шкал, принципи і методи вимірювання. Сформульовано критерій якості процесу шкалювання при розподілі обмежених ресурсів у складних системах.**

**In the article the state-of-the-art review of basic methods of shkalyuvannya is carried out which are used in the process of division of the limited resources. The types of scales, principles and measuring methods, are described. The criterion of quality of process of shkalyuvannya is formulated at the division of the limited resources in the difficult systems.**

### Постановка проблеми

Процеси встановлення пріоритетів (шкалювання) під час розподілу обмежених ресурсів у складних системах належать до найскладніших і найменш висвітлених питань. При розподілі обмежених ресурсів залежно від конкретних умов можуть застосовуватися різні методи шкалювання. Шкалювання є важливою складовою процесу координації у системах підтримання прийняття рішень з розподілу обмежених ресурсів.

### Аналіз останніх досліджень

*Рішення* – центральний момент всього процесу управління. У широкому розумінні це поняття включає підготовку рішення (планування), а у вузькому – це вибір альтернативи. В межах перспективного планування приймаються стратегічні рішення (що робити?), а потім, в процесі поточного планування, організування, мотивування, координування, регулювання, змін планів приймаються рішення у вузькому розумінні (як робити?), хоча така межа є умовною.

Рішення, що приймаються в процесі управління, можна класифікувати за численними ознаками: за об'єктом рішення (орієнтовані на цілі або засоби, ключові структурні або ситуативні); за надійністю початкової інформації (на основі надійної інформації, ризикові і ненадійні); за термінами дії наслідків (довго-, середньо-, короткострокові); за зв'язками з ієрархією планування (стратегічні, тактичні, оперативні); частотою повторюваності (випадкові, повторювані, рутинні); за виробничим охопленням (для всієї фірми, вузькоспеціалізовані); за числом рішень в процесі їхнього ухвалення (статичні, динамічні, одно- і багатоступінчаті); за децидентом (одноосібні, групові, з боку менеджерів, з боку виконавців); за обліком зміни даних (жорсткі, гнучкі); за ступенем залежності (автономні, доповнюючі один одного); за ступенем складності (прості і складні).

Процес прийняття рішення можна розглядати як виконання взаємопов'язаного набору етапів і підетапів процесу прийняття рішення [1, 2]:

1. Збирання інформації про можливі проблеми.
2. Виявлення і визначення причин виникнення проблеми.
3. Формулювання цілей рішення проблеми.
4. Обґрунтування стратегії рішення проблеми.
5. Розроблення варіантів рішення.
6. Вибір кращого варіанта.
7. Корегування та узгодження рішення.
8. Реалізація рішення.

У процесі прийняття рішень децидент порівнює між собою варіанти та обирає той, який здається йому найліпшим. Звичайно ж, постає питання – якою мірою користується децидент? В яких одиницях він може оцінити ступінь переваги однієї альтернативи над іншою, і наскільки обґрунтованими є наступні операції агрегування оцінок декількох експертів? Відповіді на ці та наступні запитання дає теорія вимірювань (ТВ) [2].

У багатьох випадках рішення повинно прийматися на основі індивідуальних оцінок кожного з групи експертів – особливо це стосується важливих, комплексних, унікальних проблем, при розв'язанні яких необхідним є врахування думок експертів різних напрямків. Однією з основних процедур отримання інформації від експерта – якісної чи кількісної – є вимірювання, що розуміється розширено.

Звичайно, кількісні оцінки є інформативнішими, аніж якісні, оскільки дають змогу отримати детальнішу інформацію про порівняльну важливість альтернатив, а отже – обґрунтованіше реалізувати остаточний вибір. На практиці результати оцінювання експертів в багатьох випадках вимірюються в порядковій шкалі, тобто експерт може сказати (і обґрунтувати), що одна альтернатива важливіша, ніж інша. Але він не в змозі стверджувати в цьому випадку, у скільки разів або наскільки важливіша.

Як дві основні проблеми ТВ разом із установленням типу шкали вимірювань для конкретних даних визначимо пошук алгоритмів аналізу даних, результат роботи яких не змінюється при будь-якому припустимому перетворенні шкали (тобто є інваріантним щодо цього перетворення). Для вимірювання значень кожного критерію чи показника, що характеризує певну властивість варіантів рішень, використовується своя шкала [2].

Змінні (те, що можна вимірювати, контролювати або, що можна змінювати в дослідженнях) відрізняються тим, „наскільки добре” вони можуть бути виміряні, або, іншими словами, яку інформацію забезпечує шкала їхніх вимірювань. Очевидно, в кожному вимірюванні присутня деяка похибка, що визначає межі „кількості інформації”, яку можна отримати в даному вимірюванні. Іншим чинником, що визначає кількість інформації, що міститься в змінній, є тип шкали, за допомогою якої проведено вимірювання.

**Шкала** (лат. *scala* — сходи) — зіставлення результатів вимірювання деякої величини і точок числової прямої. Це множина позначень, відношення між якими відображають відношення між об'єктами емпіричної системи.

Відповідно до ТВ при математичному моделюванні реального явища або процесу насамперед потрібно установити типи шкал, у яких вимірюватимуться ті чи інші змінні. Тип шкали визначає групу припустимих перетворень шкали, тобто таких, що не змінюють співвідношень між об'єктами вимірювань [2, 3].

Шкали розділяються за типом, відповідно до того, які відношення вони відображають. Крім того, кожній шкалі відповідають допустимі для даної шкали математичні перетворення. Типи шкал мають ієрархічну впорядкованість за складністю. У психометрії, економетрії, прикладній статистиці прийнята класифікація шкал, запропонована Стенлі Смітом Стівенсом [3, 4, 7] :

#### **Якісні шкали вимірювань.**

##### **Шкала найменувань (номінальна)**

Проста шкала. Числа використовуються для розрізнення об'єктів. *Шкали найменувань* передбачають лише класифікацію об'єктів чи окремих ознак об'єктів з метою їхнього розпізнавання і встановлення їх подібності чи того, що вони відрізняються один від одного. У таких шкалах число використовується як назва (ім'я). Номінальні шкали дозволяють пізнавати, розрізняти, ідентифікувати об'єкт. Номінальну шкалу називають також класифікаційною.

##### **Порядкова шкала**

*Порядкові шкали* передбачають ранжування об'єктів чи сукупності їхніх ознак за пріоритетом. Числа в цих шкалах відображають порядок розташування елементів – «місця» (об'єктів чи їхніх ознак) за пріоритетом. Порядкові шкали дозволяють показати, що один об'єкт є кращим за певною ознакою порівняння, важливішим, ніж інший чи рівноцінний йому. Але в порядкових шкалах не можна визначити міру домінування, тобто виміряти, наскільки один об'єкт є

кращим, важливішим за інший. Отже, шкала визначає лише порядок переваг альтернатив, і числова система, в яку гомоморфно відображається емпірична система, повинна лише зберігати порядок на множині варіантів рішень. В порядковій шкалі значення числової системи визначаються з точністю до монотонного перетворення  $\varphi(x)$ .

### **Кількісні шкали вимірювань**

#### **Інтервальна шкала**

Крім відношень вказаних для шкал найменування і порядку, відображає відношення відстані (різниці) між об'єктами. Різниці в усіх точках даної шкали рівні. Однак різні шкали можуть мати різні нульові точки відліку. Отже, інтервальні шкали дають змогу виміряти «віддаль» між об'єктами, визначити, наскільки один об'єкт кращий за інший у прийнятій одиниці вимірювання. Заміна однієї інтервальної шкали іншою припустима в межах лінійного перетворення ( $\varphi(x) = ax + b, a > 0$ ). У шкалі інтервалів зберігаються відношення різниць числових оцінок, оскільки

$$\frac{\varphi(f(x_1)) - \varphi(f(x_2))}{\varphi(f(x_3)) - \varphi(f(x_4))} = \frac{af(x_1) - af(x_2) + b - b}{af(x_3) - af(x_4) + b - b} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_3) - f(x_4)} \quad (1)$$

#### **Шкала відношень**

*Шкали відношень*, чи метричні (пропорційні), мають природну нульову точку відліку, наприклад, шкали для вимірювання маси, розмірів об'єктів тощо. Тут, на відміну від інтервальної шкали, допускається лише пропорційне перетворення ( $\varphi(x) = ax, a > 0$ ) цієї шкали, і значення числової системи в шкалі відношень визначається з точністю до постійного множника. На відміну від шкали інтервалів може відображати те, у скільки разів один показник більший за інший. У цих шкалах відношення числових оцінок альтернатив залишаються сталими, оскільки

$$\varphi(f(x_1)) / \varphi(f(x_2)) = af(x_1) / af(x_2) = f(x_1) / f(x_2) \quad (2)$$

де  $f(x_1), f(x_2)$  – числові відповідники альтернатив  $x_1, x_2$ , в деякій числовій системі,  $\varphi(f(x_1)), \varphi(f(x_2))$  – в іншій.

#### **Шкала різниць**

*Шкалою різниць* є частковий випадок шкали інтервалів, коли може змінюватись лише початок відліку, ( $\varphi(x) = x + b$ ). Одиниця вимірювання задана, але немає природного початку відліку.

#### **Абсолютна шкала**

*Абсолютною шкалою* називається шкала, в якій значення числової системи визначаються з точністю до тотожних перетворень, тобто припустиме перетворення має вигляд  $\varphi(x) = x$ . В абсолютній шкалі фіксовані і початок відліку, і масштаб. Ця шкала має єдину нульову точку [2, 5, 6].

Крім перерахованих шести основних типів шкал, іноді використовують й інші шкали (наприклад, гіпервпорядкування) [5, 6].

Порядкова шкала й шкала найменувань – основні шкали якісних ознак. Тому в багатьох конкретних областях результати якісного аналізу можна розглядати як вимірювання за цими шкалами. Кількісні шкали дають змогу установити кількісні співвідношення між об'єктами. У цьому випадку ознака містить і одиницю виміру. Шкали кількісних ознак – це шкали інтервалів, відношень, різниць, абсолютна [2].

З питанням про тип шкали безпосередньо пов'язана проблема адекватності методів математичної обробки результатів вимірювання. У загальному випадку адекватними є ті статистики, які інваріантні щодо допустимих перетворень використовуваної шкали вимірювань [2, 5, 6].

Із поняттям шкали тісно пов'язане поняття шкалювання. **Шкалювання** — метод моделювання реальних процесів за допомогою шкал. **Шкалюванням** також називають метод привласнення числових значень окремим атрибутам деякої системи. Шкалювання дозволяє розбити

опис складного процесу на опис параметрів по окремих шкалах. У результаті в застосуванні до економічних задач, наприклад, можна отримати уявлення про область інтересів споживача, досліджувати важливість кожної шкали для нього [2, 6].

### Систематика принципів, шкал і методів вимірювання

Типи й кількість шкал визначаються типами й кількістю показників, необхідних для вичерпної характеристики окремої множини і речі як суперпозиції множин. Звернімося до схеми, де в систематизованому вигляді описано сутність екстенсивних та інтенсивних властивостей об'єктів, наведено типологію шкал і охарактеризовано типи вимірювань. Розглянемо принципи й методи вимірювання різних показників.

Визначення номіналів видових якостей певної речі, поданих у формі суперпозиції якостей, без визначення їхніх кількостей – сутність методу якісного аналізу.

Вимірювання екстенсивних величин ґрунтується на властивості **адитивності** елементів множини. Метод вимірювання екстенсивної величини полягає в підрахунку відповідно до еталона одиниць множини (дискретної чи неперервної природи). Таке вимірювання є **прямим**.

Найскладнішим випадком є вимірювання інтенсивної величини, притому **простої і комплексної**. Увесь арсенал математичних методів фактично пов'язаний із завданням вимірювання інтенсивної величини, до якої незастосовне поняття міри, як це було у випадку вимірювання екстенсивної величини. Інтенсивна величина вимірюється за допомогою значень ступенів, що задаються на шкалі **реперними точками** (наведені Н. Тюріним у книзі з метрології [8] поняття „еталон одиниці довжини” (§31) й „еталон одиниці температури” (§35) мають зовсім різний зміст: у першому випадку йдеться про еталон як про **міру**, а у другому – як про **реперну точку**).

Сутність інтенсивної величини містить відношення мір (мірил), які, „скорочуючись”, перетворюють це відношення мір на безмірну величину – ступінь. Вимірювання ступеня – числового значення інтенсивної величини – зводиться до вимірювання відношення двох (або більше) екстенсивних величин. Таке вимірювання називають **похідним**.

Якщо інтенсивну величину неможливо визначити у формі індексу, позаяк у ньому не можуть бути незалежно виміряні значення екстенсивних величин у чисельнику та знаменнику, тоді йдуть шляхом пошуку функціонального зв'язку її з певною екстенсивною величиною (наприклад, температури – за видовженням стовпчика ртуті).

Вимірювання інтенсивної величини за допомогою обчислення функції при підстановці екстенсивного аргументу, визначеного в результаті прямого вимірювання, називають **опосередкованим**.

Методи статистичного аналізу за допомогою рівнянь регресійного і факторного аналізів, або конструкції формул індексів, дозволяють встановлювати між екстенсивними й інтенсивними величинами не суто функціональні, а статистичні зв'язки.

Якщо не відомі ні явний вираз інтенсивної величини у формі індексу, ні функціональний зв'язок її з екстенсивною величиною, то вимірювання інтенсивної величини полягає в оцінюванні її значення експертами на задалегідь прокаліброваній шкалі за допомогою реперних точок. У протилежному випадку – без такого калібрування – вимірювання інтенсивної величини експертами здійснюють за допомогою операції ранжування об'єктів за ступенями інтенсивності вздовж шкали. Вимірювання інтенсивних величин за допомогою методів експертного оцінювання називають **імперативним**.

Йшлося про вимірювання одиничних інтенсивних показників, однак у процесі пізнання, принаймні соціальних явищ, слід розкрити сутність комплексних інтенсивних показників (статус, освіта, кваліфікація), якість продукції тощо. Завдання побудови комплексного показника полягає в представленні його комбінацією одиничних інтенсивних показників і визначенні їх вагових коефіцієнтів. Це завдання називають також завданням **багатомірного шкалювання** [2].

Обширний клас методів багатовимірного шкалювання ґрунтується на використанні відстаней (мір близькості, показників відмінності)  $d(X, Y)$  між об'єктами (або ознаками)  $X$  і  $Y$ . Основна

ідея цього класу методів полягає в представленні кожного об'єкта точкою геометричного простору (зазвичай розмірності 1, 2 або 3), координатами якої слугує значення прихованих (латентних) чинників. При цьому відношення між об'єктами замінюються відношеннями між точками – їх представниками. Так, дані про схожість об'єктів – відстанями між точками, дані про перевагу – взаємним розташуванням точок [2, 5].

В економіці й соціології існують методи побудови комплексних показників на основі одиничних. Для визначення їх вагових коефіцієнтів використовують методи **експертних оцінок**, а також статистичні методи, наприклад, **множинної регресії і факторного аналізу**.

Порівняльний аналіз досліджуваних явищ будь-якої природи здійснюється тільки за допомогою показника потужності класифікованої й стратифікованої множини в умовних одиницях [4].

У практиці використовується ряд різних моделей шкалювання. У всіх них постає проблема оцінки істинності розмірності простору чинника [6].

### Цілі статті

Завданням написання статті є опис особливостей методик шкалювання при розподілі обмежених ресурсів в складних системах. Розроблення алгоритму шкалювання при розподілі обмежених ресурсів та формулювання критерію якості.

### Основний матеріал

Однією із ключових задач розподілу обмежених ресурсів є задача координації, в якій критерієм якості є мінімізація сумарних видатків функціонування системи «постачальник–споживач». Знаходження розв'язку цієї задачі (а саме оптимальних значень складових вектора контролінгу) тісно пов'язане із знаходженням оптимальних планів постачань (від постачальників до споживачів, від проміжних пунктів до споживачів, від постачальників до проміжних пунктів).

При розв'язанні задачі координації, у зв'язку з тим, що ресурси обмежені, часто виникає ситуація, коли сумарні виробничі потужності постачальників є значно меншими за сумарний попит споживачів (дефіцит одного або більше видів ресурсів). У цьому випадку попит споживачів задовольняється за першої можливості з урахуванням шкали пріоритетів.

Час функціонування системи розіб'ємо на  $T(t = \overline{1, T})$  однакових інтервалів. Для простоти саму множину і число елементів цієї множини будемо позначати однією і тією самою літерою. Нехай  $d_{ur}^t$  – інтенсивність споживання (попит)  $u$ -м ( $u = \overline{1, U}$ ) споживачем  $r$ -го ( $r = \overline{1, R}$ ) виду обмеженого ресурсу в  $t$ -му ( $t = \overline{1, T}$ ) інтервалі,  $B^t$  – загальний обсяг обмежених ресурсів в  $t$ -му інтервалі. Розглядаємо множину тих обмежених ресурсів, на які сумарний попит споживачів перевищує сумарні виробничі потужності постачальників:

$$\sum_{\tau=1}^t \sum_{u=1}^U \sum_{r=1}^R d_{ur}^t > \sum_{\tau=1}^t B^t. \quad (3)$$

У цьому випадку потреби усіх споживачів неможливо задовольнити в повному обсязі і вчасно. Частково задовольнити попит споживачів можна за рахунок резервних потужностей або створивши певний страховий рівень запасу на попередньому етапі розподілу, проте в більшості випадків немає можливості створення запасів.

Виникає необхідність забезпечення постачання ресурсів споживачам згідно із деякою шкалою пріоритетів. Координація відбувається в динамічному режимі. Розраховується початкова шкала пріоритетів і в кінці кожного часового проміжку процесу розподілу пріоритети споживачів корегуються.

Для розв'язання задачі забезпечення споживачів обмеженими ресурсами (попит на які більший за виробничі потужності постачальників) існує декілька підходів:

- запиту на обмежені ресурси урізаються пропорційно величині існуючого попиту;

- обмежені ресурси розподіляються шляхом послідовного задоволення різних напрямів їх використання по шкалі пріоритетів, сформованої експертами;
- ресурс розподіляється з урахуванням величини дефіциту. В останньому випадку будується функція дефіциту  $w_u(a_r)$ , яка відображає втрати, що несе  $u$ -й споживач при недопостачанні  $a$  одиниць  $r$ -го ресурсу.

Шкалу пріоритетів можна сформуванати шляхом побудови функції переваги:

$$S(u, t) = s[x_1(u, t), x_2(u, t), \dots, x_n(u, t)], \quad (4)$$

де  $x_1(u, t), \dots, x_n(u, t)$  – показники (фактори), від яких залежить величина переваги (пріоритету)  $u$ -го споживача в  $t$ -му інтервалі. В останньому випадку передбачається, що пріоритет є лінійною функцією показників об'єктів.

Процеси встановлення пріоритетів (шкалювання) у складних системах належать до найскладніших і найменш висвітлених питань. Під шкалюванням ми розуміємо впорядкування множини властивостей реальних об'єктів (предметної області) відносно множини знаків (область моделі) із допомогою деякого правила впорядкування, що дає змогу ізоморфно відобразити елементи і відношення між ними в предметній області через елементи і відношення між ними в області моделі.

При розподілі обмежених ресурсів залежно від конкретних умов можуть застосовуватися різні методи шкалювання. Їх умовно можна поділити на дві великі групи: перша група методів ґрунтується на теорії попарних порівнянь; друга – на опрацюванні рангів групової експертизи.

Розглянемо алгоритм шкалювання при розподілі обмежених ресурсів, котрий полягає в комбінації двох різних підходів. А саме підходу, за якого ресурси розподіляються згідно із шкалою пріоритетів сформованою експертами та підходу, за якого шкала пріоритетів будується за допомогою функції переваги.

Наведемо основні кроки алгоритму:

- 1) будуємо шкалу пріоритетів шляхом опитування кваліфікованих експертів;
- 2) шкалу пріоритетів формуємо шляхом побудови функції переваги;
- 3) здійснюємо корегування шкали, отриманої на другому кроці згідно із шкалою, побудованою на першому кроці.

Перший крок алгоритму можна виконати, використовуючи різні методи. Опишемо дві найпоширеніші у цій предметній області.

#### **Перший метод:**

Нехай необхідно проранжувати  $n$  споживачів (об'єктів). Найважливішому об'єкту будемо присвоювати ранг  $n-1$ , найменш важливому – ранг  $0$ . Для шкалювання виділяється  $m$  експертів. Нехай  $R_{ue}$  – ранг, присвоєний  $e$ -м експертом  $u$ -у об'єкту. Тоді вагу  $V_u$ -го об'єкта по оцінці всіх експертів можна обчислити так:

$$V_u = \frac{\sum_{e=1}^m R_{ue}}{\sum_{u=1}^n \sum_{e=1}^m R_{ue}}. \quad (5)$$

Об'єкти  $u$  ( $u = \overline{1, n}$ ) розташовуються в порядку зменшення їхніх ваг.

**Другий метод** полягає в присвоєнні балів кожному споживачу (об'єкту). Вибирається шкала, поділена на  $n$  інтервалів. Бал  $n$  присвоюється найважливішому об'єкту. Можуть використовуватися дробові оцінки або присвоюватися більш ніж одному об'єкту одна й та ж оцінка. Нехай  $R_{ue}$  – оцінки, визначені експертом  $e$  ( $e = \overline{1, m}$ ) для об'єкта  $u$  ( $u = \overline{1, n}$ ).

Опрацювання оцінок  $R_{ue}$  проводиться в два етапи. На першому – визначаються ваги  $V_{ue}$ , обчислені для об'єкта  $u$  на основі оцінок експерта  $e$ , за формулою

$$V_{ue} = \frac{R_{ue}}{\sum_{u=1}^n R_{ue}}. \quad (6)$$

На другому етапі визначається вага пріоритету об'єкта

$$V_{ue} = \frac{\sum_{e=1}^m V_{ue}}{\sum_{u=1}^n \sum_{e=1}^m V_{ue}}. \quad (7)$$

Результатом виконання першого кроку алгоритму є ряд:  $\chi_{1r}^t, \chi_{2r}^t, \dots, \chi_{ur}^t, \chi_{ur}^t$  – пріоритет, який отримує  $u$ -й споживач в  $t$ -му інтервалі для  $r$ -го виду дефіцитного ресурсу.

При присвоєнні рангів об'єктам кожним експертом можуть бути використані різні методики.

Одна із них полягає в тому, щоб децидент упорядкував кожну пару об'єктів за пріоритетом. Цей процес проводиться доти, доки не буде отриманий повністю впорядкований ряд.

Другий спосіб передбачає попередньо створити повний список можливих наслідків прийнятих рішень. Експерт вибирає один із об'єктів, який він вважає не менш важливим за інші. Цей об'єкт ставиться на друге місце за важливістю до отримання повністю впорядкованого ряду.

Згідно з третім способом об'єкти виписуються на картки. Картки старанно перемішуються і видаються по одній децидентові. Отримавши кожну нову картку, експерт розташовує її так, щоб в будь-який момент контрольовані ним об'єкти були впорядковані від найважливішого до найменш важливого.

При розрахунку шкали пріоритетів, використовуючи різні методи шкалювання, як міру узгодженості ваг застосовують коефіцієнт конкордації Кендалла:

$$K = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}, \quad (8)$$

де  $S$  - сума квадратів відхилень всіх рангів від середнього значення;  $m$  - число шкал пріоритетів, отриманих різними методами;  $n$  - кількість рангів в кожній шкалі (число об'єктів, що підлягають упорядкуванню за важливістю).

Величина  $K$  є мірою загальності суджень  $m$  експертів. Якщо ці судження збігаються, то  $K = 1$ , якщо розбіжності між ними дуже великі, то  $K$  буде малою величиною ( $0 \leq K \leq 1$ ).

Опишемо другий крок алгоритму шкалювання при розподілі обмежених ресурсів, а саме – процес побудови шкали за допомогою функції переваги:  $S_r(\beta, t) = s_r[\beta_{1r}^t, \beta_{2r}^t, \dots, \beta_{ur}^t]$ ,

де  $\beta_{ur}^t$  – втрати при недопостачанні  $r$ -го виду ресурсу  $u$ -му споживачеві в  $t$ -му інтервалі.

Втрати від недопостачання ресурсу можна виразити через кількість прибутку, яку б міг отримати споживач, отримавши ресурс у повному обсязі.

$\beta_{ur}^t = d_{ur}^t \cdot c_{ur}^t$ , де  $d_{ur}^t$  – попит  $u$ -го споживача на  $r$ -й вид ресурсу в  $t$ -му інтервалі;  $c_{ur}^t$  – втрати, які матиме  $u$ -й споживач, не отримавши одиниці  $r$ -го виду ресурсу в  $t$ -му інтервалі.

На цьому етапі кожному споживачеві присвоюється ранг, що дорівнює  $\beta_{ur}^t$ .

Отримуємо ряд:  $\beta_{1r}^t, \beta_{2r}^t, \dots, \beta_{ur}^t$ .

У результаті таких дій кожен споживач отримує ранг, сформований експертами –  $\chi_{ur}^t$  та ранг, утворений функцією переваги –  $\beta_{ur}^t$ .

Якщо значення коефіцієнта конкордації є достатньо високим (вищим за деяке наперед задане значення), то переходимо до етапу корегування (в іншому випадку здійснюємо розподіл ресурсів, використовуючи шкалу, утворену на другому кроці алгоритму). Цей етап полягає в тому, щоб змінити ранги споживачів за умови, якщо в них значення  $\beta_{ur}^t$  збігаються, а  $\chi_{u+1,r}^t < \chi_{ur}^t$ .

Упорядковуємо споживачів за спаданням значення  $\beta_{ur}^t$ . Присвоюємо першому споживачу ранг  $P_{ur}^t = n - 1$  (де  $n$  – кількість споживачів), другому ранг  $P_{ur}^t = n - 2$  і т.д. Останній отримує ранг, що дорівнює 0.



Етапи процесу шкалювання при розподілі обмежених ресурсів

Потім змінюємо ранг  $P_{ur}^t$  кожного із споживачів за таким правилом:

$$(\forall u, k): \text{якщо } \left( (\beta_{ur}^t = \beta_{u+k,r}^t) \wedge (P_{ur}^t > P_{u+k,r}^t) \wedge (\chi_{u+k,r}^t < \chi_{ur}^t) \right), \quad (9)$$

то  $P_{ur}^t = P_{u+k,r}^t; P_{u+k,r}^t > P_{u,r}^t; k = \overline{1, U - 1}$ .

Отже, кожен  $u$ -й споживач у  $t$ -му періоді розподілу для обмеженого ресурсу  $r$  має ранг  $P_{ur}^t$ . Спочатку ресурс постачається споживачу із найбільшим рангом, потім – із рангом на одиницю меншим і т.д., доки ресурс не вичерпається.

Схематично процес шкалювання при розподілі обмежених ресурсів можна зобразити як послідовність етапів (рисунок).

У результаті ми можемо обчислити рівень втрат від дефіциту ресурсів:

$$\psi(a, d) = \sum_{\tau=1}^t \sum_{r=1}^R \sum_{u=1}^U \gamma_{ru}^t = \sum_{\tau=1}^t \sum_{r=1}^R \sum_{u=1}^U (d_{ru}^t - a_{ru}^t) c_{ru}^t \quad (10)$$



Обмеження, накладені на систему:

$d_{ru}^t \geq a_{ru}^t$ ,  $d_{ru}^t \geq 0$ ,  $a_{ru}^t \geq 0$ ,  $c_{ru}^t \geq 0$ ,  $d_{ru}^t$  – попит  $u$ -го споживача на  $r$ -й ресурс в  $t$ -му періоді;  $a_{ru}^t$  – кількість обмеженого ресурсу  $r$ -го виду, надана  $u$ -му споживачеві  $t$ -му періоді;  $c_{ru}^t$  – втрати  $u$ -го споживача, який не отримав одиницю  $r$ -го виду ресурсу в  $t$ -му періоді;  $\gamma_{ru}^t$  – втрати від недопостачання  $r$ -го виду ресурсу  $u$ -му споживачеві в  $t$ -му періоді.

Критерієм якості на цьому етапі розподілу обмежених ресурсів вважаємо мінімізацію втрат від недоотримання споживачами ресурсів:

$$Q = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \sum_{u=1}^U \gamma_{ru}^t = \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \sum_{u=1}^U (d_{ru}^t - a_{ru}^t) c_{ru}^t \rightarrow \min. \quad (11)$$

Застосувавши описану методику шкалювання, ми знаходимо значення критерію якості шкалювання, яке є близьким до оптимального і яке є частиною загального критерію якості задачі розподілу обмежених ресурсів:

$$Q(V) = \phi(S, W, O) + g(s) + \omega(v) + \psi(a, d) \rightarrow \min, \quad (12)$$

де  $\phi(S, W, O)$  – сумарні видатки формування ресурсів;  $g(s)$  – сумарні видатки зберігання ресурсів;  $\omega(v)$  – видатки продукування ресурсів;  $\psi(a, d)$  – втрати від дефіциту ресурсів.

Отже, знайшовши близьке до оптимального значення однієї із складових критерію якості задачі розподілу обмежених ресурсів ми тим самим наближаємо значення загального критерію задачі до оптимального.

### Висновки

У статті дано означення шкали та означення методики шкалювання. Описано види шкал та методи вимірювання. Наведено групи методів шкалювання при розподілі обмежених ресурсів. Описано методику присвоювання експертами рангів об'єктам. Запропоновано методику шкалювання при розподілі обмежених ресурсів. Сформульовано критерій якості процесу шкалювання під час розподілу обмежених ресурсів.

1. Катренко А.В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації / А.В. Катренко. – Львів: Новий світ – 2000, 2003. – 424 с. 2. Катренко А. В. Теорія прийняття рішень: Підручник / А.В. Катренко, В.В. Пасічник, В.П. Пасько. – К.: Видавнича група ВНУ, 2009. – 448 с. : ил. 3. Циба В. Кваліметрія – теорія вимірювання в гуманітарних і природничих науках / В. Циба // Соціальна психологія. – К., 2005. – №4. – С.3–20. 4. Кацнельсон С. Д. Содержание слова, значение и обозначение / С.Д. Кацнельсон. – М. – Л. : Наука, 1965. – 110 с. 5. Ларичев О. И. Наука и искусство принятия решений / О.И. Ларичев. – М.: Наука, 1979. – 480 с. 6. Литвак Б. Г. Экспертная информация: Методы получения и анализа / Б.Г. Литвак. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с. 7. Саати Т. Аналитическое планирование. Организация систем / Т. Саати, К. Кернс. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с. 8. Множества. – М., 1982. Математическая энциклопедия. Т. 3. – С.414.