ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 112–119

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 112–119

ВІДНОСНА СТІЙКІСТЬ ДО ЗБУРЕНЬ БАГАТОВИМІРНИХ РЕГУЛЯРНИХ C-ДРОБІВ

Гладун В. Р., Матулка К. В., Манзій О. С., Пабирівський В. В.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 28 травня 2012 р.)

Досліджено відносну стійкість до збурень числового гіллястого ланцюгового дробу зі змінною кількістю гілок розгалужень, елементи якого задовольняють умови багатовимірного аналога теореми Ворпіцького. Встановлено оцінки відносних похибок підхідних дробів такого гіллястого ланцюгового дробу. Одержані результати застосовано до дослідження стійкості до збурень багатовимірних регулярних C-дробів.

Ключові слова: гіллястий ланцюговий дріб, підхідний дріб, багатовимірний регулярний C-дріб, відносна стійкість до збурень, оцінки відносних похибок підхідних дробів гіллястого ланцюгового дробу.

2000 MSC: 11J70

УДК: 517.524

Вступ

Неперервні дроби та їхнє узагальнення є ефективним математичним апаратом теорії наближення функцій. Порівняно зі степеневими рядами, вони здебільшого збігаються швидше і мають ширші області збіжності. Іншою причиною перспективності застосувань неперервних дробів є властивість малого накопичення похибок під час обчислень їхніх підхідних дробів, яку називають властивістю обчислювальної стійкості [4, 11, 13, 15, 24, 26].

Питання стійкості алгоритмів обчислення підхідних дробів неперервних дробів досліджували Г. Бланч [3], В. Гаучі [7], Н. Мейкон, М. Баскервіл [12], А. Коут [5]. У цих роботах доведено, що обернений рекурентний алгоритм є стійкішим порівняно з прямим рекурентним алгоритмом. У роботі У. Джоунса, В. Трона [10] отримано у явному вигляді оцінки відносних похибок, що виникають під час обчислення підхідних дробів неперервного дробу за оберненим рекурентним алгоритмом і вказано на залежність похибок підхідних дробів від елементів неперервного дробу. Обчислювальну стійкість гіллястих ланцюгових дробів вивчав М. О. Недашковський [27]. Зокрема, він дослідив обчислювальну стійкість гіллястих ланцюгових дробів, що є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Під час дослідження стійкості гіллястих ланцюгових дробів, зазвичай, враховували лише похибки їх елементів. Цю задачу назвали – дослідженням стійкості гіллястих ланцюгових дробів до збурень їх елементів. У роботах [15, 16, 30] отримано оцінки похибок підхідних дробів числових гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами, а також комплексними елементами, що задовольняють умови багатовимірних узагальнень теорем Ворпіцького та Слешинського-Прінгсгейма. Із отриманих оцінок, як і у випадку неперервних дробів, випливає залежність похибок підхідних дробів від елементів гіллястого ланцюгового дробу. Питання стійкості до збурень континуального аналога гіллястих ланцюгових дробів — інтегральних ланцюгових дробів — досліджено у роботах Т. М. Антонової [28, 29].

Інтерпретуючи стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів як їх неперервну залежність від елементів, у роботі [17] запропоновано означення множин стійкості до збурень нескінченних числових гіллястих ланцюгових дробів. Побудові та дослідженню множин стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів та деяких послідовностей їх підхідних дробів присвячено роботи [14, 18–22].

Сьогодні активно досліджується обчислювальна стійкість функціональних неперервних дробів, що є розвиненнями спеціальних функцій у неперервні дроби [1, 2, 4, 6, 8, 9]. Обчислювальну стійкість деяких розвинень функцій багатьох змінних у гіллясті ланцюгові дроби вперше розглянули Д. І. Боднар та Х. Й. Кучмінська [25].

У роботі [23] розглянуто поняття стійкого до збурень функціонального гіллястого ланцюгового дробу, що природно дозволило збурені елементи вибирати з ширшої множини порівняно з множиною точних елементів, і досліджено стійкість до збурень нескінченних залишків гіллястого ланцюгового дробу Ньордунда для гіпергеометричних функцій Аппеля.

В аналітичній теорії неперервних дробів та їх узагальнень питання стійкості до збурень нескінченних функціональних гіллястих ланцюгових дробів залишається малодослідженим. Це стало предметом досліджень цієї роботи.

I. Основні поняття та означення

Розглянемо числовий гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) зі змінною кількістю гілок розгалужень

$$1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{a_{i(k)}}{1},\tag{1}$$

де $N_{i(k)} \in \mathbb{N}$ — кількість гілок розгалужень, $i(0)=i_0=0$, $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$, $i_p=\overline{1,N_{i(p-1)}}$, $p=\overline{1,k}$, $k=1,2,\ldots,$ — мультиіндекси.

Розглянемо послідовність множин мультиіндексів $\{\mathcal{I}_k\}_{k=0}^{\infty}$, де

$$\mathcal{I}_0=\{0\},$$

$$\mathcal{I}_k=\{i(k): i_p=\overline{1,N_{i(p-1)}},\, p=\overline{1,k}\},\ k=1,2,\ldots$$

ГЛД

$$f^{(s)}=1+\underset{k=1}{\overset{s}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{a_{i(k)}}{1},\ s=1,2,\ldots,$$

називають s-ми підхідними дробами (s-ми апроксимантами) ГЛД (1). Величини, що визначаються рекурентними співвідношеннями

$$Q_{i(p)}^{(s)}=1+\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\frac{a_{i(p+1)}}{Q_{i(p+1)}^{(s)}},$$

$i(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=s-1,s-2,\ldots,0$, $s=1,2,\ldots$, причому $Q_{i(s)}^{(s)}=1$, $i(s)\in\mathcal{I}_s$, $s=1,2,\ldots$, називають залишками s-го підхідного дробу ГЛД (1). Очевидно, що $f^{(s)}=Q_0^{(s)}$, $s=1,2,\ldots$.

ГЛД (1) називають відносно стійким до збурень, якщо для довільного $\varepsilon>0$ існує таке $\delta>0$, що для кожного $\widehat{a}_{i(k)}\in\mathbb{C}$, $i\,(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots$, такого що

$$\left|\frac{\widehat{a}_{i(k)}-a_{i(k)}}{a_{i(k)}}\right|<\delta,$$

виконуються нерівності

$$\left|\frac{\widehat{f}^{\,(s)}-f^{(s)}}{f^{(s)}}\right|<\varepsilon,\quad s=1,2,\ldots,$$

де $\widehat{f}^{\,(s)}=1+\underset{k=1}{\overset{s}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{\widehat{a}_{i(k)}}{1}$, $s=1,2,\ldots$

Гіллястий ланцюговий дріб

$$1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{\widehat{a}_{i(k)}}{1}\tag{2}$$

називають збуреним ГЛД до дробу (1), а його елементи — збуреними елементами до елементів дробу (1).

II. Формули відносних похибок підхідних дробів

Нехай $\alpha_{i(k)}$, $\varepsilon^{(s)}$, $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$ — відповідно відносні похибки елементів $a_{i(k)}$, підхідних дробів $f^{(s)}$ та залишків $Q_{i(p)}^{(s)}$ підхідних дробів $f^{(s)}$ ГЛД (1), тобто

$$\widehat{a}_{i(k)}=a_{i(k)}\left(1+\alpha_{i(k)}\right),$$

$i\,(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots,$

$$\widehat{f}^{\,(s)}=f^{(s)}\left(1+\varepsilon^{(s)}\right),$$

$s=1,2,\ldots,$

$$\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}=Q_{i(p)}^{(s)}\left(1+\varepsilon_{i(p)}^{(s)}\right),$$

$i\,(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=\overline{0,s}$, $s=1,2,\ldots,$ у припущенні, що

$$a_{i(k)}\neq 0,\ \widehat{a}_{i(k)}\neq 0,\tag{3}$$

$i\,(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots,$

$$Q_{i(p)}^{(s)}\neq 0,\ \widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}\neq 0,\tag{4}$$

$i\,(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=\overline{0,s}$, $s=1,2,\ldots,$ де $\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}$ — залишки підхідного дробу $\widehat{f}^{\,(s)}$ ГЛД (2).

Розглянемо величини $\widehat{\alpha}_{i(k)}$, $\widehat{\varepsilon}^{\,(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$, що визначаються співвідношеннями

$$a_{i(k)}=\widehat{a}_{i(k)}\left(1+\widehat{\alpha}_{i(k)}\right),$$

$i\,(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots,$

$$f^{(s)}=\widehat{f}^{\,(s)}\left(1+\widehat{\varepsilon}^{\,(s)}\right),$$

$s=1,2,\ldots,$

$$Q_{i(p)}^{(s)}=\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}\right),$$

$i\,(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=\overline{0,s}$, $s=1,2,\ldots$

Зауважимо, що величини $\widehat{\alpha}_{i(k)}$, $\widehat{\varepsilon}^{\,(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ є відповідно відносними похибками величин $\dfrac{1}{a_{i(k)}}$, $\dfrac{1}{f^{(s)}}$, $\dfrac{1}{Q_{i(p)}^{(s)}}$.

За умов (3), (4), доведемо, що для відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$ справджуються такі формули:

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)}=\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}g_{i(p+1)}^{(s)}\left(\alpha_{i(p+1)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\right)+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\right),\tag{5}$$

$$\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}=\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\widehat{g}_{i(p+1)}^{(s)}\left(\widehat{\alpha}_{i(p+1)}\left(1+\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\right)+\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\right),\tag{6}$$

$i\,(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=\overline{0,s-1}$, $s=1,2,\ldots,$ де

$$g_{i(p)}^{(s)}=\frac{a_{i(p)}}{Q_{i(p-1)}^{(s)}Q_{i(p)}^{(s)}},\ i\,(p)\in\mathcal{I}_p,\ p=\overline{1,s},\tag{7}$$

$$\widehat{g}_{i(p)}^{(s)}=\frac{\widehat{a}_{i(p)}}{\widehat{Q}_{i(p-1)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}},\ i\,(p)\in\mathcal{I}_p,\ p=\overline{1,s}, \tag{8}$$

$$\varepsilon_{i(s)}^{(s)}=\widehat{\varepsilon}_{i(s)}^{(s)}=0,\ i\,(s)\in\mathcal{I}_s.$$

Для фіксованого мультиіндексу $i(p)$, $i(p)\in\mathcal{I}_p$, $0\le p\le s-1$, маємо

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)}=\frac{\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}-Q_{i(p)}^{(s)}}{Q_{i(p)}^{(s)}}=$$
$$=\frac{1}{Q_{i(p)}^{(s)}}\left(1+\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\frac{a_{i(p+1)}\left(1+\alpha_{i(p+1)}\right)}{Q_{i(p+1)}^{(s)}\left(1+\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\right)}\right)-1=$$
$$=\frac{1}{Q_{i(p)}^{(s)}}+\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\frac{a_{i(p+1)}\left(1+\alpha_{i(p+1)}\right)\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\right)}{Q_{i(p)}^{(s)}Q_{i(p+1)}^{(s)}}-1=$$
$$=\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}g_{i(p+1)}^{(s)}\left(\left(1+\alpha_{i(p+1)}\right)\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\right)-1\right),$$

$$\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}=\frac{Q_{i(p)}^{(s)}-\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}}{\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}}=$$
$$=\frac{1}{\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}}\left(1+\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\frac{\widehat{a}_{i(p+1)}\left(1+\widehat{\alpha}_{i(p+1)}\right)}{\widehat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+1)}^{(s)}\right)}\right)-1=$$
$$=\frac{1}{\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}}+\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\frac{\widehat{a}_{i(p+1)}\left(1+\widehat{\alpha}_{i(p+1)}\right)\left(1+\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\right)}{\widehat{Q}_{i(p)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(p+1)}^{(s)}}-1=$$
$$=\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\widehat{g}_{i(p+1)}^{(s)}\left(\left(1+\widehat{\alpha}_{i(p+1)}\right)\left(1+\varepsilon_{i(p+1)}^{(s)}\right)-1\right).$$

Використовуючи формули (5), (6), отримуємо такі формули відносних похибок $\varepsilon_{i(p)}^{(s)}$, $\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}$:

$$\varepsilon_{i(p)}^{(s)}=$$
$$\sum_{k=1}^{s-p}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\sum_{i_{p+2}=1}^{N_{i(p+1)}}\cdots\sum_{i_{p+k}=1}^{N_{i(p+k-1)}}\widetilde{\gamma}_{i(p+k)}^{(s)}\prod_{m=1}^{k}\widetilde{g}_{i(p+m)}^{(s)}, \tag{9}$$

$i\,(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=\overline{0,s-1}$, $s=1,2,\ldots$, де

$$\widetilde{g}_{i(p+k)}^{(s)}=\begin{cases}g_{i(p+k)}^{(s)},\ k=2l+1,\\ \widehat{g}_{i(p+k)}^{(s)},\ k=2l,\end{cases}$$
$$\widetilde{\gamma}_{i(p+k)}^{(s)}=\begin{cases}\alpha_{i(p+k)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+k)}^{(s)}\right),\ k=2l+1,\\ \widehat{\alpha}_{i(p+k)}\left(1+\varepsilon_{i(p+k)}^{(s)}\right),\ k=2l,\end{cases}$$

$i\,(p+k)\in\mathcal{I}_{p+k}$, $k=\overline{1,s-p}$;

$$\widehat{\varepsilon}_{i(p)}^{(s)}=$$
$$\sum_{k=1}^{s-p}\sum_{i_{p+1}=1}^{N_{i(p)}}\sum_{i_{p+2}=1}^{N_{i(p+1)}}\cdots\sum_{i_{p+k}=1}^{N_{i(p+k-1)}}\widetilde{\widetilde{\gamma}}_{i(p+k)}^{(s)}\prod_{m=1}^{k}\widetilde{\widetilde{g}}_{i(p+m)}^{(s)}, \tag{10}$$

$i\,(p)\in\mathcal{I}_p$, $p=\overline{0,s-1}$, $s=1,2,\ldots$, де

$$\widetilde{\widetilde{g}}_{i(p+k)}^{(s)}=\begin{cases}\widehat{g}_{i(p+k)}^{(s)},\ k=2l+1,\\ g_{i(p+k)}^{(s)},\ k=2l,\end{cases}$$
$$\widetilde{\widetilde{\gamma}}_{i(p+k)}^{(s)}=\begin{cases}\widehat{\alpha}_{i(p+k)}\left(1+\varepsilon_{i(p+k)}^{(s)}\right),\ k=2l+1,\\ \alpha_{i(p+k)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(p+k)}^{(s)}\right),\ k=2l,\end{cases}$$

$i\,(p+k)\in\mathcal{I}_{p+k}$, $k=\overline{1,s-p}$.

Оскільки $\varepsilon^{(s)}=\varepsilon_0^{(s)}$, $\widehat{\varepsilon}^{(s)}=\widehat{\varepsilon}_0^{(s)}$, то, прийнявши в (9), (10) $p=0$, отримуємо формули відносних похибок підхідних дробів ГЛД (1) і оберненого до нього гіллястого ланцюгового дробу

$$\left(1+\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1} \tag{11}$$

відповідно:

$$\varepsilon^{(s)}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\widetilde{\gamma}_{i(k)}^{(s)}\prod_{m=1}^{k}\widetilde{g}_{i(m)}^{(s)}, \tag{12}$$

$$\widehat{\varepsilon}^{(s)}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{i_1=1}^{N_0}\sum_{i_2=1}^{N_{i(1)}}\cdots\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\widetilde{\widetilde{\gamma}}_{i(k)}^{(s)}\prod_{m=1}^{k}\widetilde{\widetilde{g}}_{i(m)}^{(s)}. \tag{13}$$

III. Достатні умови відносної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними частинними чисельниками та знаменниками, що дорівнюють одиниці

Теорема 1. *Нехай елементи ГЛД (1) задовольняють умови*

$$\left|a_{i(k)}\right|\le\rho_{i(k)}\left(1-\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}\right), \tag{14}$$

$i\,(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots$, *де* $\rho_{i(k)}$ — *додатні сталі, такі, що*

$$\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\rho_{i(k)}<1,\ i\,(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1},\ k=1,2,\ldots, \tag{15}$$

$$\sup_{\substack{i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1},\\ k=1,2,\ldots}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\rho_{i(k)}\left(1-\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}\right)<\frac{1}{4}. \tag{16}$$

Тоді ГЛД (1) є відносно стійким до збурень, якщо збігається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{m=0}^{k}\frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}}, \tag{17}$$

де

$$\eta_{2m+1}=\max_{i(2m)\in\mathcal{I}_{2m}}\left\{\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\rho_{i(2m+1)}\right\},\ m=0,1,2,\ldots$$

Крім того, якщо відносні похибки елементів ГЛД (1) задовольняють умови

$$|\alpha_{i(k)}| \le \alpha,\ 0<\alpha<1,\ i(k)\in\mathcal{I}_k,\ k=1,2,\ldots, \quad (18)$$

$$\alpha \le \frac{1}{4\sup\limits_{\substack{i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1},\\ k=1,2,\ldots}} \sum\limits_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \rho_{i(k)}\left(1-\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}\right)}-1, \quad (19)$$

то для відносних похибок s-х підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \le 2\alpha\sum_{k=0}^{s-1}\prod_{m=0}^{[k/2]}\frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}},\ s=1,2,\ldots \quad (20)$$

□ *Доведення.* Використовуючи методику множин елементів та відповідних їм множин значень [15, 24], оцінимо величини $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}|\widetilde{g}_{i(k)}^{(s)}|$, $i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1}$, $k=\overline{1,s}$, $s=1,2,\ldots$

Для цього розглянемо послідовність множин

$$V_{i(k)}=\left\{z\in\mathbb{C}:|z|\le\rho_{i(k)}\right\}, \quad (21)$$

$i(k)\in\mathcal{I}_k$, $k=1,2,\ldots$.

Множина $\widetilde{V}_{i(k)}=1+\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}V_{i(k+1)}$ є кругом з центром в точці 1 радіуса $\widetilde{\rho}_{i(k)}=\sum\limits_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}$. Оскільки $\widetilde{\rho}_{i(k)}<1$, то $0\notin\widetilde{V}_{i(k)}$ і функція $w=a_{i(k)}/z$ відображає множину $\widetilde{V}_{i(k)}$ в круг

$$\frac{a_{i(k)}}{\widetilde{V}_{i(k)}}=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z-p_{i(k)}\right|\le r_{i(k)}\right\},$$

де

$$p_{i(k)}=\frac{a_{i(k)}}{1-\left(\widetilde{\rho}_{i(k)}\right)^2},\ r_{i(k)}=\frac{\left|a_{i(k)}\right|\widetilde{\rho}_{i(k)}}{1-\left(\widetilde{\rho}_{i(k)}\right)^2}.$$

Множини (21) є множинами значень величин $\dfrac{a_{i(k)}}{Q_{i(k)}^{(s)}}$, якщо $\left|p_{i(k)}\right|+r_{i(k)}\le\rho_{i(k)}$. Остання нерівність еквівалентна нерівності (14).

Із умов (14), (18), (19) для довільного фіксованого мультиіндексу $i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, маємо

$$\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\left|\widehat{a}_{i(k)}\right|=\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\left|a_{i(k)}\right|\left|1+\alpha_{i(k)}\right|\le$$
$$\le(1+\alpha)\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\rho_{i(k)}\left(1-\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}\right)\le$$
$$\le(1+\alpha)\sup_{\substack{i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1},\\ k=1,2,\ldots}}\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\rho_{i(k)}\left(1-\sum_{i_{k+1}=1}^{N_{i(k)}}\rho_{i(k+1)}\right)\le$$
$$\le\frac{1}{4}.$$

Тоді для залишків $\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}$ справджуються оцінки $\left|\widehat{Q}_{i(k)}^{(s)}\right|\ge 1/2$.

Величини $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\left|\widetilde{g}_{i(k)}^{(s)}\right|$, $i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1}$, $k=\overline{1,s}$, $s=1,2,\ldots$, оцінимо з врахуванням парності числа k. При $k=2m+1$ маємо:

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\left|g_{i(2m+1)}^{(s)}\right|=\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\left|\frac{a_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m)}^{(s)}Q_{i(2m+1)}^{(s)}}\right|\le$$
$$\le\left(1-\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\rho_{i(2m+1)}\right)^{-1}\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\frac{a_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m+1)}^{(s)}}\le$$
$$\le\left(1-\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(m)}}\rho_{i(2m+1)}\right)^{-1}\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\rho_{i(2m+1)}\le$$
$$\le\frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}},$$

при $k=2m$ маємо:

$$\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\widehat{g}_{i(2m)}^{(s)}\right|=\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\frac{\widehat{a}_{i(2m)}}{\widehat{Q}_{i(2m-1)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2m)}^{(s)}}\right|\le$$
$$\le 4\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\widehat{a}_{i(2m)}\right|\le 1.$$

Знайдемо оцінки величин $\sum\limits_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}}\left|\widetilde{\gamma}_{i(k)}^{(s)}\widetilde{g}_{i(k)}^{(s)}\right|$, $i(k-1)\in\mathcal{I}_{k-1}$, $k=\overline{1,s}$, $s=1,2,\ldots$:

$$\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\widetilde{\gamma}_{i(2m)}^{(s)}\widetilde{g}_{i(2m)}^{(s)}\right|=$$
$$=\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\frac{\widehat{a}_{i(2m)}}{\widehat{Q}_{i(2m-1)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2m)}^{(s)}\left(1+\widehat{\varepsilon}_{i(2m)}^{(s)}\right)}\frac{\alpha_{i(2m)}}{1+\alpha_{i(2m)}}\right|=$$
$$=\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\frac{a_{i(2m)}\alpha_{i(2m)}}{\widehat{Q}_{i(2m-1)}^{(s)}Q_{i(2m)}^{(s)}}\right|\le$$
$$\le\alpha\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\left|\frac{a_{i(2m)}}{\widehat{Q}_{i(2m-1)}^{(s)}Q_{i(2m)}^{(s)}}\right|\le 2\alpha\sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}}\rho_{i(2m)}<2\alpha,$$

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\left|\widetilde{\gamma}_{i(2m+1)}^{(s)}\widetilde{g}_{i(2m+1)}^{(s)}\right|=$$
$$=\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\left|\frac{a_{i(2m+1)}\alpha_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m)}^{(s)}Q_{i(2m+1)}^{(s)}\left(1+\varepsilon_{i(2m+1)}^{(s)}\right)}\right|$$
$$=\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\left|\frac{a_{i(2m+1)}\alpha_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2m+1)}^{(s)}}\right|\le$$
$$\le\alpha\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\left|\frac{a_{i(2m+1)}}{Q_{i(2m)}^{(s)}\widehat{Q}_{i(2m+1)}^{(s)}}\right|\le\frac{2\alpha}{1-\sum\limits_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}}\rho_{i(2m+1)}}\times$$

$$\sum_{i_{2m+1}=1}^{N_{i(2m)}} \rho_{i(2m+1)} \left(1 - \sum_{i_{2m+2}=1}^{N_{i(2m+1)}} \rho_{i(2m+2)}\right) \leq$$
$$\leq 2\alpha \frac{\eta_{2m+1}}{1-\eta_{2m+1}}.$$

Із формули (12), враховуючи оцінки величин $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left|\widetilde{g}_{i(k)}^{(s)}\right|$, $\sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \left|\widetilde{\gamma}_{i(k)}^{(s)} g_{i(k)}^{(s)}\right|$, $i(k-1) \in \mathcal{I}_{k-1}$, $k = \overline{1,s}$, $s = 1, 2, \ldots$, отримуємо оцінку (20), з якої випливає, що збіжність ряду (17) забезпечує виконання умов означення відносної стійкості до збурень ГЛД (1). ■

Нехай $N_{i(k)} = N$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $N \in \mathbb{N}$, $\rho_{i(k)} = \rho/N$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $0 < \rho < 1/2$. Тоді з теореми 1 отримуємо

Наслідок 1. ГЛД

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{22}$$

з числовими комплексними елементами $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, є відносно стійким до збурень, якщо

$$\left|a_{i(k)}\right| \leq \frac{\rho(1-\rho)}{N},\ 0 < \rho < \frac{1}{2},\ i(k) \in \mathcal{I}_k,\ k = 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Крім того, якщо для відносних похибок елементів ГЛД (22) виконуються нерівності (18) і

$$\alpha \leq \frac{1}{4\rho(1-\rho)} - 1, \tag{24}$$

то для відносних похибок s-х підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon^{(s)}\right| \leq 2\alpha \times$$
$$\times \left(\frac{2\rho}{1-2\rho} - \left(\frac{2\rho}{1-2\rho} + \frac{1+(-1)^{s+1}}{2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\left[\frac{s+1}{2}\right]}\right),$$

$s = 1, 2, \ldots$

Використовучи методику доведення теореми 1 і формулу (13), отримуємо ознаку відносної стійкості до збурень ГЛД (11).

Теорема 2. *Нехай елементи ГЛД (11) задовольняють умови (14), де $\rho_{i(k)}$ — додатні сталі, такі, що викунуються нерівності (15), (16). Тоді ГЛД (11) є відносно стійким до збурень, якщо збігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\eta_{2m}}{1-\eta_{2m}},$$

де

$$\eta_{2m} = \max_{i(2m-1) \in \mathcal{I}_{2m-1}} \left\{ \sum_{i_{2m}=1}^{N_{i(2m-1)}} \rho_{i(2m)} \right\},\ m = 1, 2, \ldots.$$

Крім того, якщо відносні похибки елементів задовольняють умови (18), (19), то для відносних похибок s-х підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\widehat{\varepsilon}^{(s)}\right| \leq 2\alpha \left(1 + \sum_{k=2}^{s} \prod_{m=1}^{[k/2]} \frac{\eta_{2m}}{1-\eta_{2m}}\right), s = 1, 2, \ldots$$

Нехай в теоремі 2 $N_{i(k)} = N$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, $N \in \mathbb{N}$, $\rho_{i(k)} = \rho/N$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $0 < \rho < 1/2$. Тоді справджується

Наслідок 2. ГЛД

$$\left(1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}}{1}\right)^{-1} \tag{25}$$

з числовими комплексними елементами $a_{i(k)}$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, є відносно стійким до збурень, якщо виконуються умови (23).

Крім того, якщо для відносних похибок елементів ГЛД (25) виконуються нерівності (18), (24), то для відносних похибок s-их підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\widehat{\varepsilon}^{(s)}\right| \leq 2\alpha \times$$
$$\times \left(1 + \frac{2\rho}{1-2\rho} - \left(\frac{2\rho}{1-2\rho} + \frac{1+(-1)^{s}}{2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\left[\frac{s}{2}\right]}\right),$$

$s = 1, 2, \ldots$

IV. Умови відносної стійкості до збурень багатовимірних регулярних C-дробів

Нехай $a_{i(k)}(\mathbf{z})$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — деяка послідовність функцій, визначених в області $D \subset \mathbb{C}^N$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_N)$.

Функціональний ГЛД

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{1}, \tag{26}$$

називають відносно стійким до збурень у точці $\mathbf{z_0} = \left(z_1^0, z_2^0, \ldots, z_N^0\right) \in D$, якщо числовий дріб $1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z_0})}{1}$ є відносно стійким до збурень [23].

Якщо ГЛД (26) є відносно стійким до збурень у кожній точці $\mathbf{z}_0 \in D$, то область D називають областю відносної стійкості до збурень ГЛД (26).

ГЛД вигляду

$$1 + \underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \sum_{i_k=1}^{N} \frac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1}, \tag{27}$$

або вигляду

$$\left(1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}}{1}\right)^{-1}, \tag{28}$$

де $c_{i(k)} \neq 0$, $i(k) \in \mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — комплексні числа, $(z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$, називаються багатовимірними регулярними C-дробами.

Теорема 3. *Нехай (27) — багатовимірний регулярний C-дріб, такий що*

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k = 0, \tag{29}$$

де

$$\lambda_k = \max_{i(k)\in I_{i(k)}}\left|c_{i(k)}\right|, \ k = 1, 2, \ldots \tag{30}$$

Тоді для довільних додатних чисел M і ρ, $\rho < \frac{1}{2}$, існує таке натуральне число $n_0 = n_0(M, \rho)$, що для кожного $n \geq n_0$ і довільного фіксованого мультиіндексу $i(n) \in \mathcal{I}_n$ ГЛД

$$1+\underset{k=n+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}}{1} \tag{31}$$

є відносно стійким до збурень у полікрузі

$$D = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^N : \ |z_i| \leq M, \ i = \overline{1, N}\right\}. \tag{32}$$

Причому, якщо відносні похибки елементів ГЛД (31) задовольняють умови (18), (24), то для відносних похибок s-х підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\varepsilon_{i(n)}^{(s)}\right| \leq 2\alpha\left(\frac{2\rho}{1-2\rho} - \left(\frac{2\rho}{1-2\rho} + \frac{1+(-1)^{s-n+1}}{2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\left[\frac{s-n+1}{2}\right]}\right), \ s = n, n+1, n+2, \ldots \tag{33}$$

□ *Доведення.* Зафіксуємо точку $\mathbf{z}_0 \in D$, де множина D визначається згідно з (32). Тоді

$$\left|z_{i_k}^0\right| \leq M, \ i_k = \overline{1, N}. \tag{34}$$

Розглянемо числовий ГЛД

$$1+\underset{k=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}^0}{1}. \tag{35}$$

Оскільки послідовність $\{\lambda_k\}$ є нескінченно малою, то для заданих чисел $M > 0$ і $0 < \rho < \frac{1}{2}$, існує такий номер $n_0 = n_0(M, \rho)$, що для всіх натуральних чисел $k > n_0$ виконуються нерівності

$$\left|c_{i(k)}\right| = \left|c_{i(n_0)i_{n_0+1}\ldots i_k}\right| \leq \frac{\rho(1-\rho)}{MN}, \tag{36}$$

де $i(n_0)$ — фіксований мультиіндекс, $i_p = \overline{1, N}$, $p = \overline{n_0+1, k}$, $k = n_0+1, n_0+2, \ldots$

Нехай $i(n)$ — довільний фіксований мультиіндекс, $i(n) \in I_n$, $n \geq n_0$. Тоді з нерівностей (34), (36) випливає, що, починаючи з $(n+1)$-го поверху, для елементів ГЛД (35) виконуються нерівності

$$\left|c_{i(k)}z_{i_k}^0\right| \leq \frac{\rho(1-\rho)}{N}, \ i(k) \in I_k, \ k = n+1, n+2, \ldots$$

Отже, за наслідком 1 числовий ГЛД

$$1+\underset{k=n+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}^0}{1}$$

є відносно стійким до збурень.

Збуривши коефіцієнти $a_{i(k)} = c_{i(k)}z_{i_k}^0$ у певний спосіб, щоб виконувались умови (18), (24), для відносних похибок підхідних дробів отримаємо оцінку (33). ■

Теорема 4. *Нехай (28) — багатовимірний регулярний C-дріб, такий, що виконуються умови (29), де величини λ_k визначаються згідно з (30). Тоді для довільних додатних чисел M і ρ, $\rho < \frac{1}{2}$, існує таке натуральне число $n_0 = n_0(M, \rho)$, що для кожного $n \geq n_0$ і довільного фіксованого мультиіндексу $i(n) \in \mathcal{I}_n$ ГЛД*

$$\left(1+\underset{k=n+1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}}\sum_{i_k=1}^{N}\frac{c_{i(k)}z_{i_k}}{1}\right)^{-1} \tag{37}$$

є відносно стійким до збурень в полікрузі (32). Причому, якщо відносні похибки елементів ГЛД (37) задовольняють умови (18), (24), то для відносних похибок s-х підхідних дробів справджується оцінка

$$\left|\widehat{\varepsilon}_{i(n)}^{(s)}\right| \leq 2\alpha\left(1+\frac{2\rho}{1-2\rho} - \left(\frac{2\rho}{1-2\rho} + \frac{1+(-1)^{s-n}}{2}\right)\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^{\left[\frac{s-n}{2}\right]}\right), \ s = n+1, n+2, \ldots$$

Теорему 4 доводимо за схемою доведення теореми 3 з урахуванням наслідку 2.

Висновки

Встановлено умови, за яких гіллястий ланцюговий дріб зі змінною кількістю гілок розгалужень та комплексними частинними чисельниками, що задовольняють умови багатовимірного аналога теореми Ворпіцького, є відносно стійким до збурень. Встановлено оцінки відносних похибок підхідних дробів. Використовуючи ці результати, досліджено відносну стійкість до збурень багатовимірних регулярних C-дробів.

Надалі доцільно дослідити стійкість багатовимірних регулярних C-дробів, що є розвиненнями спеціальних функцій у гіллясті ланцюгові дроби, зокрема багатовимірних гіпергеометричних функцій.

Література

[1] *Backeljauw F., Becuwe S., Cuyt A.* Validated Evaluation of Special Mathematical Functions // Lecture Notes in Computer Science. – **5144**. – 2008. – P. 206–216.

[2] *Backeljauw F., Becuwe S., Cuyt A., Van Deun J., Lozier D. W.* Validated evaluation of special mathematical functions // Science of Computer Programming. – 2014. – Vol. **90**, Part **A**. – P. 2–20.

[3] *Blanch G.* Numerical evaluation of continued fractions // SIAM Rev. – Vol. **6**, No **4**. – 1964. – P. 383–421.

[4] *Cuyt A., Petersen V. B., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbook of Continued Fractions for Special Functions. – Berlin: Springer, 2008. – 431 p.

[5] *Cuyt A., Van Der Cruyssen P.* Rounding error analysis for forward continued fraction algorithms // Computers and Mathematics with Applications. – 1985. – **11**. – P. 541–564.

[6] *Colman M., Cuyt A., Van Deun J.* Validated computation of certain hypergeometric functions // ACM transactions on mathematical software. – 2011. – Vol. **38**, No **2**. – P. 11.1–11.20.

[7] *Gautschi W.* Computational aspects of three-term recurrence relations // SIAM Rev. – 1967. – Vol. **9**, No **1**. – P. 24–82.

[8] *Gil A., Segura J.,Temme N. M.* Numerical Methods for Special Functions. – Philadelphia: SIAM, 2007. – 417 p.

[9] *Higham N. J.* Accuracy and stability of numerical algorithms, second edition. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 680 p.

[10] *Jones W. B., Thton W. J.* Numerical stability in evaluating continued fractions // Math. Comp. – 1974. – Vol. **28**. – P. 795–810.

[11] *Lorentzen L., Waadeland H.* Continued Fractions with Application. – Amsterdam: North-Holland. – 1992. – 606 p.

[12] *Macon N., Baskervill M.* On the generation of errors in the digital evaluation of continued fractions // J. Assoc. Comp. Mach. – 1956. – Vol. **5**. – P. 211–221.

[13] *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: van Nostrand. 1948. – 433 p.

[14] *Антонова Т. М., Гладун В. Р.* Деякі достатні умови збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів зі знакозмінними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № **4**. – С. 27–35.

[15] *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. – К.: Наук. думка. 1986. – 176 с.

[16] *Боднар Д. І., Воделанд Х., Кучмінська Х. Й., Сусь О.М.* Про стійкість гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1994. – **37**. – С. 3–7.

[17] *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Достатні умови стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з додатними елементами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, №**1**. – С. 22–27.

[18] *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Про стійкість до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Мат. студії. – 2006. – Т. **25**, № **2**. – С. 207–212.

[19] *Боднар Д. І., Гладун В. Р.* Деякі області стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами // Вісник Чернівецького університету. Серія "Математика". – 2006. – Вип. 288. – С. 18–27.

[20] *Гладун В. Р.* Умови збіжності та стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів із від'ємними частинними чисельниками // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № **4**. – С. 16–26.

[21] *Гладун В. Р.* Множини збіжності та стійкості деяких послідовностей підхідних дробів гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами // Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2004. – Вип. **63**. –С. 48–58.

[22] *Гладун В. Р.* Множини абсолютної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів з дійсними елементами // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фізико-математичні науки. – 2013. – № **768**. – С. 63–70.

[23] *Гоєнко Н. П., Гладун В. Р., Манзій О. С.* Про нескінченні залишки гіллястого ланцюгового дробу Ньордунда для гіпергеометричних функцій Аппеля // Карпатські матем. публ. – 2014. – Т. **6**, № **1**. – С. 11–25.

[24] *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. – М.: Мир, 1985. – 414 с.

[25] *Кучминская Х. И., Боднар Д. И.* Вычислительная устойчивость разложений функций многих переменных в ветвящиеся цепные дроби. – В кн.: Однородные цитровые вычисления и интегрирующие структуры. – Таганрог, 1977. Вып. **8**. – С. 145–151.

[26] *Кучмінська Х. Й.* Двовимірні неперервні дроби. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики, 2010. – 218 с.

[27] *Недашковский Н. А.* О сходимости и вычислительной устойчивости ветвящихся цепных дробей некоторых типов // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. **20**. – С. 27–31.

[28] *Одноволова Т. Н.* Некоторые оценки погрешности вычисления интегральных цепных дробей. // Докл. АН УССР. Сер А. –1984. –№ **7**. – С. 19–22.

[29] *Одноволова Т. Н.* Оценка погрешности вычисления одного класса интегральных цепных дробей // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1984. – № **182**. – С. 96–98.

[30] *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – М.: Наука, 1983. – 312 с.

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ К ВОЗМУЩЕНИЯМ МНОГОМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ C-ДРОБЕЙ

Гладун В. Р., Матулка Е. В., Манзий А. С., Пабыривский В. В.

Национальный университет "Львивськa политэхника"
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина

Исследована относительная устойчивость к возмущениям числовой ветвящейся цепной дроби с переменным числом веток ветвлений, элементы которой удовлетворяют условиям многомерного аналога теоремы Ворпицкого. Установлены оценки погрешностей подходящих дробей такой ветвящейся цепной дроби. Полученные результаты применены к исследованию устойчивости к возмущениям многомерных регулярных C-дробей.

Ключевые слова: ветвящаяся цепная дробь, подходящая дробь, многомерная регулярная C-дробь, относительная устойчивость к возмущениям, оценки относительных погрешностей подходящих дробей ветвящейся цепной дроби.

2000 MSC: 11J70

УДК: 517.524

RELATIVE STABILITY TO PERTURBATIONS OF MULTIDIMENSIONAL REGULAR C-FRACTIONS

Hladun V. R., Matulka K. V., Manziy O. S., Pabyrivskyi V. V.

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

We investigate the relative stability to perturbations of numerical branched continued fraction with variable number of branches, whose elements satisfy the conditions of multidimensional analogue of Worpitzky theorem. We establish the relative errors estimates of approximants of such branched continued fraction. The obtained results are applied to study the stability to perturbations of multidimensional regular C -fractions.

Key words: branched continued fraction, approximant of a branched continued fraction, regular C-fraction, relative stability to perturbations, the estimates of relative errors of approximants of branched continued fraction.

2000 MSC: 11J70

UDK: 517.524