ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 100–108

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 100–108

ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НА АЛГЕБРАХ ТИПУ ВІНЕРА

М'яус О. М.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 18 березня 2014 р.)

Побудоване функціональне числення над просторами кореневих векторів регулярних еліптичних диференціальних операторів на алгебрах типу Вінера обмежених аналітичних функцій нескінченної кількості змінних.

Ключові слова: генератор групи, функціональне числення, узагальнена функція, нормальна еліптична крайова задача.

2000 MSC: 2000: 35K55

УДК: 517.98

Вступ

Базовими у побудові функцій від операторів були результати Ф. Рісса та Н. Данфорда, які, опираючись на інтегральну теорему Коші, побудували функціональне числення обмежених операторів над банаховими просторами в класі аналітичних функцій. Поширенню цих результатів на необмежені оператори присвячено праці С. Тейлора, А. Пазі, Х. Хеймանса, С. Ангенента, Ю. Любича, Я. Радино [1, 2 та бібліогр.] й інших. Зокрема, Я. Радино побудував функціональне числення необмежених операторів, користуючись векторами експоненціального типу, та застосував його до дослідження розв'язків диференціально-операторних рівнянь.

Якщо $U(t)$ – група, породжена оператором A ($U(t) = e^{tA}$ для обмеженого оператора A), то перетворення

$$\hat{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} U(t)x dt, \qquad (*)$$

яке називають перетворенням Фур'є Е. Хілле, Р. С. Філліпса та А. Балакришнана ([3–5] та бібліогр.), було використано для побудови функціонального числення операторів – одержання гомоморфізмів для перетворень Фур'є функцій із певних класів (обмежених, із згорткових алгебр мір) та Фур'є-образів вигляду (*) функцій від генераторів груп $U(t)$. У працях В.Я.Лозинської, О.В. Лопушанського та автора ([6]–[8]) таке функціональне числення поширено на класи узагальнених функцій експоненціального типу для генераторів рівномірно обмежених сильно неперервних груп операторів у довільному банаховому просторі.

Функціональне числення Хілле–Філліпса–Балакришнана має основні властивості функціонального числення Ф. Рісса та Н. Данфорда та певні диференціальні властивості і, як показано у [9], із врахуванням ідей функціонального числення Любича-Мацаєва, діє на просторах кореневих векторів регулярного еліптичного оператора.

На базі методів нескінченно-вимірного аналізу (див. [10] та бібліогр.) у працях А. Беднажа, А. В. Загороднюка, О. В. Лопушанського [11–13] введено і вивчено алгебри типу Вінера на гільбертових та банахових просторах обмежених аналітичних функцій на одиничній банаховій кулі, досліджено властивості векторів експоненціального типу операторів на таких алгебрах. Такі алгебри широко використовуються у квантовій теорії поля.

Функціональне числення у класах узагальнених функцій експоненціального типу для генераторів сильно неперервних груп ізометричних операторів на таких алгебрах обмежених аналітичних функцій нескінченної кількості змінних побудував автор у [14]. У цій статті запропоновано його застосування на випадок, коли генератор такої групи породжений регулярною еліптичною крайовою задачею.

I. Розподіли експоненціального типу

Нехай $L_1(\mathrm{R})$ — комплексний банахів простір сумовних функцій $\varphi(t)$ дійсної змінної $t \in \mathrm{R}$ з нормою $\|\varphi\|_{L_1} := \int_{\mathrm{R}} |\varphi(t)|\, dt$.

Якщо $\varphi, \psi \in L_1(\mathrm{R})$, то визначена згортка

$$(\varphi * \psi)(t) := \int_{\mathrm{R}} \varphi(s)\psi(t-s)\, ds.$$

Простір $L_1(\mathrm{R})$ є банаховою алгеброю відносно згортки.

Для $\nu > 0$ розглянемо підпростір в $L_1(\mathrm{R})$

$$\mathcal{E}^{\nu} := \left\{ \varphi \in L_1(\mathrm{R})\colon \|\varphi\|_{\nu} = \sup_{k \in \mathrm{Z}_+} \tfrac{\|D^k \varphi(t)\|_{L_1}}{\nu^k} < \infty \right\}$$

цілих аналітичних комплексних функцій на C експоненціального типу ν [6], [2], чиє звуження на R належить $L_1(\mathrm{R})$.

Кожний простір $\mathcal{E}^\nu$ повний [6]. Нехай

$$\mathcal{E} := \bigcup_{\nu>0} \mathcal{E}^\nu = \lim_{\nu\to\infty} \operatorname{ind} \mathcal{E}^\nu -$$

– індуктивна границя $\mathcal{E}^\nu$, вкладення $\mathcal{E}^\nu \subset \mathcal{E}^\mu$, $\nu \le \mu$ – неперервні. Зауважимо, що підпростір

$$\mathcal{E} \subset L_1(\mathrm{R})$$

складається з усіх цілих аналітичних комплексних функцій на C експоненціального типу ([2]), звуження яких на дійсну вісь R належить $L_1(\mathrm{R})$.

Через $\mathcal{L}(E)$ позначаємо алгебру лінійних неперервних операторів над простором $\mathcal{E}$ з сильною операторною топологією.

Функціонали простору $\mathcal{E}'$ називаються *розподілами експоненціального типу* на R. У дуальній парі $\langle \mathcal{E} \mid \mathcal{E}' \rangle$ простір $\mathcal{E}$ виконує функцію простору основних функцій і вкладення $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ щільне.

Для довільного розподілу $f \in \mathcal{E}'$ та функції $\varphi \in \mathcal{E}$ операцію згортки визначаємо співвідношенням

$$(f * \varphi)(t) := \langle \varphi(t-s) \mid f(s) \rangle = \langle T_s \varphi(t) \mid f(s) \rangle,$$

де $T_s : \varphi(t) \longrightarrow \varphi(t-s), \quad s \in \mathrm{R}$ – ізометрична група зсувів на $L_1(\mathrm{R})$.

У [6] доведено, що $\mathcal{E}'$ є інваріантним щодо диференціювання та визначаємо

$$\langle \varphi \mid D^k g \rangle = (-1)^k \langle D^k \varphi \mid g \rangle, \qquad k \in \mathrm{Z}_+ \tag{1.1}$$

для всіх функціоналів $g \in \mathcal{E}'$ і всіх цілих функцій $\varphi \in \mathcal{E}$ на R експоненціального типу.

З [6] випливає, що $\mathcal{E}'$ – локально спряжена топологічна алгебра щодо згортки

$$\mathcal{E}' \times \mathcal{E}' \ni (g,h) \longmapsto g * h \in \mathcal{E}',$$

а $\mathcal{E}$ – її згорткова підалгебра.

За відомою теоремою Пелі-Вінера, Фур'є-образ $\widehat{\mathcal{E}}$ простору $\mathcal{E}$, з індуктивною топологією при перетворенні Фур'є

$$\mathcal{F} \colon \mathcal{E} \ni \varphi \longrightarrow \widehat{\varphi} \in \widehat{\mathcal{E}},$$

складається з нескінченно диференційовних фінітних комплексних функцій на R. Тому

$$\widehat{\mathcal{E}} \subset \mathrm{D}(\mathrm{R}), \tag{1.2}$$

де D(R) – класичний простір основних функцій Шварца. Згідно з [6]

$$\mathcal{F}(g*h) = \widehat{g*h} = \widehat{g} \cdot \widehat{h}, \qquad g,h \in \mathcal{E}'$$

і тоді розширений Фур'є-образ $\widehat{\mathcal{E}'}$ простору $\mathcal{E}'$ – топологічна алгебра з поточковим множенням, а $\widehat{\mathcal{E}}$ – її підалгебра щодо множення; $\langle \widehat{\mathcal{E}} \mid \widehat{\mathcal{E}'} \rangle$ утворює нову дуальну пару, що є Фур'є-образом дуальної пари $\langle \mathcal{E} \mid \mathcal{E}' \rangle$.

II. Алгебра типу Вінера $W_\pi(B)$

Нехай X – банахів рефлексивний простір, X' – дуальний до нього,

$\mathcal{B}(X^n)$ – сукупність обмежених n-лінійних функціоналів на $X^n := X \times \ldots \times X$,

$\mathcal{B}(X^n_s)$ – сукупність усіх симетричних n-лінійних функціоналів h, тобто таких, що $h(x_1,\ldots,x_n) = h(x_{s(1)},\ldots,x_{s(n)})$ для кожного s множини $\{1,\ldots,n\}$,

$\mathcal{P}^n(X)$ – сукупність n-однорідних функціоналів $f : X \to \mathrm{C}$, тобто таких, що $f(x) = (h \circ \Delta_n)(x)$ для кожного $x \in X$ та деякого $h \in \mathcal{B}(X^n)$, де Δ_n – звуження X в X^n, а саме:

$$\Delta_n : X \longrightarrow X^n (x \longmapsto (x,\ldots,x)).$$

Алгебричний тензорний добуток n просторів Банаха $X^{\otimes n} := X \otimes \ldots \otimes X$ складається з усіх скінченних сум

$$u = \sum_j x_{1j} \otimes \cdots \otimes x_{nj}, \quad x_{ij} \in X, \quad i = 1,\ldots,n, \quad j \in \mathrm{N} \tag{2.1}$$

зі звичайними алгебричними операціями [15].

Нехай $X^{\otimes n}_\pi$ – алгебричний тензорний добуток $X^{\otimes n}$ з проективною нормою [16]

$$\|u\|_\pi = \inf \sum_j \|x_{1j}\| \cdots \|x_{nj}\|,$$

де інфімум береться за всіма скінченними зображеннями (2.1),

$X'^{\otimes n}_\pi$ – проективний тензорний добуток дуальних банахових просторів X' (відомо [17], IV.9, [18], що $X'^{\otimes n}_\pi$ є замкненим підпростором простору $(X^{\otimes n}_\pi)')$,

$\langle u \mid F'_n \rangle$ – значення лінійного функціоналу $F'_n \in X'^{\otimes n}_\pi$ на $u \in X^{\otimes n}_\pi$,

$x_1 \odot \ldots \odot x_n := \frac{1}{n!} \sum_{s \in \mathcal{G}_n = \{1,\ldots,n\}} x_{s(1)} \otimes \ldots \otimes x_{s(n)}$ – елементи симетричного проективного тензорного добутку $X^{\odot n}_\pi$,

$x^{\odot n} := x \odot \ldots \odot x \in X^{\odot n}_\pi \quad \forall x \in X$.

Згідно з [18], кожному функціоналу $F'_n \in X'^{\odot n}_\pi$ відповідає єдиний n-однорідний функціонал F_n такий, що

$$F_n(x) := \langle x^{\odot n} \mid F'_n \rangle \text{ для всіх } x \in X.$$

Позначимо

$$\mathcal{P}^n_\pi(X) = \{F_n \colon F'_n \in X'^{\odot n}_\pi\}.$$

На $\mathcal{P}^n_\pi(X)$ визначаємо норму

$$\|F_n\| := \|F'_n\|_\pi \quad \forall F'_n \in X'^{\odot n}_\pi.$$

Зауважимо, що $\mathcal{P}^n_\pi(X) \subset \mathcal{P}^n(X)$, $\mathcal{P}^n_\pi(X) \simeq X'^{\odot n}_\pi$.

Користуючись подібним означенням для просторів Гільберта із [11], у [12] введена алгебра Вінера W_π.

Означення 1. *Алгеброю типу Вінера називаеться*

$$W_\pi(X) := \left\{ F = \sum_{n\in \mathrm{Z}_+} F_n \colon F_n \in \mathcal{P}_\pi^n(X) \right\}$$

з нормою

$$\|F\| = \sum_{n\in \mathrm{Z}_+} \|F_n\|.$$

При X=C отримується класична алгебра типу Вінера.

Нехай $B = B(X) = \{x \in X \colon \|x\| < 1\}$ – відкрита одинична куля. Згідно з [13], $W_\pi(B)$ – банахова підалгебра з одиницею алгебри всіх обмежених аналітичних функцій на $B(X)$.

У [19] досліджено властивості секторіальних операторів на алгебрі типу Вінера $W_\pi(B)$. В [14] побудоване функціональне числення для генераторів сильно неперервних груп обмежених лінійних операторів, що діють на алгебрі $W_\pi(B)$. Подібно до [9], застосуємо його до регулярних еліптичних диференціальних операторів, які діють над банаховим простором $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$ і покажемо, що у цьому випадку функціональне числення існує над просторами кореневих векторів еліптичного оператора.

III. Функціональне числення для регулярних еліптичних операторів на алгебрі $W_\pi(B)$

Нехай тепер $X = L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, Ω – обмежена область в R^n. Через $\mathcal{L}(L_p(\Omega))$ позначаємо банахову алгебру обмежених лінійних операторів над $L_p(\Omega)$ з одиничним оператором I.

Припущення 1. В $L_p(\Omega)$ діє однопараметрична C_0–група $\mathrm{R} \ni \mathrm{t} \to \mathrm{U_t} := \mathrm{e^{-itA}} \in \mathcal{L}(\mathrm{L_p}(\Omega))$ ізометричних операторів з генератором A та A– регулярний еліптичний оператор порядку $2m$

$$A : \mathcal{D}(A) \ni u \longmapsto \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha D^\alpha u \in L_p(\Omega),\ a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

з областю визначення

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u \in W_p^{2m}(\Omega) : B_j u_{|\partial\Omega} = 0;\ j = 1, \ldots, m \right\},$$

де $W_p^{2m}(\Omega)$ — простір Соболєва і

$$B_j = \sum_{|\alpha|\le k_j} b_{j,\alpha} D^\alpha, \quad b_{j,\alpha} \in C^\infty(\partial\Omega),$$
$$0 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m$$

– нормальна система крайових диференціальних виразів.

Тепер $B = B_p = B(L_p(\Omega)) = \{x \in L_p(\Omega) :$ $\|x\| = \left[\int\limits_\Omega |x(z)|^p dz\right]^{1/p} < 1\}$, на алгебрі

$$W_\pi = W_\pi(B_p) := \left\{ F = \sum_{n\ge 0} F_n \colon F_n \in \mathcal{P}_\pi^n(L_p(\Omega)) \right\}$$

з нормою $\|F\| = \sum_{n\ge 0} \|F_n\|$ визначена [12] C_0-група

$$\widehat{U}_t F(x) = F(U_t x), \quad x \in B$$

та її генератор $\widehat{A}$ на щільному підпросторі $\mathcal{D}(\widehat{A}) = \left\{ F = \sum F_n \colon F_n' \in \mathcal{D}(A')^{\odot n} \right\}$ в $W_\pi(B_p)$, де $\mathcal{D}(A')$– область визначення спряженого оператора A' до еліптичного диференціального оператора A. Використовуватимемо, що

$$\widehat{U}_t F = F(U_t x) = \sum_{n\ge 0} \widehat{U}_t^{\odot n} F_n,$$

$F = \sum_{n\ge 0} F_n \in W_\pi$, $\quad x \in B_p$, де $\widehat{U}_t^{\odot n}$ визначено у [13] рівністю

$$\widehat{U}_t^{\odot n} F_n(x) = \left\langle x^{\odot n} \mid U_t^{'\otimes n} F_n' \right\rangle \quad \forall \quad x \in B_p,$$

$U_t^{'\otimes n} = \underbrace{U_t' \otimes \ldots \otimes U_t'}_{n}$, і $\langle U_t x \mid y\rangle = \langle x \mid U_t' y\rangle$ для всіх $x, y \in B_p$, тобто U_t' є спряженою групою до U_t.

На алгебричному тензорному добутку $\mathcal{D}(A')^{\otimes n} = \mathcal{D}(A') \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}(A')$, що є щільною підмножиною в $X'^{\otimes n}$, визначено оператори

$A_j' := \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I' \otimes A'}_{j} \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j+1}$ для $j \ge 1$, $A_0' := I'$, де I' – одиничний в X'.

Як відомо [13], оператор $\widehat{A}$ має вигляд

$$\widehat{A}F(x) = \sum_{n\in \mathrm{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} A_j' F_n' \right\rangle, \qquad x \in B$$

і є визначений на щільному в алгебрі W_π підпросторі $\mathcal{D}(\widehat{A}) = \left\{ F = \sum\limits_{n\in N} F_n \mid F_n' \in \mathcal{D}(A')^{\odot n} \right\}$.

За теоремою 1 із [13], якщо U_t – ізометрична однопараметрична C_0-група операторів на X, то C_0-група операторів

$$\mathrm{R} \ni \mathrm{t} \longmapsto \widehat{\mathrm{U}}_\mathrm{t} \in \mathcal{L}(\mathrm{W}_\pi(\mathrm{B}))$$

на W_π також ізометрична. За теоремою 2 із [12]], якщо U_t– ізометрична група операторів на рефлексивному банаховому просторі X, то (інфінітезимальний) генератор $\widehat{A}$ ізометричної групи $\widehat{U}_t$ на W_π є замкнений, його спектр $\sigma(\widehat{A})$ дійсний. З наведених результатів та означень випливає, що $\widehat{A}$ також еліптичний диференціальний оператор, його спектр є послідовністю власних чисел $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ з єдиною точкою скупчення на безмежності.

Означення 2. *Кореневим підпростором власного числа λ_j оператора $\widehat{A}$ називається*

$$R_W(\lambda_j) := \{F \in W_\pi(B_p) : (\lambda_j I - \widehat{A})^{r_j} F = 0\},$$

де r_j – індекс власного числа λ_j, тобто, найменше невід'ємне ціле число r, таке, що [3]

$(\lambda_j I - \widehat{A})^r F = 0$ *для довільного такого* F, *для якого*
$(\lambda_j I - \widehat{A})^{r+1} F \neq 0$.

За теоремою 1 із [14] для кожної $\varphi \in \mathcal{E}$ оператор

$$\widehat{\varphi}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n \in \mathrm{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} [\widehat{\varphi}(A)]'_j \, F'_n \right\rangle, \quad x \in B \tag{3.1}$$

належить до банахової алгебри $\mathcal{L}(W_\pi)$ всіх обмежених операторів на W_π, де

$$\widehat{\varphi}(A) = \int_{\mathrm{R}} U_t \varphi(t)\, dt, \tag{3.2}$$

$$[\widehat{\varphi}(A)]'_j := \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{j-1} \otimes [\widehat{\varphi}(A)]' \otimes \underbrace{I' \otimes \ldots \otimes I'}_{n-j+1},$$

$[\widehat{\varphi}(A)]'$ – спряжений до $\widehat{\varphi}(A) \in \mathcal{L}(X)$. Оператори $\widehat{\varphi}(A)$, $[\widehat{\varphi}(A)]'_j$ обмежені на X і $X'^{\odot n}_\pi$, відповідно.

Слідуючи [6], визначимо поповнення

$$\mathcal{E}(W_\pi) := \mathcal{E} \otimes_\pi W_\pi$$

тензорного добутку $\mathcal{E} \otimes W_\pi$ з проективною тензорною нормою. Кожний елемент $F \in \mathcal{E}(W_\pi)$ є W_π – значна ціла функція експоненціального типу

$$\mathrm{R} \ni \mathrm{t} \longmapsto \mathrm{F(x,t)} = \sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{Z}_+} \mathrm{F_j(x,t)} = \sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{Z}_+} \mathrm{F_j(x)} \otimes \varphi_{\mathrm{j}}(\mathrm{t}), \tag{3.3}$$

$F_j \in W_\pi$, $\varphi_j \in \mathcal{E}$, яка також є комплексною аналітичною функцією $x \in B$ для кожного фіксованого t, ці ряди абсолютно збігаються в $\mathcal{E}(W_\pi)$. Отже, визначені елементи

$$\widehat{F} := \sum_{j \in \mathrm{Z}^+} \widehat{\varphi}_j(\widehat{A}) F_j,$$

де $\widehat{\varphi}_j(\widehat{A})$ визначена формулою (3.2), $\widehat{F}$ не залежить від зображень вигляду (3.3). Підпростір

$$\widehat{\mathcal{E}}(W_\pi) := \left\{ \widehat{F} \colon F \in \mathcal{E}(W_\pi) \right\}$$

повний щодо норми, індукованої відображенням $\mathcal{E}(W_\pi) \ni F \longmapsto \widehat{F} \in \widehat{\mathcal{E}}(W_\pi)$ (див. лема 5 у [6]).

Визначимо згортку розподілу експоненціального типу $g \in \mathcal{E}'$ і W_π – значної цілої функції експоненціального типу $F \in \mathcal{E}(W_\pi)$, поданої за допомогою ряду (3.3):

$$(F * g)(x,t) = \sum_{j \in \mathrm{N}} F_j(x) \otimes (g * \varphi_j)(t), \quad x \in B, \quad t \in \mathrm{R},$$

де $g * \varphi$ – згортка $g \in \mathcal{E}'$ і цілої комплексної функції експоненціального типу $\varphi \in \mathcal{E}$. Підпростір $\widehat{\mathcal{E}}(W_\pi)$ інваріантний щодо кожного оператора $K_g F := F * g$ із $g \in \mathcal{E}'$ (див. лема 6 у [6]).

Як у [1], введемо простір функцій

$$\mathcal{E}_m := \left\{ \rho \in \mathcal{E} \,\Big|\, \widehat{\rho}|_{[-m,m]} = 1 \right\}, \quad m \in \mathrm{N},$$

спектральний підпростір оператора $\widehat{A}$

$$S^W{}_m := \left\{ F \in W_\pi(B_p) \,\Big|\, \widehat{\rho}(\widehat{A})F = F, \quad \rho \in \mathcal{E}_m \right\},$$

де оператор $\widehat{\rho}(\widehat{A})$ визначений формулою (3.2) для $\varphi = \rho$, а саме:

$$\widehat{\varrho}(\widehat{A})F(x) = \sum_{n \in \mathrm{Z}_+} \left\langle x^{\odot n} \,\Big|\, \sum_{j=0}^{n} [\widehat{\varrho}(A)]'_j \, F'_n \right\rangle, x \in B(L_p(\Omega)).$$

З результатів [1] одержуємо, що підпростори $S^W{}_m$ є замкненими та задовольняють умову $S^W{}_m \subset \subset S^W{}_{m+1}$. За теоремою 1 із [14] $\widehat{(D\varrho)}(\widehat{A}) = \widehat{A} \circ \widehat{\varrho}(\widehat{A})$, а для кожного $F \in S^W_m$ маємо $\widehat{(D\varrho)}(\widehat{A})F = \widehat{A} \circ \widehat{\varrho}(\widehat{A})F$. Тому $\widehat{S}^W_m \subset \mathcal{D}(\widehat{A})$.

З результатів [1] також одержуємо, що оператор $\widehat{A}$ на $S^W{}_m$ обмежений і є генератором рівномірно обмеженої сильно неперервної групи, тому об'єднання $\bigcup_m S^W{}_m$ є щільним в $L_p(\Omega)$.

У [20] показано, що спектральні підпростори регулярного еліптичного оператора співпадають з прямою сумою його кореневих підпросторів:

$$S^W{}_m = \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j).$$

У [14] для кожної $g \in \mathcal{E}'$ визначено лінійний оператор $\widehat{g}(\widehat{A})$:

$$\widehat{\mathcal{E}}(W_\pi) \ni \widehat{F} = \sum_{j \in \mathrm{Z}^+} \widehat{\varphi}_j(\widehat{A}) F_j \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F} :=$$

$$= \sum_{j \in \mathrm{Z}^+} \widehat{(g \star \varphi_j)}(\widehat{A}) F_j \in \widehat{\mathcal{E}}(W_\pi), \tag{3.4}$$

де φ_j взяті із зображення (3.3) функції $F \in W_\pi$ та доведено, що відображення

$$\widehat{\mathcal{E}'} \ni \widehat{g} \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}\left[\widehat{\mathcal{E}}(W_\pi)\right]$$

є неперервним гомоморфізмом алгебри $\widehat{\mathcal{E}'}$ на $\mathcal{L}\left[\widehat{\mathcal{E}}(W_\pi)\right]$.

Нехай $\mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j))$ – банахова алгебра обмежених лінійних операторів над $\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j)$ з одиничним оператором I.

Теорема 1. *За припущення 1 для довільних* $m \in \mathrm{N}$, $\rho \in \mathcal{E}_m$, *узагальненої функції* $g \in \mathcal{E}'$

$$\widehat{g}(\widehat{A}) : \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j) \ni F \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \widehat{(g * \rho)}(\widehat{A})F \in \bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j).$$

Крім цього,

$$\widehat{g}(\widehat{A})\,|_{\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j)} \in \mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j| \le m} R_W(\lambda_j)).$$

□ *Доведення.* З формули (3.4) для кожної $\widehat{F}=\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}\widehat{\varphi}_j(\widehat{A})F_j\in\widehat{\mathcal{E}}(W_\pi)$ отримуємо

$$\widehat{(g*\rho)}(\widehat{A})\widehat{F}=\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}((g*\widehat{\rho)*}\varphi_j)(\widehat{A})F_j=$$

$$=\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}(g*\widehat{(\rho*\varphi_j)})(\widehat{A})F_j=$$

$$=\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}\widehat{g}(\widehat{A})\widehat{(\rho*\varphi_j)}(\widehat{A})F_j=\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}\widehat{g}(\widehat{A})\widehat{\rho}(\widehat{A})\widehat{\varphi_j}(\widehat{A})F_j.$$

Оскільки $\varphi_j\in\mathcal{E}$, за теоремою 1 із [14] $\widehat{\varphi_j}(\widehat{A})\in\mathcal{L}(W_\pi)$, то для кожного $F_j\in W_\pi(B_p)$ та кожної $\rho\in\mathcal{E}_m$ функція $\widehat{\varphi_j}(\widehat{A})F_j\in W_\pi(B_p)$, а для $F_j\in {S^W}_m(W_\pi)$ матимемо $\widehat{\rho}(\widehat{A})\widehat{\varphi_j}(\widehat{A})F_j=\widehat{\varphi_j}(\widehat{A})F_j$. Зауважимо, що при $F_j\in {S^W}_m(W_\pi)$ також $\widehat{F}=\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}\widehat{\varphi}_j(\widehat{A})F_j\in$ $\in {S^W}_m(W_\pi)$.

Тепер із попередніх перетворень одержуємо

$$\widehat{(g*\rho)}(\widehat{A})\widehat{F}=\widehat{g}(\widehat{A})\sum_{j\in\mathrm{Z}^+}\widehat{\varphi}_j(\widehat{A})F_j=\widehat{g}(\widehat{A})\widehat{F}$$

для кожної $\widehat{F}\in {S^W}_m$. Підставляючи $\widehat{F}(x,t)=F(x)\otimes\rho(t)$ при $F\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)$, $\rho\in S_m^W(W_\pi)$ у формулу (3.4), матимемо

$$\widehat{g}(\widehat{A})(F(x)\otimes\rho(t))=\widehat{(g*\rho)}(\widehat{A})F\quad\forall F\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j).\tag{3.5}$$

А згідно з формулою (3.2) для функції $\varphi=g*\rho$, одержуємо

$$\widehat{(g*\rho)}(\widehat{A})F(x)=\sum_{n\in\mathrm{Z}_+}\left\langle x^{\odot n}\;\Big|\;\sum_{j=0}^{n}\left[\widehat{(g*\rho)}(A)\right]_j^{\prime}F_n^{\prime}\right\rangle,$$

$x\in B(L_p(\Omega))$ і

$$\|\widehat{(g*\rho)}(\widehat{A})F(x)\|\le\sum_{n\in\mathrm{Z}_+}\sum_{j=0}^{n}\|F_n'\|\|x\|^n\|\left[\widehat{(g*\rho)}(A_j)\right]^{\prime}\|=$$

$$=\sum_{n\in\mathrm{Z}_+}n\|F_n\|\|x\|^n\int_{-\infty}^{\infty}\|U_t'\|\,|(g*\rho)(t)|\,dt\le$$

$$\le\sum_{n\in\mathrm{Z}_+}n\|F_n\|\|x\|^n\|U_t\|\|(g*\rho)\|_{L_1}.$$

Згідно з формулою із [21],

$$\sum_{n\in\mathrm{Z}_+}n\|F_n\|\|x\|^n=\frac{d}{d\|x\|}\sum_{n\in\mathrm{Z}_+}\|F_n\|\|x\|^n:=F^{(1)}(x).$$

Отже, із наведених оцінок та формули (3.5) одержуємо, що для кожної $F\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)$

$$\|\widehat{g}(\widehat{A})F(x)\|\le F^{(1)}(x)\|U_t\|\|g*\rho\|_{L_1}\le F^{(1)}(x)\|g*\rho\|_{L_1},$$

а отже, $\widehat{g}(\widehat{A})_{|\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)}\in\mathcal{L}(\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j))$. Теорему доведено. ■

Визначимо простір абсолютно збіжних рядів

$$l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j);W_\pi(B_p)\Big]:=$$

$$=\Big\{F=\sum_{m=1}^{\infty}F^{<m>}\in W_\pi(B_p)\Big|\,F^{<m>}\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j);$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|F^{<m>}\|<\infty\Big\}$$

з нормою $\|F\|_{l_1}:=\inf\sum\limits_{m=1}^{\infty}\|F^{<m>}\|$, де inf береться по всіх зображеннях F у вигляді такого ряду $F=\sum\limits_{m=1}^{\infty}F^{<m>}$.

Лема 1. *Простір* $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j);W_\pi(B_p)\Big]$ *ізометричний простору* $W_\pi(B_p)$.

□ *Доведення.* Ця лема є поширенням леми 2 із [8] на оператори на алгебрах Вінера і доводиться за такою ж схемою, враховуючи, що оператор $\widehat{A}$ замкнений [13].

Введемо допоміжний простір

$$l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)\Big]:=\Big\{F=(F^{<m>})_{m=1}^{\infty}\Big|$$

$$F^{<m>}\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j),$$

$$\|F\|_l=\sum_{m=1}^{\infty}\|F^{<m>}\|<\infty\Big\}.$$

Сильно спряжений простір до $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)\Big]$ має вигляд

$$l_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)'\Big]:=\Big\{y=(y_m)_{m=1}^{\infty}\Big|$$

$$y_m\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)',\quad\|y\|_\infty<\infty\Big\},$$

де $\|y\|_\infty:=\sup\limits_{m\ge1}\|y_m\|$ – його норма, простір $\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)'$ – спряжений простір до $\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)$ з нормою

$$\|y_m\|=\sup_{\|F^{<m>}\|\le1}|\langle F^{<m>},y_m\rangle|,$$

де $F^{<m>}\in\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)$.

Лема 2. *Сильно спряжений простір до* $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)\Big]$ *ізометричний простору*

$$l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)'\Big]=$$

$$=\Big\{y=(y_m)_{m=1}^{\infty}\in l_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m}R_W(\lambda_j)'\Big]\Big|$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\langle F^{<m>},y_m\rangle=0\qquad\forall\sum_{m=1}^{\infty}F^{<m>}=0\Big\}.$$

$\square$ *Доведення.* Ця лема є поширенням леми 4 із [8] на оператори на алгебрах типу Вінера і доводиться за такою ж схемою.

Нехай топологія в підпросторі

$$R_W(\widehat{A}) = \bigcup_m \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)$$

індукується з простору $L_p(\Omega)$ і в алгебрі $\mathcal{L}(R_W(\widehat{A}))$ задана сильна операторна топологія.

Теорема 2. *За припущення 1 відображення*

$$\widehat{\mathcal{E}}' \ni \widehat{g} \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}(R_W(\widehat{A}))$$

здійснює неперервний гомоморфізм алгебри $\widehat{\mathcal{E}}'$ в алгебру $\mathcal{L}(R_W(\widehat{A}))$, при цьому

$$\widehat{(D^k g)}(\widehat{A}) = \widehat{A}^k \circ \widehat{g}(\widehat{A}).$$

Оператори $\widehat{g}(\widehat{A})$ над простором $W_\pi(B_p)$ допускають замикання з областю визначення

$$\Big\{F = \sum_{m=1}^{\infty} F^{<m>} \in W_\pi(B_p)\Big|\ F^{<m>} \in \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j),$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \|\widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}\| < \infty\Big\}.$$

$\square$ *Доведення.* Використовуємо міркування з [7–9]. Оскільки $\mathcal{E}_m \subset \mathcal{E}$, то звідси випливає, що оператор $\widehat{g}(\widehat{A})$ є звуженням такого ж оператора з теореми 2 у [14]. За теоремою 1 відображення

$$\widehat{\mathcal{E}}' \ni \widehat{g} \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A}) \in \mathcal{L}(R_W(\widehat{A}))$$

є гомоморфізмом алгебри $\widehat{\mathcal{E}}'$ в алгебру $\mathcal{L}(R(\widehat{A}))$ та виконується диференціальна властивість.

Перевіримо неперервність відображення

$$\mathcal{E}' \ni g \longrightarrow \widehat{g}(\widehat{A})F \in W_\pi(B_p).$$

Повторюючи оцінки при доведенні теореми 1, для кожного $F \in R_W(\widehat{A})$ одержимо

$$\|\widehat{g}_1(\widehat{A})F - \widehat{g}_2(\widehat{A})F\| \le F^{(1)}(x)\|(g_1 - g_2) * \rho\|_{L_1} \to 0$$

при $g_1 \to g_2$ в просторі $\mathcal{E}'$.

Доведемо існування замикання оператора $\widehat{g}(\widehat{A})$ над простором $L_p(\Omega)$.

З лем 1, 2 випливає, що для будь-якого функціоналу $y \in W'_\pi(L_p(\Omega))$ послідовність його звужень $y_m = y\ |_{\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)}$ визначає елемент простору $l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$ і відображення

$$W'_\pi(L_p(\Omega)) \ni y \to (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$$

здійснює ізометричний ізоморфізм просторів, тобто виконується рівність $\|y\| = \sup\limits_{m\ge 1} \|y_m\|$.

Доведемо тепер існування замикання функцій від оператора. Підпростір $l_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$ фінітних послідовностей слабко щільний у $l_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$. Тому підпростір

$$l^0_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big] :=$$

$$= l_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big] \bigcap l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$$

слабко щільний у $l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$. Двоїстість

$$\Big\langle l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j);\ L_p(\Omega)\Big],\ l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]\Big\rangle$$

реалізується білінійною формою
$\langle F\,,\ y\rangle = \sum\limits_{m=1}^{\infty} \langle F^{<m>}\,,\ y_m\rangle$, де

$$F = \sum_{m=1}^{\infty} F^{<m>} \in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j); W_\pi(B_p)\Big],$$

$$y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$$

і білінійні форми $\langle F^{<m>}\,,\ y_m\rangle$ відповідають дуальним парам

$$\Big\langle \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)\,,\ \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big\rangle.$$

Підпростір $l^0_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$ лежить в області визначення спряженого оператора $\widehat{g}(\widehat{A})'$ до оператора $\widehat{g}(\widehat{A})$ відносно двоїстості

$$\Big\langle l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j); W_\pi(B_p)\Big],\ l^0_\infty\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]\Big\rangle.$$

Справді, кожна послідовність $y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in$ $\in l^0_{fin}\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$ із j ненульовими членами визначає функціонал вигляду

$$\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j) \ni F^{<m>} \to \langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}\,,\ y_m\rangle =$$

$$= \langle F^{<m>}\,,\ \widehat{g}(\widehat{A})' y_m\rangle$$

відносно двоїстості

$$\Big\langle \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)\,,\ \bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big\rangle.$$

Тому досить показати, що цей функціонал має неперервне розширення на простір абсолютно збіжних рядів $l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j); W_\pi(B_p)\Big]$.

Для довільного елемента $F = \sum\limits_{m=1}^{\infty} F^{<m>} \in$ $\in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j); W_\pi(B_p)\Big]$ правильна нерівність

$$\Big|\sum_{m=1}^{j}\langle F^{<m>}, \widehat{g}(\widehat{A})' y_m\rangle\Big| \le$$

$$\le \Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|F^{<m>}\|\Big)\sup_{1\le m\le j}\|\widehat{g}(\widehat{A})' y_m\| =$$

$$= \Big(\sum_{m=1}^{\infty}\|F^{<m>}\|\Big)\|\widehat{g}(\widehat{A})' y\|,$$

тому функціонал

$$\langle F, \widehat{g}(\widehat{A})' y\rangle = \sum_{m=1}^{j}\langle F^{<m>}, \widehat{g}(\widehat{A})' y_m\rangle$$

задовольняє нерівність

$$|\langle F, \widehat{g}(\widehat{A})' y\rangle| \le \Big(\inf\sum_{m=1}^{\infty}\|F^{<m>}\|\Big)\|\widehat{g}(\widehat{A})' y\| =$$

$$= \|F\|_{l_1}\|\widehat{g}(\widehat{A})' y\|.$$

Функціонал $\langle F, \widehat{g}(\widehat{A})' y\rangle$ є шуканим розширенням, яке визначає спряжений оператор $\widehat{g}(\widehat{A})'$.

Відомо ([17], гл.IV, п.7), що замикання $\overline{\widehat{g}(\widehat{A})}$ оператора $\widehat{g}(\widehat{A})$ існує і співпадає із його другим спряженим, якщо область визначення спряженого оператора слабко щільна у спряженому просторі. Отже, існування замикання оператора $\widehat{g}(\widehat{A})$ доведено.

Область визначення замикання $\overline{\widehat{g}(\widehat{A})}$, як другого спряженого до $\widehat{g}(\widehat{A})$, має вигляд

$$\Big\{F = \sum_{m=1}^{\infty} F^{<m>} \in l_1\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j); W_\pi(B_p)\Big] \Big|$$

$$\Big|\sum_{m=1}^{\infty}\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y_m\rangle\Big| \le C\|y\|$$

$$\forall y \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]\Big\},$$

де стала C визначається F і не залежить від y.

Позначимо $y_m = y\ \big|_{\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)}$. Якщо ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y_m\rangle$ збіжний для будь-якого $y \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$, то він збіжний абсолютно, тобто збігаються ряди $\sum\limits_{m=1}^{\infty}\big|\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y_m\rangle\big|$ для всіх таких y.

Справді, для цього досить взяти $y'_m = e^{-i\theta(m)} y_m$, де $\theta(m)$ – аргумент комплексного числа $\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y_m\rangle$. Тоді $\|y'_m\| = \|y_m\|$ і $y' = (y'_m) \in$ $\in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$.

З іншого боку, $\Big|\sum\limits_{m=1}^{\infty}\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y_m\rangle\Big| \le$ $\le \sum\limits_{m=1}^{\infty}\big|\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y_m\rangle\big| < \infty$.

Використаємо довільність $y' = (y'_m) \in l_\infty^0\Big[\bigoplus_{|\lambda_j|\le m} R_W(\lambda_j)'\Big]$. Для кожного m знайдеться вектор y'_m такий, що $\|y'_m\| = 1$ і $\|\widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}\| = \big|\langle \widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}, y'_m\rangle\big|$. Тому для всіх F з області визначення оператора $\overline{\widehat{F}(\widehat{A})}$ збігаються ряди

$$\sum_{m=1}^{\infty}\|\widehat{g}(\widehat{A})F^{<m>}\|.$$

Навпаки очевидно. Теорему доведено. ■

Висновки

Встановлено, що функціональне числення Хілле–Філліпса–Балакрішнана існує над просторами кореневих векторів еліптичного оператора на алгебрі типу Вінера функцій нескінченної кількості змінних.

Література

[1] *Любич Ю. И.* Об операторах с отделимым спектром / Ю. И. Любич, В. И. Мацаев // Матем. сборник. 1962. – Т. 56(98), №4 – С. 433–468.

[2] *Радыно Я. В.* Векторы экспоненциального типа в операторном исчислении и дифференциальных уравнениях // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 9. – С. 1559–1569.

[3] *Хилле Э.* Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. – М.: ИЛ, 1962. – 830 с.

[4] *Balakrishnan A.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them / A. Balakrishnan // Pacific J. Math. – 1960. – V. 10, № 2. – P. 419–439.

[5] *Baeumer B.* Unbounded functional calculas for bounded groups with applications / B. Baeumer, M. Haase and M. Kovcs // J. Evol. Eqn. – 2009. – V. 9. – P. 171–195.

[6] *Лозинська В. Я.* Аналітичні розподіли експоненціального типу / В. Я. Лозинська, О. В. Лопушанський // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – Т. 42, №4 – С. 46–55.

[7] *Lopushansky O.* Operator calculus on the exponential type vectors of the operator with point spectrum / O. Lopushansky, M. Dmytryshyn / In "General Topology in Banach Spaces Nova Sci. Publ. Huntingon, New York, 2001. – P. 137–145.

[8] *Лозинська В. Я.* Розподіли експоненціального типу і функціональне числення / В. Я. Лозинська, О. М. М'яус // Мат. методи та фіз.-мат. поля. – 2004. – Т. 47, № 2. – С. 44–49.

[9] *Лозинська В. Я.* Функціональне числення для регулярних еліптичних диференціальних операторів / В. Я. Лозинська, О. М. М'яус // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 68. – С. 171–178.

[10] *Berezanski Yu. M.* Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis / Yu. M. Berezanski, Yu. G. Kondratiev. – Kluwer Acad. Publ.: Dordrecht, 1995.

[11] Lopushansky O. Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables / O. Lopushansky, A. Zagorodnyuk // Annales Polonici Mathematici. – 2003. – Vol. 81, No. 2. – P. 111–122.

[12] *Bednarz A. Lopushansky O.* Exponential Type Vectors of Isometric Group Generators / A. Bednarz, O. Lopushansky // Matematychni Studii (Proceedings of the Lviv Mathematical Society). – 2002. – Vol. 18, No. 1.– P. 99–106.

[13] *Bednarz A.* Exponential Type Vectors in Wiener algebras on a Banach ball / A. Bednarz // Opuscula Matematica. – 2008. – Vol. 28, No. 1. – P. 5–17.

[14] *Myaus O.* Functional calculus on a Wiener type algebra of analytic functions of infinite many variables / O. Myaus // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2012. – Вип. 76. – С. 231–237.

[15] *Grotendieck A.* Products tensoriel topologues et espases nucleaire / A. Grotendieck // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – V. 16, №2. – P. 1–140.

[16] *Grothendieck A.* Résumé de la théorie métrique des products tensorels topologiques / A. Grotendieck // Bol. Soc Math São Paulo. – 1953. – 8. – P. 1–79.

[17] *Шефер Г.* Топологические векторные пространства / Шефер Г. – М.: Мир, 1971. – 359 с.

[18] *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces / S. Dineen. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1998.

[19] *Lopushansky A.* Sectorial operators on Wiener algebras of analytic functions / A. Lopushansky // Topology. – 2009. – **48**(2–4). – P. 105–110.

[20] *Lopushansky O.* Vectors of exponential type of operators with discrete spectrum / O. Lopushansky, M. Dmytryshyn // Matematychni Studii (Proceedings of the Lviv Mathematical Society). – 1998. – Vol. 9, № 1. – P. 70–77.

[21] *Прудников А. П.* Интегралы и ряды / Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА АЛГЕБРАХ ТИПА ВИНЕРА

Мяус О. М.

Национальный университет "Львивська политэхника"
ул. С. Бандеры, 12, 79013, Львов, Украина

Построено функциональное исчисление над пространствами корневых векторов регулярных эллиптических дифференциальных операторов на алгебрах типа Винера ограниченных аналитических функций бесконечного числа переменных.

Ключевые слова: генератор группы, функциональное исчисление, обобщенная функция, нормальная эллиптическая краевая задача.

2000 MSC: 35K55

УДК: 517.98

FUNCTIONAL CALCULUS FOR REGULAR ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS ON WIENER TYPE ALGEBRAS

Myaus O. M.

Lviv Polytechnic National University
12, S.Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The functional calculus on spaces of the root vectors of regular elliptic differential operators on Wiener algebras of functions of infinite numbers of variables are described.

Key words: generator of group, functional calculus, normal elliptic boundary value problem, generalized function.

2000 MSC: 2000: 35K55

UDK: 517.98