ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 91–96

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 91–96

ПІДСУМОВУВАННЯ МЕТОДОМ ВЕЙЄРШТРАССА–ГАУССА РОЗБІЖНИХ РЯДІВ

Сухорольський М. А., Івасик Г. В., Кшановський І. П.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 8 жовтня 2014 р.)

Досліджено підсумовування розбіжних степеневих рядів методом Вейєрштрасса–Гаусса, в основі якого лежить оператор усереднення з ядерною функцією Гаусса. Показано, що степеневий ряд мероморфної функції можна підсумувати цим методом за межею круга збіжності. Отримано формулу для логарифмічних похідних функцій, мероморфних у симетричному кільці.

Ключові слова: мероморфна функція, логарифмічна похідна.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.5

Вступ

Методи підсумовування розбіжних числових та функціональних рядів достатньо широко викладено у роботах [3, 5, 6]. У роботах [1, 4] розвинуто методи підсумовування розбіжних тригонометричних рядів, що ґрунтуються на математичному апараті інтегральних операторів усереднення.

У роботі досліджено підсумовування розбіжних степеневих рядів методом Вейєрштрасса-Гаусса, в основі якого лежить оператор усереднення з ядерною функцію Гаусса. Показано, що степеневий ряд мероморфної функції може бути підсумований цим методом за межею круга збіжності.

Наведемо основні властивості операторів усереднення [1], які подано відповідно до термінів та позначень цієї роботи.

Теорема 1. *Нехай функція $f(x)$ така, що $f(x)(1+|x|)^{-\lambda} \in L^1(E)$ – функція, інтегровна за Лебегом, де $\lambda{>}1$; $E{=}\{x:\ |x|{<}\infty\}$, і $\omega(x){\in}L^1(E)$ – функція, що задовольняє умови*

$$|\omega(x)|(1+|x|)^{\lambda} \le M < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\, dx = 1. \quad (1)$$

Тоді у кожній точці неперервності функції $f(x)$ справджується рівність

$$f(x) = \lim_{\sigma\to+0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sigma}\omega\left(\frac{t-x}{\sigma}\right) dt, \quad (2)$$

де $\{\sigma\}$ – додатна числова множина з точкою згущення $\sigma=0$.

Нерівність в (1) виконується автоматично у випадку фінітної функції $\omega(x)$.

Розглянемо тригонометричний ряд періодичної функції $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (3)$$

де $a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$; $b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$.

Застосовуючи оператор усереднення до функції $f(x)$ і розвиваючи його у ряд за фіксованого значення $\sigma \ne 0$, матимемо ряд (інтегрального перетворення функції)

$$f_\sigma(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{\sigma}\omega\left(\frac{t-x}{\sigma}\right) dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\sigma)(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (4)$$

де $\varphi_n(\sigma) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(x)\cos(\sigma n x)\, dx$.

Якщо виконуються умови теореми 1, то у кожній точці неперервності функції $f(x)$ справджується гранична рівність (2), яка з урахуванням (4) набуде вигляду

$$f(x) = \lim_{\sigma\to+0}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(\sigma)(a_n\cos nx + b_n \sin nx)\right]. \quad (5)$$

Рівність (5) визначає узагальнену суму, а послідовність $\{\varphi_n(\sigma)\}$ при $\sigma \to +0$ – метод підсумовування ряду (3).

Чільне місце у математичному аналізі займають метод Пуассона–Абеля $\{\varphi_n(\sigma) = \rho^n\}$ з ядром оператора усереднення $\omega(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, де $\rho = e^{-\sigma}$, $\rho \to 1-0$, і метод Вейєрштрасса–Гаусса $\left\{\varphi_n(\sigma) = \rho^{n^2}\right\}$ з ядром $\omega(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4}\right)$, де $\rho = e^{-\sigma^2}$, $\rho \to 1-0$. Ядерні функції цих методів нескінченно диференційовні функції і задовольняють умови (1).

Справедлива аналогічна (5) гранична рівність для похідної функції, наприклад, у випадку операторів усереднення Пуассона–Абеля і Вейєрштрасса–Гаусса.

Теорема 2. *Якщо періодична функція $f(x) \in L^1[-\pi;\pi]$ має в точці x похідну k-го порядку, то справджується рівність*

$$f^{(k)}(x) = \lim_{\sigma\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\omega\left(\frac{t-x}{\sigma}\right)dt =$$

$$= \lim_{\rho\to1-0}\left\{\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n^\nu}n^k\left[a_n\cos\left(nx+\frac{k\pi}{2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+b_n\sin\left(nx+\frac{k\pi}{2}\right)\right]\right\},$$

де $\nu=1$ або $\nu=2$.

Ввівши узагальнену частинну суму ряду (4), рівність (5) можна записати у вигляді подвійної граничної рівності. Для випадку наведених підсумовувальних послідовностей вона має вигляд

$$f(x)=\lim_{\rho\to1-0}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\rho^{n^\nu}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right].$$

Тоді, $f(x)$ – узагальнена сума ряду (3) у точці x, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ існують номер N і число ρ_N таке, що $\lim\limits_{N\to\infty}\rho_N=1$, що для всіх $n\ge N$ $\rho=\rho_N$ справджуються нерівність

$$\left|f(x)-\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\rho_N^{k^\nu}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\right]\right|\le\varepsilon. \tag{6}$$

I. Підсумовування степеневих рядів

Нехай

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n \tag{7}$$

– степеневий ряд аналітичної функції $f(z)$, збіжний у крузі $|z|<R$, $0<R<\infty$. Тоді $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}=1/R$, оскільки множина комплексних чисел $\{A_n=f^{(n)}(0)/n!\}$ може мати декілька точок згущення.

Коефіцієнти ряду (7), внаслідок граничного співвідношення для радіуса збіжності, мають для великих значень номера n асимптотичну оцінку $|A_n| = O(n^m/R^n)$, де $|m|<\infty$.

Розглянемо питання підсумовування методом Вейєрштрасса–Гаусса степеневого ряду (7) за межею круга збіжності. Зауважимо, що степеневий ряд не можна підсумувати методом Пуассона–Абеля ззовні круга збіжності $|z|>R$, оскільки необхідна умова збіжності ряду інтегрального перетворення (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\rho^n|c_n||z|^n=0$, визначає значення $\rho<1$, і граничний перехід при $\rho\to1-0$ неможливий.

Розглянемо на прикладі підсумовування ряду (7) методом Пуассона–Абеля на межі круга збіжності, $|z|=R$. Функція

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1-r\cos\psi}{1+r^2-2r\cos\psi}+i\frac{r\sin\psi}{1+r^2-2r\cos\psi}$$

має полюс у точці $z=1$. Запишемо її ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}r^n\cos n\psi+i\sum_{n=1}^{\infty}r^n\sin n\psi,\ \ |z|<1.$$

На одиничному колі L (границі круга збіжності) ряд розбігається (в класичному розумінні суми) і має вигляд

$$f\left(e^{i\psi}\right)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\cos n\psi+i\sum_{n=1}^{\infty}\sin n\psi. \tag{8}$$

У точках $z=e^{i\psi}\in L$, $\psi\ne0$, ряд (8) має узагальнену суму, яка за методом Пуассона-Абеля визначається

$$f\left(e^{i\psi}\right)=\lim_{\rho\to1-0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\cos n\psi+i\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\sin n\psi\right)$$

$$=\lim_{\rho\to1-0}\frac{1}{1-\rho e^{i\psi}}=\frac{1}{1-e^{i\psi}}.$$

За теоремою 2 можна також підсумувати цим методом у точках кола L, крім точки $z=1$, ряд будь-якої похідної від функції $f(z)$

$$f^{(k)}(z)=\frac{k!}{(1-z)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}z^n,\ \ |z|<1,$$

$$f^{(k)}\left(e^{i\psi}\right)=\lim_{\rho\to1-0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}\rho^n\cos n\psi+\right.$$

$$\left.+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+k)!}{n!}\rho^n\sin n\psi\right)=\frac{k!}{\left(1-e^{i\psi}\right)^k},\psi\ne0.$$

Метод Вейєрштрасса–Гаусса є потужнішим (у розумінні підсумовування розбіжних рядів з вищим порядком зростання коефіцієнтів), ніж метод Пуассона–Абеля.

Перетворимо ряд (7) з урахуванням подання $z=re^{i\psi}=r(\cos\psi+i\sin\psi)$, $-\pi<\psi\le\pi$, $0\le r<R$, і позначення $A_n^*=c_nn^mR^n$:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nr^ne^{in\psi}=$$

$$c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_n^*n^m\left(\frac{r}{R}\right)^n\cos n\psi+i\sum_{n=1}^{N}c_n^*n^m\left(\frac{r}{R}\right)^n\sin n\psi. \tag{9}$$

Тут $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n^*|} = 1$ і вважаємо, що у деякій точці $z_0 = R\cdot e^{\psi_0}$ границі круга збіжності, яка не є особливою точкою функції $f(z)$, збіжним (у класичному розумінні суми) є ряд

$$f^*(\psi_0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^*(\cos n\psi_0 + i\sin n\psi_0.) \qquad (10)$$

Спочатку розглянемо допоміжне твердження.

Лема. *Для аналітичної в одиничному крузі* $|z| < 1$ *функції* $f(z) = \ln(1-z)$, $\ln 1 = 0$, *і її похідних у точках одиничного кола* $L = \left\{z = e^{i\psi_0} : -\pi < \psi_0 \le \pi\right\}$, *крім точки* $z = 1$, *виконуються граничні рівності*

$$\ln(1-z) =$$

$$= \lim_{\sigma\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1-e^{i\psi}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left[-\left(\frac{\psi-\psi_0}{2\sigma}\right)^2\right]d\psi =$$

$$= -\lim_{\rho\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n^2}\frac{1}{n}z^n, \qquad (11)$$

$$\frac{(k-1)\,!}{(1-z)^k} =$$

$$= \lim_{\sigma\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1-e^{i\psi}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\frac{\partial^k}{\partial\psi^k}\exp\left[-\left(\frac{\psi-\psi_0}{2\sigma}\right)^2\right]d\psi =$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n^2}\frac{(n+k-1)\,!}{n\,!}\,z^n.$$

Доведення. Покажемо, що існує інтеграл від функції $f(z)$ по колу L

$$\int_{|z|=1}\ln(1-z)\,dz = \lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}}\int_{-\delta_1}^{\delta_2}\ln\left(1-e^{i\psi}\right)de^{i\psi} =$$

$$= \lim_{\substack{\delta_1\to 0\\ \delta_2\to 0}}\left[\left(e^{i\psi}-1\right)\ln\left(1-e^{i\psi}\right)-e^{i\psi}\right]_{-\delta_1}^{\delta_2} = 0.$$

Отже, функція $f(z)$ інтегровна на колі L. Тоді виконуються умови теореми 1 і справедлива перша рівність (11). За інтегровності функції $f(z)$ на колі L виконуються умови теореми 2 і для похідних від цієї функції справедлива інша формула (11) в усіх точках, крім точки $z = 1$.

Теорема 3. *Нехай* $f(z)$ *– мероморфна функція, аналітична в крузі* $|z| < R$, $0 < R < \infty$ і *аналітична на множині* $E_0 = \left\{z = re^{i\psi} : R \le r < r_1\right\}$, *що лежить на промені* $\arg z = \psi$. *Тут* $R\cdot e^{i\psi} = z_0$ *– точка, що лежить на границі круга,* $r_1 e^{i\psi} = z_1$ *– перша особлива точка функції на цьому промені, або* $z_1 = \infty$, *якщо особливих точок на промені немає. Тоді справедлива така формула:*

$$f(z) = \lim_{\rho\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n^2}c_n z^n, z\in E_0. \qquad (12)$$

Доведення. Згідно з означенням, функція називається мероморфною, якщо в кожній обмеженій частині площини вона аналітична, хіба-що, за винятком скінченного числа полюсів. Вважаємо, що точка $z = re^{i\psi} \in E_0$ і застосуємо до функції $f(z) = f\left(re^{i\psi}\right)$ за кутовою координатою оператор усереднення з ядром Гаусса

$$S_\sigma\left(re^{i\psi}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(re^{it}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(t-\psi)^2}{4\sigma^2}\right)dt. \quad (13)$$

Оскільки функція $f(z)$ має тільки полюси, її вираз на колі $|z| = r$ за фіксованого значення $r = \left|z^0\right|$ може мати тільки сингулярності вигляду $\left(z - z^0\right)^{-k}$. Тому за теоремою 2 та доведеною лемою у формулі (13) можливе інтегрування і граничний перехід при $\sigma \to 0$ $(z \ne z^0)$. Розвинемо функцію $S_\sigma\left(re^{i\psi}\right)$, $\sigma \ne 0$, у ряд за степенями змінної r і перетворимо її з урахуванням позначень, прийнятих в (9) і (10)

$$S_\sigma\left(re^{i\psi}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}r^n\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,nt}\exp\left(-\frac{(t-\psi)^2}{4\sigma^2}\right)dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}r^n e^{i\,n\psi}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\,n\sigma u}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)du =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n^2}\frac{f^{(n)}(0)}{n\,!}r^n e^{i\,n\psi} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n^2}c_n r^n e^{i\,n\psi} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}n^m\left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n c_n^* e^{i\,n\psi}, \quad (14)$$

де $\rho = e^{-\sigma^2}$.

Покажемо, що ряд в (14) за умови $0 < \rho < 1$ збігається у будь-якій скінченній площині. Дійсно,

$$\frac{1}{R'} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n^m\left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n c_n^*} = \left(\frac{r}{R}\right)\overline{\lim_{n\to\infty}}\rho^n\sqrt[n]{c_n^*} =$$

$$= \left(\frac{r}{R}\right)\lim_{n\to\infty}\rho^n = 0$$

і, відповідно, $R' = \infty$.

Отже, для точок множини E_0 за умови $\sigma \ne 0$ справедлива формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(re^{it}\right)\frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{t-\psi}{4\sigma^2}\right)dt =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}n^m\left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n c_n^* e^{i\,n\psi}. \qquad (15)$$

Перетворимо за Абелем [2] ряд у формулі (15)

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}n^m\left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n c_n^* e^{i\,n\psi} =$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n^m \left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n [G_n(\psi) - G_{n-1}(\psi)] =$$

$$= \left(1 - \frac{r}{R}\rho\right) c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^m \left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n - \right.$$

$$\left. - (n+1)^m \left(\frac{r}{R}\rho^{n+1}\right)^{n+1} \right] G_n(\psi), \qquad (16)$$

де $G_0 = c_0 = c_0^*$, $G_n(\psi) = \sum_{k=0}^{n} c_k^* e^{i k\psi}$ – частинна сума ряду (10). Ряд (10) збігається і, тому, послідовність $\{G_n(\psi)\}$ обмежена:

$$|G_n(\psi)| \le A < \infty. \qquad (17)$$

Перейдемо до границі у формулі (15) при $\rho \to 1-0$. За теоремою 2 граничний перехід у лівій частині формули (15) можливий, оскільки кожна точка множини E_0 є точкою аналітичності функції $f(z)$. Тому

$$\lim_{\rho\to 1-0} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(re^{it}\right) \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t-\psi}{4\sigma^2}\right) dt = f\left(re^{i\psi}\right). \quad (18)$$

Для відшукання границі ряду (16) скористаємося означенням границі і дослідимо залишок цього ряду

$$\Lambda_N = \sum_{n=N}^{\infty} \left[n^m \left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n - (n+1)^m \left(\frac{r}{R}\rho^{n+1}\right)^{n+1} \right] G_n(\psi).$$

Послідовність $\left\{\varphi_n(\rho) = n^m (r\rho^n/R)^n\right\}_{n=0}^{\infty}$ не є монотонною. Номер найбільшого члена послідовності знайдемо з необхідної умови екстремуму функції, що задає загальний член цієї послідовності,

$$\ln\frac{r}{R} + 2n\ln\rho + \frac{m}{n} = 0.$$

Тут R, r, m, ρ – величини, значення яких задані. Отже,

$$N_0 = \left[\frac{1}{2}\left(\ln\frac{r}{R} + \sqrt{\ln^2\frac{r}{R} + 4m\ln\frac{1}{\rho^2}} \right) \ln^{-1}\frac{1}{\rho^2} \right] \quad (19)$$

– номер найбільшого члена послідовності ($N_0 < N$). Залежність параметра ρ і найбільшого члена послідовності від номера N_0 така:

$$\rho = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2N_0}} e^{\frac{m}{2N_0^2}}, \ \varphi_{N_0}(\rho) = \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{N_0}{2}} N_0^m e^{\frac{m}{2}}. \quad (20)$$

Розглянута послідовність за умови $n \ge N$ монотонно спадає. Оскільки параметри N і $N_0 = N_0(\rho)$ вибираються незалежно, ввівши змінний коефіцієнт α за формулою $N = \alpha N_0$, знайдемо з урахуванням (17) і (20) оцінку для залишку ряду (15):

$$|\Lambda_N| =$$

$$= \left| \sum_{n=N}^{\infty} \left[n^m \left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n - (n+1)^m \left(\frac{r}{R}\rho^{n+1}\right)^{n+1} \right] G_n(\psi) \right| \le$$

$$\le A \sum_{n=N}^{\infty} \left[\left[n^m \left(\frac{r}{R}\rho^n\right)^n - (n+1)^m \left(\frac{r}{R}\rho^{n+1}\right)^{n+1} \right]\right] =$$

$$= AN^m \left(\frac{r}{R}\rho^N\right)^N = A\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{N^2}{2N_0} - N} N^m e^{\frac{mN^2}{2N_0^2}} =$$

$$= Ae^{\frac{m\alpha^2}{2}} \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{(\alpha-2)}{2}N} N^m. \qquad (21)$$

Якщо $\alpha > 2$, тобто параметр ρ і номер N вибрані такими, що $N > 2N_0$, то $\lim_{N\to\infty} |\Lambda_N| = 0$, тобто, у точках множини E_0, яка лежить за кругом збіжності, виконується гранична рівність (12). Отже, ряд (7) збігається і його узагальнена сума з урахуванням формули (18) дорівнює значенню функції у певній точці.

Наслідок 1. *Для похідної k - го порядку від мероморфної функції $f(z)$ виконується рівність*

$$f^{(k)}(z) = \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n^2} \frac{(n+k)!c_{n+k}}{n!} z^n, z \in E_0.$$

Доведення. Функція $f^{(k)}(z)$ задовольняє умови теореми 3, оскільки має однакові з функцією $f(z)$ полюси і також є мероморфною.

Наслідок 2. *Ряд первісної мероморфної функції підсумовується за методом Вейерштрасса–Гаусса на множині E_0.*

Доведення. Інтегрування як тригонометричного, так і степеневого ряду покращує асимптотичні оцінки коефіцієнтів одержаних рядів, тому аналогічна з (12) рівність справджується і для ряду первісної мероморфної функції.

Наслідок 3. *Нехай $f(z)$ – мероморфна функція, аналітична в крузі* $|z|<R$, $0<R<\infty$, і *аналітична на множині $E_0 = \left\{ z = re^{i\psi} R \ge r \le r_1 < \infty : \psi_1 \le \psi \le \psi_2 \right\}$. Тоді, степеневий ряд (7) рівномірно підсумовується методом Вейерштрасса-Гаусса на кожній дузі $L_r = \left\{ z=re^{i\psi} : \psi_1 \le \psi \le \psi_2 \right\}$, $R \ge r \le r_1$.*

Доведення. Рівномірне підсумовування означає, що для довільно малого числа $\varepsilon > 0$ існує номер N, а також існує число ρ_N, $\lim_{N\to\infty} \rho_N = 1$, що для всіх $n \ge N$, $\rho = \rho_N$ в усіх точок дуги L_r виконується нерівність

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} \rho_N^{n^2} c_n z^n \right| \le \varepsilon. \qquad (22)$$

За теоремою 3 для кожного фіксованого r, $R \ge r \le r_1$, нерівність (22) виконується для довільного значення $\psi \in L$. Отже, на цій дузі степеневий ряд (7) підсумовується рівномірно.

Зауваження 1. Нерівність (21) визначає похибку наближення відповідним тригонометричним поліномом оператора усереднення функції, а не самої функції.

Зауваження 2. Доведення теореми 3 встановлює процедуру обчислення значень узагальненої суми степеневого ряду у точках, що лежать поза областю його збіжності. За вибраним значенням параметра ρ, відповідно, за значенням номера N_0, що задається формулою (19), і вибраним значенням $N > 2\,N_0$, значення узагальненої суми ряду у точці $z = re^{i\psi_0}$ шукаємо за наближеною формулою

$$f\left(re^{i\psi_0}\right) \approx \sum_{n=0}^{N} \left(\rho^n r\right)^n c_n e^{i\,n\psi_0}.$$

Зауваження 3. Із наближенням ρ до одиниці у виразі часткової суми ряду (21) максимальний член підсумовуючої послідовності, що задається другою формулою (20), зростає (як і у випадку підсумовування розбіжних рядів будь-яким узагальненим методом). Тому використання формули (21) для обчислення наближених значень функції можливо лише у точках, близьких до границі області збіжності.

Для прикладу знайдемо узагальнену суму у точці $z = -2$ ($r = 2,\ \ \psi_0 = \pi$) ряду функції

$$f\left(z\right) = \frac{1}{\left(1 - z\right)^2} = \sum_{n=0}^{N} \left(n + 1\right) r^n e^{i\,n\psi_0},$$

збіжного (у класичному розумінні суми) в одиничному крузі $|z| < 1$. Значення функції у цій точці $f\left(-2\right) = 0,1....$ Наближене значення функції (узагальнену суму відповідного ряду) за межею круга збіжності шукаємо за формулою

$$f\left(z\right) \approx \sum_{n=0}^{N} \left(\rho^n r\right)^n \left(n + 1\right) \left(\cos n\psi_0 + i \sin n\psi_0\right).$$

Якщо вибрати $\rho = 0,99$ і $N = 90$, то знайдемо $f\left(-2\right) \approx 0.11$. При цьому за формулами (19) і (20) знайдемо $N_0 = 35$, $\varphi_{N_0} = 1,07 \cdot 10^6$. Збільшення значення параметра ρ приведе до істотного зростання значення максимального члена послідовності і, відповідно, до зменшення точності обчислення.

Висновки

У теоремі 3 степеневий ряд підсумовується з використанням послідовності $\left\{\rho^{n^2}\right\}$, яка є частинним випадком (при $\nu = 2$) послідовності $\left\{\rho^{n^\nu}\right\}$. Послідовність $\left\{\rho^{n^\nu}\right\}$ при $\nu > 1$ і $\rho \to 1 - 0$ також визначає метод підсумовування розбіжних степеневих рядів. Однак члени цієї послідовності не мають явного інтегрального зображення у вигляді (4).

Література

[1] *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях. – Харьков: Вища школа, 1984. – 120 с.

[2] *Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К.* Математичний аналіз. Частина 1. – К.: Вища шк., 1992. – 495 с.

[3] *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук. думка, 1987. – 268 с.

[4] *Сухорольський М. А.* Функціональні послідовності та ряди. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.

[5] *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II. – М.: Наука, 1969. – 800 с.

[6] *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с.

СУММИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ВЕЙЕРШТРАССА–ГАУССА РАСХОДЯЩИХСЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Сухорольский М. А., Ивасык Г. В., Кшановский И. П.

Национальный университет “Львивська политэхника”
ул. С. Бандеры 12, 79013, Львов, Украина

Исследовано суммирование расходящихся степенных рядов методом Вейерштрасса-Гаусса, в основе которого лежит оператор усреднения с ядерной функцией Гаусса. Показано, что степенной ряд мероморфной функции может быть просуммирован этим методом за границей круга сходимости.

Ключевые слова: мероморфная функция, логарифмическая производная.

2000 MSC: 30D35

УДК: 517.5

SUMMATION BY WEIERSTRASS–GAUSS DIVERGENT POWER SERIES

Sukhorolsky M. A., Ivasyk G. V., Kshanovskyy I. P.

Lviv Polytechnic National University
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

Summation of divergent power series by Weierstrass-Gauss based on the averaging operator with Gaussian kernel function is investigated. It is shown that the power series of meromorphic functions can be summed up by this method outside the circle of convergence.

Key words: meromorphic function, associated function.

2000 MSC: 30D35

UDK: 517.5