ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 64–69

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 64–69

ЗАГАЛЬНА ПЕРША КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КУСКОВО-ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Тацій Р. М.[a], Власій О. О.[b], Стасюк М. Ф.[a]

[a] *Львівський державний університет безпеки життєдіяльності*
вул. Клепарівська, 35, 79058, м. Львів, Україна
[b] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника*
вул. Шевченка, 57, 76025, м. Івано-Франківськ, Україна

(Отримано 10 жовтня 2014 р.)

Запропонована і обґрунтована схема розв'язування мішаної задачі для рівняння теплопровідності з кусково-неперервними коефіцієнтами за загальних крайових умов першого роду. Отримані результати можна використати при дослідженні процесу теплопередачі в багатошаровій плиті за умов ідеального теплового контакту між шарами.

Ключові слова: квазідиференціальне рівняння, крайова задача, матриця Коші, задача на власні значення, власні функції, ряд Фур'є.

2000 MSC: 34B05; 34B27;34A37

УДК: 517.912

Вступ

Крайові задачі з кусково-неперервними коефіцієнтами виникають під час моделювання різноманітних фізичних явищ механіки термодинаміки, електротехніки тощо. Якісна теорія таких задач добре вивчена в сучасній літературі [1–3]. Однак знаходження конструктивних розв'язків, аналітичне їх зображення при конкретному виборі коефіцієнтів рівняння – не завжди легка задача і є предметом досліджень цієї роботи.

При розв'язанні першої крайової задачі для рівняння теплопровідності з кусково-сталим коефіцієнтом λ використовувався метод редукції [3], який дав змогу звести розв'язання цієї задачі до розв'язання двох задач: стаціонарної крайової задачі з вихідними крайовими умовами та мішаної задачі з нульовими крайовими умовами для певного неоднорідного рівняння. Для розв'язання другої з цих задач застосовувався метод власних функцій [3], в якому основної ваги набула задача знаходження власних значень і власних функцій деякої крайової задачі для квазідиференціального рівняння другого порядку [4].

Запропонований в роботі метод розв'язання першої крайової задачі для рівняння теплопровідності – конструктивний, ефективний при чисельній реалізації і без труднощів може бути застосований для інших крайових умов.

I. Постановка задачі

Нехай $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ – довільне розбиття відрізка $[x_0, x_n]$ дійсної осі OX на n частин, θ_i – характеристична функція проміжку $[x_i, x_{i+1})$, тобто

$$\theta_i(x) = \begin{cases} 1, x \in [x_i, x_{i+1}), \\ 0, x \notin [x_i, x_{i+1}), i = \overline{0, n-1}. \end{cases}$$

Приймемо

$$\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(x)\,\theta_i, \quad r(x) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(x)\,\theta_i,$$

$$\lambda_i(x) > 0, \quad r_i(x) > 0 \quad \forall i = \overline{0, n-1},$$

$$\lambda_i(x), \quad r_i(x) \in C[x_i, x_{i+1}).$$

Розглянемо загальну першу крайову задачу для рівняння теплопровідності: знайти розв'язок рівняння

$$r\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \psi_0(t), \\ u(x_n, t) = \psi_n(t), \end{cases} \tag{2}$$

за початкової умови

$$u(x, 0) = \varphi(x). \tag{3}$$

Слідуючи, наприклад, [2, 3], шукатимемо розв'язок задачі (1)–(3) у вигляді суми двох функцій (метод редукції):

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t) \tag{4}$$

Будь-яку з функцій w чи v можна вибрати спеціальним способом, тоді інша вже визначатиметься однозначно.

II. Вибір функції $w(x,t)$ та побудова $v(x,t)$

Визначимо функцію $w(x,t)$ як розв'язок крайової задачі:

$$(\lambda w')' = 0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} w(x_0) = \psi_0(t), \\ w(x_n) = \psi_n(t). \end{cases} \tag{6}$$

На основі зображення (4) перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$r\frac{\partial w}{\partial t} + r\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{7}$$

Якщо взяти до уваги, що $w(x,t)$ є розв'язком задачі (5), (6), то в (7) слід прийняти $\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial w}{\partial x}\right) \equiv 0$, і ми прийдемо із (7) до неоднорідного диференціального рівняння на функцію $v(x,t)$

$$r\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right) - r\frac{\partial w}{\partial t}. \tag{8}$$

Зауважимо, що функцію $-r\frac{\partial w}{\partial t}$ в правій частині (8) вважатимемо відомою, оскільки відомою є функція $w(x,t)$, як розв'язок задачі (5), (6). Оскільки функція $w(x,t)$ справджує крайові умови (6), то із зображення (4) випливають крайові та початкова умови для функції $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v(x_0,t) = 0, \\ v(x_n,t) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$v(x,0) = f(x) = \varphi(x) - w(x,0). \tag{10}$$

Отже, за умови, що розв'язок $w(x,t)$ задачі (5), (6) – відомий, функція $v(x,t)$ є розв'язком мішаної задачі (8), (9), (10).

III. Розв'язання крайової задачі (5),(6)

Під час розв'язання задачі (5), (6) будемо дотримуватись концепції квазіпохідних [5, 6].

Введемо квазіпохідну $w^{[1]} \overset{df}{=} \lambda w'$, вектор $\overline{w} = \left(w, w^{[1]}\right)^T$ та матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді квазідиференціальне рівняння (5) зводиться до еквівалентної системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{w}\,' = A\overline{w}. \tag{11}$$

Крайові умови (6) також запишемо у векторній формі [3]

$$P \cdot \overline{w}(x_0) + Q \cdot \overline{w}(x_n) = \overline{\Gamma}(t), \tag{12}$$

де P і Q – квадратні матриці вигляду:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

а вектор $\overline{\Gamma}(t)$ має вигляд

$$\overline{\Gamma}(t) = (\psi_0(t), \psi_n(t))^T.$$

Під розв'язком системи (11) розуміємо абсолютно неперервну на проміжку $[x_0, x_n]$ вектор-функцію $\overline{w}(x)$, що справджує цю систему майже всюди.

На кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$ система (11) має вигляд

$$\overline{w_i}\,' = A_i\overline{w}_i, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші $B_i(x,s)$ системи (14) має вигляд

$$B_i(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & b_i(x,s) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де

$$b_i(x,s) = \int_s^x \lambda_i^{-1}(r)\,dr. \tag{16}$$

Для довільного $k \geq i$ позначимо

$$\begin{aligned} B(x_k, x_i) \overset{df}{=} B_{k-1}(x_k, x_{k-1}) \times \\ \times B_{k-2}(x_{k-1}, x_{k-2}) \cdots B_i(x_{i+1}, x_i), \end{aligned} \tag{17}$$

де $B(x_k, x_k) = E$, E – одинична матриця розміру 2×2.

Структура (15) матриць $B_k(x,s)$ дає можливість встановити структуру матриць (17), а саме:

$$B(x_k, x_i) = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{m=i}^{k-1} b_m(x_{m+1}, x_m) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

У роботі [7] встановлено, що на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$ розв'язок задачі (11),(12) має вигляд

$$\overline{w}_i(x,t) = B_i(x, x_i) \cdot B(x_i, x_0) \cdot \overline{P}_0(t), \tag{19}$$

де

$$\overline{P}_0(t) = (P + Q \cdot B(x_n, x_0))^{-1} \cdot \overline{\Gamma}(t), \tag{20}$$

а матриці Pі Q визначені в (13).

Враховуючи (15), (16) , (18) та (20), після елементарних перетворень, з формули (19)) отримаємо зображення вектор-функції $\overline{w}_k(x,t)$:

$$\overline{w}_i(x,t) = \begin{pmatrix} \psi_0(t) + \frac{\psi_n(t) - \psi_0(t)}{\sigma_n}(b_i(x, x_i) + \sigma_i) \\ \frac{\psi_n(t) - \psi_0(t)}{\sigma_n} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де

$$\sigma_i = \sum_{m=0}^{i-1} b_m(x_{m+1}, x_m), \quad \sigma_0 \overset{df}{=} 0.$$

Перша координата вектора $\overline{w}_i(x,t)$ в (21) і є шуканою функцією $w_i(x,t)$. Отже,

$$w_i(x,t) = \psi_0(t) + \frac{\psi_n(t) - \psi_0(t)}{\sigma_n}(b_i(x, x_i) + \sigma_i). \tag{22}$$

Вираз (22) дає можливість записати розв'язок на всьому проміжку $[x_0, x_n]$ за допомогою характеристичних функцій θ_k у вигляді

$$w(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x,t)\,\theta_k. \tag{23}$$

IV. Метод Фур'є та задача на власні значення

A Розвинення за власними функціями

Шукатимемо нетривіальні частинні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$r\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial v}{\partial x}\right), \tag{24}$$

що справджує крайові умови (9), у вигляді [3]

$$v\left(x,t\right) = e^{-\omega t}\cdot X\left(x\right), \tag{25}$$

де $\omega-$ параметр, а $X\left(x\right)$ – поки що невідома функція.

Підставляючи (25) в (24), приходимо до квазідиференціального рівняння

$$\left(\lambda X'\right)' + \omega r X = 0, \tag{26}$$

що справджує умови:

$$X\left(x_0\right) = X\left(x_n\right) = 0. \tag{27}$$

Задача (26), (27) – класична задача на власні значення, властивості власних значень ω_k та власних функцій $X_k\left(x,\omega_k\right)$ якої вичерпно вивчені і детально описані, наприклад, в [3]. Так, зокрема, розвинення функції $g(x)$ в ряд Фур'є за власними функціями $X_k(x,\omega_k)$ задачі (26), (27) має вигляд

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\cdot X_k\left(x,\omega_k\right), \tag{28}$$

де коефіцієнти Фур'є g_k обчислюють за формулами

$$g_k = \frac{1}{\left\|X_k\right\|^2}\cdot\int_{x_0}^{x_n} g\left(x\right)\cdot X_k\left(x,\omega_k\right)\cdot r\left(x\right)dx. \tag{29}$$

Зауважимо, що $\left\|X_k\right\|^2$ – квадрат норми власної функції X_k

$$\left\|X_k\right\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} X_k^2\left(x,\omega_k\right)r\left(x\right)dx. \tag{30}$$

Зауважимо, що функції $g(x)$, які будемо розвивати в ряди Фур'є за власними функціями задачі (26), (27) – це абсолютно неперервні функції, які мають різні аналітичні вирази на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1})$, тобто допускають зображення

$$g\left(x\right) = \sum_{i=1}^{n} g_i\theta_i \tag{31}$$

на проміжку $[x_0, x_n]$.

Через вигляд коефіцієнтів квазідиференціального рівняння (26) та функцій (31) власні функції $X_k(x,\omega)$ також подаються у вигляді

$$X_k\left(x,\omega_k\right) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{ki}\left(x,\omega_k\right)\theta_i. \tag{32}$$

Тоді для коефіцієнтів Фур'є g_k з розвинення (28) та для квадратів норми функцій $X_k\left(x\right)$ з формул (29) і (30) отримаємо:

$$g_k = \frac{1}{\left\|X_k\right\|^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_i\left(x\right)\cdot X_{ki}\left(x,\omega_k\right)\cdot r_i\left(x\right)dx,$$

$$\left\|X_k\right\|^2 = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} X_{ki}^2\left(x,\omega_k\right)\cdot r_i\left(x\right)dx.$$

B Конструктивна побудова власних функцій

Увівши квазіпохідну $X^{[1]}\stackrel{df}{=}\lambda X'$, вектор $\overline{X} = \left(X,\ X^{[1]}\right)^T$ та матрицю $A\left(x\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ -\omega r & 0\end{pmatrix}$, зведемо квазідиференціальне рівняння (26) до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\overline{X}\,' = A\overline{X} \tag{33}$$

Відповідну систему на проміжку $[x_i, x_{i+1})$ запишемо у вигляді

$$\overline{X}\,'_i = A_i\cdot\overline{X}_i,\qquad i = \overline{0, n-1},$$

де матриці A_i вигляду

$$A_i\left(x\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda_i} \\ -\omega r_i & 0\end{pmatrix}.$$

Матрицю Коші системи (33) позначимо $\tilde{B}_i\left(x,s,\omega\right)$ і аналогічно, як під час розв'язання задачі (5), (6), позначимо

$$\tilde{B}\left(x,x_0,\omega\right)\stackrel{df}{=}\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{B}_i\left(x,x_i,\omega\right)\cdot\tilde{B}\left(x_i,x_0,\omega\right)\cdot\theta_i, \tag{34}$$

де

$$\tilde{B}\left(x_i,x_0,\omega\right)\stackrel{df}{=}\prod_{j=0}^{i} B_{i-j}\left(x_{i-j+1},x_{i-j},\omega\right). \tag{35}$$

Нетривіальний розв'язок $\bar{X}\left(x,\omega\right)$ системи (33) шукаємо у вигляді

$$\bar{X}\left(x,\omega\right) = \tilde{B}\left(x,x_0,\omega\right)\cdot\bar{C}, \tag{36}$$

де $\bar{C} = \left(C_1, C_2\right)^T$ – деякий ненульовий вектор, а матриця $\tilde{B}(x,x_0,\omega)$ визначена формулами (34), (35).

Застосувавши до обидвох частин рівності (36) крайові умови у формі (12), при $\bar{\Gamma}\left(t\right)\equiv 0$, отримаємо:

$$P\cdot\bar{X}\left(x_0,\omega\right) + Q\cdot\bar{X}\left(x_n,\omega\right) =$$

$$= \left[P\cdot\tilde{B}\left(x_0,x_0,\omega\right) + Q\cdot\tilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right)\right]\cdot\bar{C} = \bar{0},$$

або, зауваживши, що $\tilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right) = E$, де E – одинична матриця, прийдемо до рівності

$$\left[P + Q\cdot\tilde{B}\left(x_n,x_0,\omega\right)\right]\cdot\bar{C} = \bar{0}. \tag{37}$$

Для існування ненульового вектора $\bar{C}$ в (37) необхідно і досить виконання умови

$$\det\left[P + Q\cdot\tilde{B}\left(x_n, x_0, \omega\right)\right] = 0. \qquad (38)$$

Позначивши

$$\tilde{B}\left(x_n, x_0, \omega\right) \stackrel{df}{=} \begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix},$$

та зваживши на формули (13), конкретизуємо вигляд характеристичного рівняння (38):

$$\det\left[P + Q\cdot\tilde{B}\left(x_n, x_0, \omega\right)\right] =$$

$$= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \\ b_{21}(\omega) & b_{22}(\omega) \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega) & b_{12}(\omega) \end{pmatrix} = b_{12}(\omega).$$

Отже, ми отримали наступний результат, який формулюється у вигляді

Твердження 1. Характеристичне рівняння задачі на власні значення (26), (27) має вигляд

$$b_{12}(\omega) = 0. \qquad (39)$$

Як відомо [3], корені ω_k характеристичного рівняння (39), які є власними значеннями задачі (26), (27), є додатними та різними.

Для знаходження ненульового вектора $\bar{C} = (C_1, C_2)^T$ підставимо в рівність (38) ω_k замість ω. Тоді прийдемо до векторної рівності

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{11}(\omega_k) & b_{12}(\omega_k) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

з якої випливає, що $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0 \in \mathbb{R}$. Прийнявши, наприклад $C_2 = 1$, маємо

$$\bar{C} = (0,\ 1)^T.$$

Позначивши нетривіальний власний вектор, що відповідає власному значенню ω_k, $\bar{X}_k(x, \omega_k)$, отримуємо наступне твердження

Твердження 2. Власні вектори системи диференціальних рівнянь (33) за крайових умов у формі (12), при $\overline{\Gamma}(t) \equiv 0$, мають таку структуру:

$$\bar{X}_k(x, \omega_k) = \tilde{B}(x, x_0, \omega)\cdot(0,\ 1)^T, \quad k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Наслідок. Власні функції $X_k(x, \omega_k)$, як перші координати власних векторів $\bar{X}_k(x, \omega_k)$, можна записати у вигляді:

$$X_k(x, \omega_k) = (1,\ 0)\cdot\tilde{B}(x, x_0, \omega_k)\cdot(0,\ 1)^T, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (40)$$

Зокрема з (40) та представлення (32) випливає, що

$$X_{ki}(x, \omega_k) = (1,\ 0)\cdot\tilde{B}_i(x, x_0, \omega_k)\times \times\tilde{B}(x_i, x_0, \omega_k), \quad i = \overline{0, n-1}. \qquad (41)$$

V. Побудова розв'язку $v(x,t)$ мішаної задачі (8)–(10)

Для розв'язання задачі (8), (9),(10) застосуємо метод власних функцій [3], який полягає в тому, що розв'язок задачі (8), (9),(10) шукаємо у вигляді

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot X_k(x, \omega_k), \qquad (42)$$

де $T_k(t)$ – невідомі функції, які визначимо нижче.

Диференціюючи функцію $w(x,t)$ за змінною t, з формул (22), (23) отримуємо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\psi_0'(t) + \frac{\psi_n'(t) - \psi_0'(t)}{\sigma_n}\left(b_k(x, x_k) + \sigma_k\right)\right]\cdot\theta_i.$$

Оскільки $\frac{\partial w}{\partial t}$ входить в праву частину рівняння (8), то розвинемо її в ряд Фур'є за власними функціями (40) крайової задачі (26), (27)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x, \omega_k), \qquad (43)$$

причому змінна t виконує функцію параметра.

Підставивши (42) у (8) з урахуванням розвинення (43), отримаємо рівність

$$r(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\cdot X_k(x, \omega_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\cdot\left(\lambda X_k'(x, \omega_k)\right)' - r(x)\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\cdot X_k(x, \omega_k).$$

Враховуючи тотожність

$$\left(\lambda X_k'\right)' + \omega_k r(x) X_k \equiv 0,$$

прийдемо до рівності

$$r(x)\cdot\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\cdot X_k(x, \omega_k) =$$

$$= -r(x)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k T_k X_k - r(x)\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t) X_k,$$

яка після скорочення на $r(x) \neq 0$ набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[T_k'(t) + \omega_k T_k(t) + w_k(t)\right]\cdot X_k(x, \omega_k) = 0. \qquad (44)$$

Прирівнюючи коефіцієнти Фур'є ряду (44) до нуля, прийдемо до диференціальних рівнянь:

$$T_k'(t) + \omega_k T_k(t) + w_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (45)$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (45) при кожному k має вигляд

$$T_k(t) = C_k \cdot e^{-\omega_k t} - \int_0^t e^{-\omega_k (t-s)} \cdot w_k(s)\, ds, \qquad (46)$$

де C_k−невідомі сталі.

Розвинемо функцію $f(x)$ з початкової умови (10) в ряд Фур'є за власними функціями (40) крайової задачі (26), (27), тобто

$$v(x,0) = f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k X_k(x, \omega_k), \qquad (47)$$

деf_k−відповідні коефіцієнти Фур'є.

Із (46) випливає, що

$$T_k(0) = C_k, \qquad (48)$$

а з зображення (42) маємо

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k. \qquad (49)$$

Порівнюючи (47), (48) і (49), знайдемо: $C_k = f_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Отже, остаточно отримуємо розв'язок мішаної задачі (9), (9), (10) у вигляді ряду

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k t} - \int_0^t e^{-\omega_k (t-s)} \omega_k(s) ds \right] \times \times X_k(x, \omega_k) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i(x,t) \cdot \theta_i, \qquad (50)$$

де

$$v_i(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k \cdot e^{-\omega_k t} - \int_0^t e^{-\omega_k (t-s)} \omega_k(s)\, ds \right] \times \times X_{ki}(x, \omega_k), \qquad (51)$$

а функції $X_{ki}(x, \omega_k)$ визначені формулами (41).

Врахувавши (23), отримаємо розв'язок (4) задачі (1)–(3)

$$u(x,t) = \sum_{i=0}^{n-1} \left[w_i(x,t) + v(x,t) \right] \cdot \theta_i,$$

в якому функції $w_i(x,t)$ та $v(x,t)$ визначені формулами відповідно (22) , (50) і (51).

Висновки

Отримані результати мають безпосереднє застосування в прикладних задачах. Так, наприклад [8], задача (1), (2), (3) описує процес поширення температури в багатошаровій плиті за умов ідеального теплового контакту між шарами за заданої температури на зовнішніх поверхнях.

Література

[1] *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи: пер. с англ. / Ф.Аткинсон. – М.: Мир, 1968. – 749 с.

[2] *Арсенин В. Я.* Методы математической физики / В. Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

[3] *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 735 с.

[4] *Тацій Р. М.* Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій, М. Живачинські // Вісник Нац. унту «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 18–27.

[5] *Тацій Р.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння / Тацій Р., Стасюк М., Мазуренко В., Власій О. – Дрогобич: Коло, 2011. – 297 с.

[6] *Тацій Р. М.* Дискретно-неперервні крайові задачі для найпростіших квазідиференціальних рівнянь другого порядку / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Серія «Фіз.-мат. науки». 2011. – № 718. – С. 61–69.

[7] *Власій О. О.* Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами / О. О. Власій, М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісник Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Серія «Фіз.-мат. науки». 2009. – № 660. – С. 34–38.

[8] *Величко Л. Д.* Термодинаміка та теплопередача в пожежній справі / Л. Д. Величко, Р. Я. Лозинський, М. М. Семерак. – Львів: Сполом, 2011. – 502 с.

ОБЩАЯ ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КУСОЧНО-ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Таций Р. М.[a], Власий О. О.[b], Стасюк М. Ф.[a]

[a] *Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности*
ул. Клепаровская , 35, 79058, г. Львов, Украина
[b] *Прикарпатский национальный университет имени Василия Стефаника*
ул. Шевченка, 57, 76025, г. Ивано-Франковск, Украина

Предложена и обоснована схема решения смешанной задачи для уравнения теплопроводности с кусочно-непрерывными коэффициентами при общих краевых условиях первого рода. Полученные результаты могут быть использованы, например, при исследовании процесса теплопроводности в многослойной плите при условиях идеального теплового контакта между слоями.

Ключевые слова: квазидифференциальные уравнения, краевая задача, матрица Коши, задача на собственные значения, собственные функции, ряд Фурье.

2000 MSC: 34B05; 34B27;34A37

УДК: 517.912

GENERAL FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION WITH PIECEWISE VARIABLE COEFFICIENTS

Tatsij R. M.[a], Vlasij O. O.[b], Stasjuk M. F.[a]

[a] *Lviv State University of vital activity safety,*
35 Kleparivska Str., 79058, Lviv, Ukraine
[b] *Vasyl Stefanyk Precarpathian National University*
57 Shevchenko Str., 76025, Ivano-Frankivsk, Ukraine

There is suggested and grounded the scheme of solving the mixed problem for heat equation with piecewise continuous coefficients with general boundary conditions of the first kind. The obtained results can be implemented, for example, in the study of heat transfer process in multilayer slab under conditions of perfect thermal contact between the layers.

Key words: quasidifferential equations, boundary value problem, Cauchy matrix, eigenvalue problem, eigenfunctions, Fourier series.

2000 MSC: 34B05; 34B27;34A37

UDK: 517.912