УДК 336.764.2

Н.Л. Іващук
Національний університет “Львівська політехніка”

МЕТОД ОЦІНЮВАННЯ ОПЦІОНІВ ЗІ СТОХАСТИЧНОЮ ЗМІННІСТЮ ЦІНИ БАЗОВОГО АКТИВУ

Розроблено новий метод оцінювання опціонів, зокрема нестандартних, виставлених на кілька базових активів, для випадку стохастичного параметра змінності їхньої ціни. На основі цього методу побудовано модель оцінювання опціону обміну другого базового активу на перший та модель оцінювання опціону обміну першого базового активу на другий. Окрім того проведено числові обчислення цін таких опціонів для фіксованої та стохастичної змінності цін базових активів, а також досліджено вплив деяких параметрів на формування ціни опціону обміну.

In article the new method of option pricing, including non-standard options, exposed on some underlying assets is developed. On the basis of this method the pricing model of an exchange of the second underlying asset on the first options and the pricing model of an exchange of the first underlying asset on the second options is constructed. Except for it numerical calculations of the prices of such options for fixed and stochastic the underlying asset price volatility are made, and also influence of some parameters on formation of the exchange option price is investigated.

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв’язок із важливими науковими чи практичними завданнями.

Починаючи з кінця 80-х років минулого століття, спостерігається доволі динамічний розвиток світового ринку деривативів, зокрема нестандартних опціонів. Причиною цього стала можливість їхнього універсального застосування. Основною метою створення таких інструментів є страхування від ризику, який посилюється внаслідок змінності сучасного світового ринку та його оточення. Така ситуація вимагає створення новіших та складніших форм деривативів, які б відповідали вимогам потенційних інвесторів. Саме такими інструментами є клас нестандартних опціонів, до якого зараховуються опціони обміну.

Спільною ознакою усіх опціонів, яка відрізняє їх від інших деривативів, є наявність ціни, за якою опціон продається. Тому більшість досліджень ринку деривативів стосуються способів ціноутворення опціонів. Відомі сьогодні моделі оцінювання опціонів зазвичай передбачають фіксований характер більшості параметрів цих похідних інструментів, тоді як на реальному строковому та базовому ринках ці параметри мають випадковий характер. Врахування фактичного характеру цих параметрів наближає моделі ціноутворення до реальних ринкових умов.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, в яких започатковано розв’язання даної проблеми

Опціони обміну вперше описав Уільям Маргрейб ще у 1978 році. У своїй праці [1] він розробив алгоритм оцінювання опціонів обміну одного базового активу на інший. 1983 року Дж. Граббі [2] запропонував алгоритм визначення цін опціонів обміну валют з правом купівлі та продажу, а 1994 року К. Ксу та С. Тейлор [3] проаналізували термінову структуру моделей оцінювання опціонів обміну валют. У 1998 р. Дж. Кампа та П. Ченґ [4] розвинули кореляційні методи прогнозування цін для опціонів обміну валют, а Ґ. Поітрас [5] застосував теорію арифметичного броунівського руху для оцінювання цих деривативів. Двома роками пізніше С. Вальтер і Дж. Лопез [6] розвинули метод імплікованої кореляції у моделях оцінювання опціонів обміну валют. Однак усі названі результати були отримані за стандартних припущень, зокрема передбачається, що змінність ціни базового активу є фіксованою величиною.

Цілі статті

Цілі статті можна сформулювати так: розробити метод оцінювання опціонів, зокрема нестандартних, для випадку стохастичного параметра змінності ціни базового активу; на основі цього методу побудувати модель оцінювання опціону обміну другого базового активу на перший; побудувати модель оцінювання опціону обміну першого базового активу на другий; дослідити вплив терміну дії опціону, ціни першого та другого базових активів на формування ціни опціону обміну.

Основний матеріал дослідження

Розробимо метод оцінювання нестандартних опціонів за умови випадкового характеру параметра змінності ціни базового активу. Відомо, що на практиці цей параметр насправді рідко буває фіксованим. Тому з метою наближення наших моделей до реальності представимо дві економіко-математичні моделі оцінювання опціонів обміну на підґрунті теорії стохастичних процесів.

Будемо досліджувати процес ціноутворення європейського опціону, інвестиційний портфель якого у загальному випадку складається з $n+1$ активів, з яких:

а) n ***ризикових активів,*** *у яких стохастичні процеси ціноутворення базових активів* $I_1,\mathbf{K},I_n$ *описуються модифікованим стохастичним рівнянням типу Блека–Шоулса із заданими процесами Гаусса–Вінера* $W_1(t),...,W_n(t)$ *та відповідними початковими умовами;*

б) один безризиковий актив, *у якому процес ціноутворення* $K_t = K_T\exp(-rt)$ *залежить від фіксованої відсоткової ставки без ризику* r.

Припускаємо, що задовольняються всі припущення моделі Блека–Шоулса [7] за винятком того, що відповідні дисперсії $s_1^2,\mathbf{K},s_n^2$ цін базових активів є сталими величинами. Щодо цих параметрів зробимо більш загальне припущення, ніж у класичній моделі Блека–Шоулса, а саме:

припустимо, що дисперсія s_j^2 *ціни* j*-го базового активу* I_j *не є фіксованою величиною, а залежить від деякої випадкової змінної* $Y_j\in(0,+\infty)$ *з логарифмічно-нормальним розподілом* $\ln Y_j \square \mathbf{N}\left(m_j,d_j^2\right)$.

Цю залежність охарактеризуємо так:

вважаємо, що ціна j*-го базового активу* $I_j(t)$ *визначається через стандартний процес Гаусса–Вінера* $W_j(t)$ *у такому модифікованому вигляді:*

$$I_j\left(t,r,g_j,s_j\right)=Y_jI_j(T)\exp\left(\left(r-g_j-\frac{s_j^2}{2}\right)t+s_jW_j(t)\right),\qquad j=1,\mathbf{K},n, \tag{1}$$

де T – момент погашення опціону; g_j – фіксована дохідність базового активу $I_j(t)$; $t=T-t$ – час до погашення опціону; r – фіксована відсоткова ставка без ризику; s_j – стандартне відхилення ціни базового активу $I_j\left(t,r,g_j,s_j\right)$.

Зрозуміло, що у випадку $Y_j=const$ ми отримуємо модель Блека–Шоулса для інвестиційного портфеля з $n+1$ активів із врахуванням дохідності базових активів. Нашою найближчою метою є знаходження явних формул оцінювання європейських опціонів, складених з таких інвестиційних портфелів. З припущення, яке ми зберігаємо для нашої модифікованої моделі про відсутність на ринку арбітражу, очевидне існування імовірнісної міри $\mathbf{P}$, відносно якої процеси цін базових активів $I_1\left(t,r,g_1,s_1\right),\mathbf{K},I_n\left(t,r,g_n,s_n\right)$ будуть F_t -мартингалами, де F_t – мінімальна фільтрація, породжена заданими процесами Гаусса–Вінера $W_1(t),\ldots,W_n(t)$. Для перевірки цього зробимо заміну міри Гаусса–Вінера $dW_j^*(t)=dW_j+g_j s_j dt$, ввівши так звані параметри ризику інвестиційного портфеля $g_1,\ldots,g_n$, викликаного випадковими змінними $Y_1,\ldots,Y_n$, і проаналізуємо модифіковані процеси вигляду

$$I_j^*(t,r,g_j,s_j,g_j)=Y_jI_j(T)\exp\left(\left(r-g_j-g_js_j^2-\frac{s_j^2}{2}\right)t+s_jW_j^*(t)\right),\qquad j=1,\mathbf{K},n.$$

Із співвідношень

$$E\left(I_j^*(t,r,g_j,s_j,g)\,|\,\mathsf{F}_s\right)=$$

$$=I_j^*(t,r,g_j,s_j,g_j)E\left(\exp\left[\left(r-g_j-g_js_j^2-\frac{s_j^2}{2}\right)(t-s)+s_j\left(W_j^*(t)-W_j^*(s)\right)\right]Y_j\,|\,\mathsf{F}_s\right)$$

$$=I_j^*(s,r,g_j,s_j,g)\exp\left[\left(r-g_j-g_js_j^2+E\left(Y_j-1\right)-g_jE\left(Y_j-1\right)^2\right)(t-s)\right],\qquad (j=1,\ldots,n)$$

зрозуміло, що $I_j^*(t,r,g_j,s_j,g_j)$ є F_t -мартингалом тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $r-g_j-g_js_j^2+E\left(Y_j-1\right)-g_jE\left(Y_j-1\right)^2=0$ або $g_j=\dfrac{r-g_j+E\left(Y_j-1\right)}{s_j^2+E\left(Y_j-1\right)^2}$. Отже, шляхом вибору параметрів g_j ми завжди можемо прийти до модифікованого процесу вигляду (1), який є F_t -мартингалом. З іншого боку, з умови $\ln Y_j\,\square\,\mathbf{N}\left(m_j,d_j^2\right)$ очевидно, що $g_j=\ln EY_j=\dfrac{d_j^2}{2}+m_j$.

Зауважений вище факт є важливим, оскільки з того, що $I_1(t),\mathbf{K},I_n(t)$ є F_t -мартингалами, зрозуміло, що для знаходження ціни європейського опціону ми можемо використовувати відому формулу, узагальнену на випадок $n+1$ активів [8]. Тоді ціна європейського опціону має вигляд умовного математичного сподівання

$$V_t\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)=E\left[H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right],\qquad t=T-t,\tag{2}$$

де $H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)$ є функцією виплати опціону $n+1$ змінних, яка характеризує його тип. До того ж ціна у кожний момент часу t залежить також від решти заданих параметрів r,m_j,d_j,g_j,s_j $(j=1,\ldots,n)$ з системи рівнянь (1). Оскільки процеси $I_j\left(t,r,g_j,s_j\right)$ вигляду (1) є F_t -мартингалами, то можемо записати

$$V_t\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)=E\left[H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right]=$$

$$E\left[H\left(Y_1I_1(T)\exp\left(\left(r-\frac{s_1^2}{2}\right)t+s_1W_t\right),\mathbf{K},Y_nI_n(T)\exp\left(\left(r-\frac{s_n^2}{2}\right)t+s_nW_t\right),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right].$$

Розглянемо тепер початкову задачу для певної допоміжної системи n класичних рівнянь Блека–Шоулса

$$dI_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)=r_jI_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)dt+u_jI_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)dW_j(t),\tag{3}$$

$$I_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)|_{t=0}=I_j(T)$$

з єдиним (на підставі теореми Itô) вектором розв’язків

$$I_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)=I_j\left(T\right)\exp\left(\left(r-g_j-\frac{u_j^2}{2}\right)t+u_jW_j\left(t\right)\right),$$

де позначено

$$u_j^2=s_j^2+\frac{d_j^2}{t},\qquad (j=1,...,n). \tag{4}$$

На підставі формули (3), використовуючи рівності

$$I_j\left(t,r,g_j,s_j\right)=Y_jI_j\left(T\right)\exp\left(\left(r-g_j-\frac{s_j^2}{2}\right)t+s_jW_j\left(t\right)\right)=$$

$$=I_j\left(T\right)\exp\left(\left(r-g_j-\frac{s_j^2}{2}\right)t+s_jW_j\left(t\right)+\overbrace{\ln Y_j}^{\mathbf{N}\left(m_j,d_j^2\right)}\right),$$

отримуємо ціну європейського опціону з функцією виплати $H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)$ та цінами базових активів

$$\exp\left(m_j+\frac{d_j^2}{2}\right)I_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)=I_j^W\left(t,r,g_j,u_j\right)\exp g_j,\qquad (j=1,...,n)$$

у такому вигляді:

$$V_t\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)=$$

$$=E\left[H\left(\exp\left(m_1+\frac{d_1^2}{2}\right)I_1(T)\exp\left(\left(r-g_1-\frac{u_1^2}{2}\right)t+u_1W_1\left(t\right)\right),\mathbf{K}\right.\right.$$

$$\left.\left.\mathbf{K},\exp\left(m_n+\frac{d_n^2}{2}\right)I_n(T)\exp\left(\left(r-g_n-\frac{u_n^2}{2}\right)t+u_nW_n\left(t\right)\right),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right]$$

$$=E_W\left[H\left(\exp\left(m_1+\frac{d_1^2}{2}\right)I_1^W\left(t,r,g_1,u_1\right),\mathbf{K},\exp\left(m_n+\frac{d_n^2}{2}\right)I_n^W\left(t,r,g_n,u_n\right),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right].$$

Отже, справедливе таке твердження: *ціна* $V_t=E\left[H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right]$ *опціону, складеного із* $n+1$ *активів* $I_1\left(t,r,g_1,s_1\right),\mathbf{K},I_j\left(t,r,g_n,s_n\right),K_t$, *заданих системою* (1) *із випадково змінними стандартними відхиленнями цін базових активів* $s_1,\mathbf{K},s_n$ *та функцією виплати* $H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)$, *збігається з ціною опціону з цією самою функцією виплати для* $n+1$ *активів вигляду*

$$\exp\left(m_1+\frac{d_1^2}{2}\right)I_1^W\left(t,r,g_1,u_1\right),...,\exp\left(m_n+\frac{d_n^2}{2}\right)I_n^W\left(t,r,g_n,u_n\right),K_T,$$

де вектор $I_1^W\left(t,r,g_1,u_1\right),...,I_n^W\left(t,r,g_n,u_n\right)$ *є єдиним розв'язком допоміжної задачі* (3) *із сталими стандартними відхиленнями цін базових активів* $u_1,\mathbf{K},u_n$ *вигляду* (4) *і має вигляд умовного математичного сподівання*

$$V_t=E\left[H\left(\exp\left(m_1+\frac{d_1^2}{2}\right)I_1^W\left(t,r,g_1,u_1\right),\mathbf{K},\exp\left(m_n+\frac{d_n^2}{2}\right)I_n^W\left(t,r,g_n,u_n\right),K_T\right)|\,\mathsf{F}_t\right]. \tag{5}$$

Останнє твердження дає прямий **алгоритм обчислення** ціни європейського опціону $V_t = E\left[H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right) | \mathrm{F}_t\right]$ з функцією виплати $H\left(I_1(T),\mathbf{K},I_n(T),K_T\right)$:

щоб знайти ціну опціону із стохастичною змінністю s_j *цін базових активів достотньо у формулі ціни такого опціону при фіксованій змінності цін базових активів замінити* s_j *на* $u_j^2 = s_j^2 + \frac{d_j^2}{t}$, *а* I_j *– на* $\exp\left(m_j + \frac{d_j^2}{2}\right) I_j$.

Отже, у межах нашої моделі вектор стандартних відхилень цін базових активів є випадково змінним і має вигляд

$$\left(s_1,...,s_n\right) = \left(\sqrt{u_1^2 - \frac{d_1^2}{t}},...,\sqrt{u_n^2 - \frac{d_n^2}{t}}\right),$$

де $\left(u_1^2,...,u_n^2\right)$ – фіксована складова вектора $\left(s_1^2,...,s_n^2\right)$, що характеризує внески до ціни процесів Гаусса–Вінера $W_1,...,W_n$, а $\left(\frac{d_1^2}{t},...,\frac{d_n^2}{t}\right)$ – його змінна складова, що характеризує внески в ціну випадкового вектора $\left(Y_1,...,Y_n\right)$ із стандартними відхиленнями відповідно $\left(d_1,...,d_n\right)$. Множники

$$\exp g_j = \exp\left(m_j + \frac{d_j^2}{2}\right), \qquad (j = 1,...,n)$$

не залежать від процесу Гаусса–Вінера W_j і характеризують ризик інвестиції, що викликаний випадковою змінною Y_j такою, що $\ln Y_j \sim \mathbf{N}\left(m_j, d_j^2\right)$.

Далі, враховуючи наведені вище припущення, побудуємо моделі для визначення цін опціонів обміну для випадку стохастичної змінності ціни базового активу. При цьому скорочено далі позначатимемо $I_j\left(T\right) = I_j$ та $K_T = K$.

Опціони обміну – це основний вид кореляційних опціонів, зважаючи на те, що інші кореляційні опціони можна представляти та аналізувати на основі опціонів обміну, які є найпростішими у групі кореляційних. Дослідимо особливості цих похідних інструментів та їхню функцію виплати. Загалом немає особливих відмінностей між опціонами обміну типу купівлі та опціонами обміну типу продажу. Тому стандартний опціон обміну можна інтерпретувати як опціон *купівлі* на перший актив з ціною виконання, що дорівнює майбутній ціні другого активу на момент реалізації опціону. З іншого боку, за аналогією, опціон обміну можна також трактувати як опціон *продажу* другого активу з ціною виконання, що дорівнює ціні першого активу на момент реалізації опціону. Це означає, що опціон обміну має два базові активи, а саме: один – який є в наявності у покупця опціону, і другий – на який перший актив можна обміняти у майбутньому, а, отже, він повинен бути у наявності у продавця опціону на момент реалізації такого деривативу. З цього зрозуміло, що при вимірюванні чутливості цих деривативів до змін ринкових умов необхідно розглядати грецькі показники два рази, що вимагає більших затрат праці і часу.

Опціони обміну є найпростішим видом кореляційних опціонів, а оцінювати їх можна за допомогою нашої модифікації моделі Блека–Шоулса [7]. Для цього припускаємо, що опціон має два базові ризикові активи, які описуються процесами $I_1\left(t,r,g_1,s_1\right)$, $I_2\left(t,r,g_2,s_2\right)$ вигляду (1). Функція виплати опціону обміну європейського стилю виконання, в якому здійснюється обмін другого активу на перший актив, має вигляд:

$$payoff = \max\left[I_1 - I_2, 0\right],$$

де I_1 – ціна першого базового активу у момент погашення опціону T; I_2 – ціна другого базового активу у момент погашення опціону T.

Описаний опціон ще називають опціоном обміну другого активу на перший. Функція його виплати є аналогічною до функції виплати за стандартним опціоном купівлі, в якій ціна виконання K замінюється на ціну другого базового активу I_2. Отже, опціон обміну можна розглядати як стандартний опціон купівлі, виставлений на перший актив з ціною виконання, що дорівнює майбутній ціні другого активу (на момент реалізації опціону). З іншого боку, функція виплати є такою самою, як функція виплати стандартного опціону продажу, якщо розглядати майбутню ціну першого активу I_1 як ціну виконання. Тобто “опціон обміну” можна трактувати як стандартний опціон продажу зі страйковою ціною, що дорівнює майбутній ціні першого активу.

Як бачимо, опціони обміну мають два базові активи, а тому їх зараховують до класу кореляційних опціонів. Опціони обміну характеризуються оберненою залежністю між значенням коефіцієнта кореляції та розміром опціонної премії. Це означає, що з зростанням значення коефіцієнта кореляції між двома базовими активами опціон обміну стає дешевшим і навпаки. Функцію виплати опціони обміну можна записати також в іншому вигляді, а саме:

$$\max[I_1 - I_2, 0] = \max[I_1, I_2] - I_2, \text{ або } \max\left[I_1(T) - I_2(T), 0\right] = I_1(T) - \min\left[I_1(T), I_2(T)\right].$$

При фіксованому значенні параметрів змінності s_j цін базових активів $I_j\left(t, r, g_j, s_j\right)$, тобто у випадку $Y_j = 1$, для оцінювання опціону обміну <u>другого</u> базового активу на перший ми можемо використати формулу (2). Згідно з (2) ціна опціону обчислюється як умовне математичне сподівання від функції виплати опціону із врахуванням того, що процеси $I_j\left(t, r, g_j, s_j\right)$ є мартингалами. У [1, с. 178] за таких припущень умовне математичне сподівання було обчислено та перетворилося на формулу:

$$EXC_{12} = I_1 e^{-g_1 t} N\left(d_{e1}\right) - I_2 e^{-g_2 t} N\left(d_{e2}\right), \tag{6}$$

$$d_{e2}\left(s_1, s_2, I_1, I_2\right) = \left[\ln\left(\frac{I_1}{I_2}\right) + \left(g_2 - g_1 - \frac{1}{2} s_a^2\right) t\right] \Big/ \left(s_a \sqrt{t}\right),$$

$$d_{e1}\left(s_1, s_2, I_1, I_2\right) = d_{e2}\left(s_1, s_2, I_1, I_2\right) + s_a\sqrt{t}, \quad s_a\left(s_1, s_2, I_1, I_2\right) = \sqrt{s_1^2 - 2r\left(I_1, I_2\right) s_1 s_2 + s_2^2},$$

де g_j – ставка доходу j-го базового активу, $j = 1, 2$; $r\left(I_1, I_2\right)$ – коефіцієнт кореляції між обома базовими активами; s_j – фіксована змінність ціни (значення) j-го базового активу.

Застосуємо розроблений нами вище **алгоритм** виведення формули типу (6) для ціни європейського опціону обміну <u>другого</u> базового активу на перший, за умови, що змінності цін s_j обох базових активів мають стохастичний характер. Згідно з алгоритмом у (6) потрібно замінити s_j на u_j, а I_j – на $\exp\left(m_j + \frac{d_j^2}{2}\right) I_j$. Тоді формула матиме вигляд:

$$\begin{aligned} EXC_{12}^s = {} & I_1 \exp\left(-g_1 t + m_1 + \frac{d_1^2}{2}\right) N\left[d_{e1}\left(u_1, u_2, I_1 \exp\left(m_1 + \frac{d_1^2}{2}\right), I_2 \exp\left(m_2 + \frac{d_2^2}{2}\right)\right)\right] \\ & - I_2 \exp\left(-g_2 t + m_2 + \frac{d_2^2}{2}\right) N\left[d_{e2}\left(u_1, u_2, I_1 \exp\left(m_1 + \frac{d_1^2}{2}\right), I_2 \exp\left(m_2 + \frac{d_2^2}{2}\right)\right)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

де позначено $u_j^2 = s_j^2 + \frac{d_j^2}{t}$. При цьому, коефіцієнти $g_j = m_j + \frac{d_j^2}{2}$ характеризують ризик інвестиції в опціон обміну, викликаний випадковими змінними Y_j з логарифмічно-нормальним розподілом $\ln Y_j \sim \mathbf{N}\left(m_j, d_j^2\right)$.

Формули ціни для випадку опціонів обміну першого базового активу на другий виводяться аналогічно. При фіксованій змінності формула має вигляд:

$$EX_{21} = I_2 e^{-g_2 t} N(-d_{e2}) - I_1 e^{-g_1 t} N(-d_{e1}). \tag{8}$$

За стохастичної змінності цін базових активів формула набуває вигляду:

$$\begin{aligned} EXC_{21}^{s} = I_2 \exp\left(-g_2 t + m_2 + \frac{d_2^2}{2}\right) N\left[-d_{e2}\left(u_1, u_2, I_1 \exp\left(m_1 + \frac{d_1^2}{2}\right), I_2 \exp\left(m_2 + \frac{d_2^2}{2}\right)\right)\right] \\ - I_1 \exp\left(-g_1 t + m_1 + \frac{d_1^2}{2}\right) N\left[-d_{e1}\left(u_1, u_2, I_1 \exp\left(m_1 + \frac{d_1^2}{2}\right), I_2 \exp\left(m_2 + \frac{d_2^2}{2}\right)\right)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

З формули (9) очевидно, що опціон обміну першого базового активу на другий можна розглядати як стандартний опціон продажу, виставлений на перший актив з ціною виконання, що дорівнює майбутній ціні другого активу.

Опціони обміну найчастіше використовуються інституційними інвесторами з метою отримання доходу від інвестованого капіталу. Якщо такий інвестор, маючи у своєму портфелі пакет акцій однієї корпорації, не впевнений щодо їхньої майбутньої ціни, то для хеджування своєї позиції у даному активі він може застосувати опціон з правом обміну одного (кількох) базового активу на інший базовий актив (його відповідну кількість). Опціони обміну є ефективними інструментами, що часто використовуються також для обмеження валютного ризику, який зазвичай загрожує імпортерам та експортерам продукції. Обмін певної кількості однієї валюти на іншу цілком виключає втрати від можливих курсових коливань. Посередником у таких операціях часто є Кримська міжбанківська валютна біржа.

Порівняно зі стандартними опціонами, опціони обміну мають ту перевагу, що немає необхідності шукати на ринку опціони з відповідною ціною виконання, яких може навіть і не бути в продажу. Використовуючи формулу (6), обчислимо ціну річного опціону обміну однієї акції на іншу, якщо ринкові ціни обох акцій дорівнюють 100$, їхні змінності становлять 20 і 15 %, дохідності 5 і 4 %, відповідно, доходи акцій корелюють між собою з коефіцієнтом кореляції рівним 75 %. Для цього спочатку обчислимо значення параметрів: s_a, d_{e2}, d_{e1}.

$$s_a = \sqrt{0.2^2 - 2 \cdot 0.75 \cdot 0.2 \cdot 0.15 + 0.15^2} = \sqrt{0.04 - 0.045 + 0.0225} = \sqrt{0.0175} = 0.1323,$$

$$d_{e2} = \left[\ln\left(\frac{100}{100}\right) + \left(0.04 - 0.05 - \frac{1}{2} 0.1323^2\right) \cdot 1\right] \Big/ \left(0.1323\sqrt{1}\right) = \frac{-0.0188}{0.1323} = -0.1417,$$

$$d_{e1} = d_{e2} + s_a \sqrt{t} = -0.1417 + 0.1323\sqrt{1} = -0.0094.$$

Ціна опціону обміну другої акції на першу дорівнюватиме:

$$EXC_{12} = 100 \exp[-0.05 \cdot 1] N(-0.094) - 100 \exp[-0.04 \cdot 1] N(-0.1417) =$$
$$100 \cdot 0.9512 \cdot 0.4626 - 100 \cdot 0.9608 \cdot 0.4437 = 44.003 - 42.631 = 1.372\$.$$

Натомість, ціну опціону обміну першої акції на другу можна обчислити за формулою (8). Тоді отримаємо:

$$EXC_{21} = -100 \exp[-0.05 \cdot 1] N(0.094) + 100 \exp[-0.04 \cdot 1] N(0.1417)$$
$$= -100 \cdot 0.9512 \cdot 0.5374 + 100 \cdot 0.9608 \cdot 0.5563 = -51.117 + 53.449 = 2.332\$.$$

Застосувавши розроблені нами моделі для стохастичної змінності цін базових активів, зокрема формули (7) і (9), та використовуючи можливості пакета “Mathematica”, ми отримали іншу ціну для опціону обміну першого базового активу на другий, яка становить приблизно 1.77$. Така ціна є нижчою, а тому вигіднішою для інвестора, який прагне зайняти довгу позицію в опціоні обміну. Змінюючи ціну першої акції з 80$ до 120$, ми також дослідили, як змінюватиметься ціна такого опціону, що дасть змогу застосувати подібну стратегію з використанням іншого базового активу. Окрім того, програмне забезпечення дає змогу дослідити залежність ціни опціону від інших його параметрів, зокрема, від терміну його дії. Нами було проаналізовано ціну опціону обміну, виставленого на коротші періоди. Отримані результати (табл. 1, рис. 1) ілюструють обернену залежність ціни опціону від обох параметрів.

Таблиця 1

Ціна опціонів обміну залежно від ціни першої акції та терміну дії

Ціна першої акції/ термін дії опціону	1 тиждень	2 тижні	3 тижні	4 тижні
80 $	20.0000	19.9999	19.9997	19.9994
90 $	10.0208	10.0416	10.0639	10.0900
100 $	0.86759	1.23703	1.52386	1.76768
110 $	$1.85{\cdot}10^{-6}$	0.00072	0.00650	0.02150
120 $	0.00000	$4.1{\cdot}10^{-10}$	$3.3{\cdot}10^{-7}$	0.00001

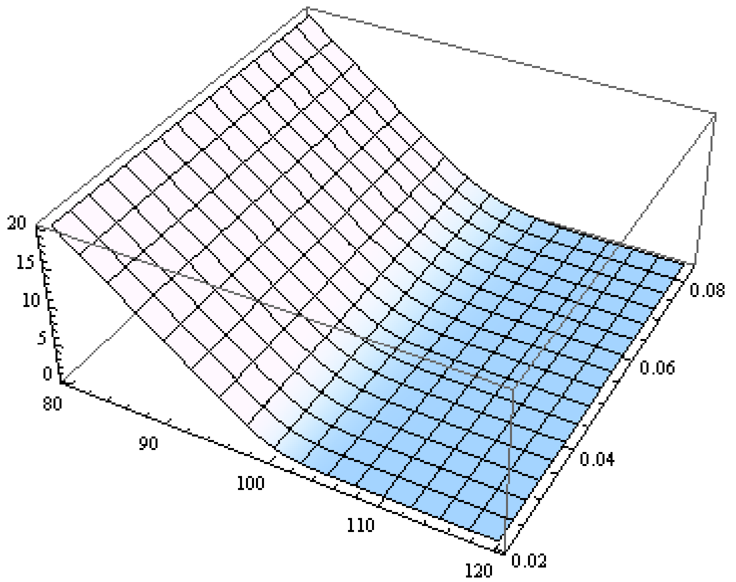

Рис. 1. Залежність ціни опціону від ціни першої акції та терміну дії

Розглянемо, як змінюватиметься ціна опціону при зміні ціни другої акції. У цьому випадку результати дослідження (табл. 2, рис. 2) показують пряму залежність між ціною опціону та змінами обох параметрів.

Таблиця 2

Ціни опціонів обміну залежно від ціни другої акції та терміну дії

Ціна другої акції/ термін дії опціону	1 тиждень	2 тижні	3 тижні	4 тижні
80 $	0.0000	$2.7{\cdot}10^{-14}$	$4.4{\cdot}10^{-10}$	$6.5{\cdot}10^{-8}$
90 $	$1.5{\cdot}10^{-7}$	0.00018	0.00241	0.00969
100 $	0.86759	1.23703	1.52386	1.76768
110 $	10.0249	10.0503	10.0797	10.1161
120 $	20.0083	20.0165	20.0245	20.0325

Дослідимо, як реагуватиме ціна останнього опціону, виставленого на 1 місяць, залежно від ціни другої акції та середньої змінності першої акції. З отриманих результатів (табл. 3, рис. 3) можна зробити висновок про незначний вплив параметра змінності на ціну опціону. Натомість зростання ціни другої акції понад 100 $ призводить до стрімкого зростання ціни такого деривативу.

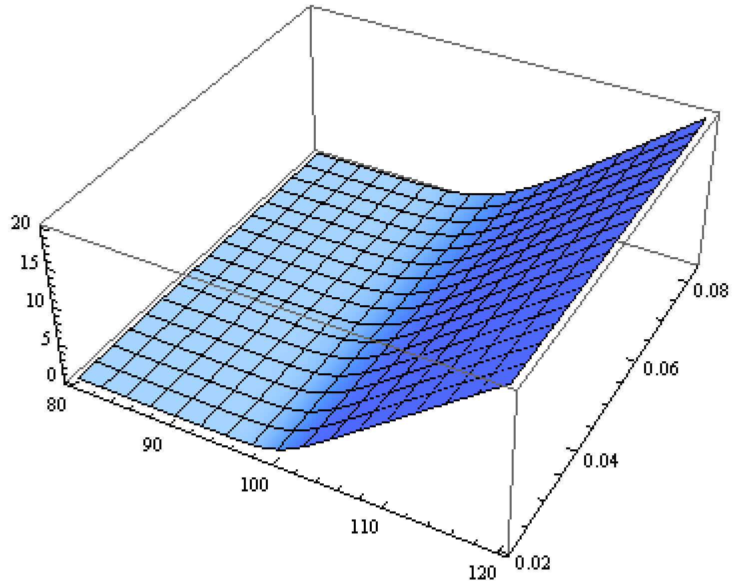

Рис. 2. Залежність ціни опціону від ціни другої акції та терміну дії

Таблиця 3

Ціна опціону обміну залежно від ціни другої акції та змінності першої акції

Ціна другої акції/ змінність першої акції	$u_1 = 0.02$	$u_1 = 0.04$	$u_1 = 0.06$	$u_1 = 0.08$	$u_1 = 0.10$
80 $	$6.6 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-12}$	$5.9 \cdot 10^{-13}$
90 $	0.00515	0.00224	0.00102	0.00060	0.00043
100 $	1.65209	1.52727	1.42995	1.36640	1.34174
110 $	10.1086	10.1035	10.1012	10.1003	10.1000
120 $	20.0325	20.0325	20.0325	20.0325	20.0325

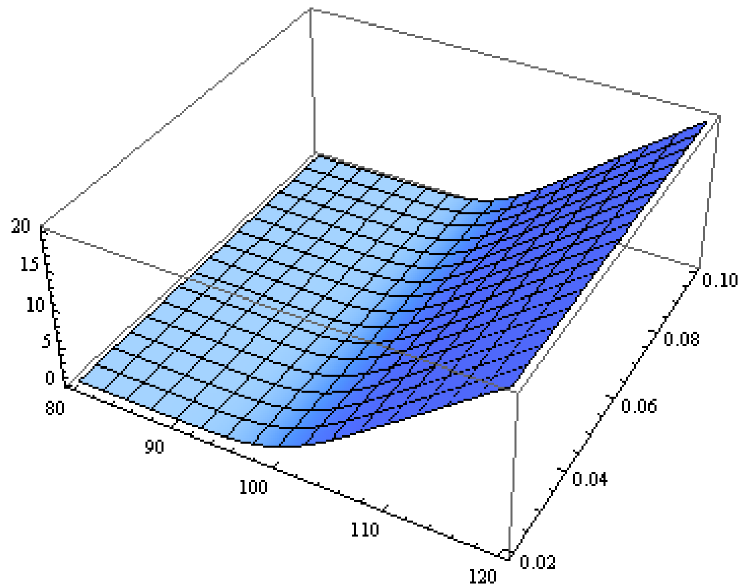

Рис. 3. Залежність ціни опціону від ціни другого активу та змінності першого активу

Опціони обміну можуть використовуватися з різною метою. Наприклад, У. Марґрейб описав чотири способи використання таких деривативів, зокрема з метою ефективних заохочувальних винагород, граничних вигод, обмінних оферт та резервних вкладень капіталу [1].

Висновки та перспективи подальших досліджень

Операції з похідними фінансовими інструментами проводяться як з метою управління ризиком портфеля активів, так і отримання спекулятивних та арбітражних прибутків. Похідні інструменти є предметами обігу на строкових ринках, зокрема на багатьох біржах та позабіржовому ринку, і становлять для інвесторів привабливий вид інвестицій. Перспективи подальших досліджень стосуватимуться вивчення нових форм фінансових деривативів, способів їх оцінювання та використання на практиці.

1. Margrabe W. The Value of an Option to Exchange One Asset for Another // Journal of Finance. – 1978. – Vol. 33, № 1. – P. 177–186. 2. Grabbe J.O. The Pricing of Call and Put Option on Foreign Exchange // Journal of International Money and Finance. – 1983. – Vol. 2. – P. 239–253. 3. Xu X., Taylor S.J. The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options // Journal of Financial and Quantitative Analysis. – 1994. – Vol. 29. – P. 57–74. 4. Campa J.M., Chang P.H.K. The Forecasting Ability of Correlations Implied in Foreign Exchange Options // Journal of International Money and Finance. – 1998. – Vol. 17. – P. 855–880. 5. Poitras G. Spread Options, Exchange Options, and Arithmetic Brownian Motion // Journal of Futures Markets. – 1998. – Vol. 18. – P. 487–517. 6. Walter C.A., Lopez J.A. Is Implied Correlation Worth Calculating? Evidence from Foreign Exchange Options // Journal of Derivatives. – 2000. – Vol. 7, № 3. – P. 65–81. 7. Black F., Scholes M.J. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 3, № 81. – P. 637–654. 8. Pliska S.R. Wprowadzenie do matematyki finansowej: modele z czasem dyskretnym. – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2005. – 306 p.

УДК 65.011.4

О.М. Куницька, Є.В. Мержиєвська
Київський національний транспортний університет

УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ З ВИКОРИСТАННЯМ СУЧАСНИХ ПІДХОДІВ ЛОГІСТИКИ ТА МАРКЕТИНГУ

Запропоновано вибір інтегрованої стратегії контролю запасів підприємства на основі визначення ключових номенклатурних груп, що визначають прибутковість підприємства та аналізу прогнозованості реалізації товарів. Аналіз номенклатури проводили ABC/XYZ-аналізом.

The study suggested the choice of integrated control strategy of stocks on the basis of the volume and key groups that determine the profitability of enterprises and analysis of forecasting the sale of goods. Analysis conducted by the range of ABC / XYZ-analysis.

Постановка проблеми

Стабілізація економічного та фінансового стану підприємства значною мірою визначаються обґрунтованістю стратегії управління діяльністю підприємства. Саме стратегічне управління повинне забезпечити практичну реалізацію основних його переваг за рахунок мобільності, динамічності та безперервного пошуку рішень, що в результаті призведе до позитивної зміни кількісних та якісних параметрів діяльності підприємства відповідно до вимог економічної ситуації.

Стратегію необхідно розглядати як комплекс системних послідовних дій, які об’єднують в єдине ціле всі види виробничо-господарчої діяльності підприємства, що об’єднує безпосередньо виробництво, формування попиту та пропозиції, роботи, послуги, трудові ресурси, сировину, фінанси тощо.