ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 57–63

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 57–63

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВИРОДЖЕНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Симотюк М. М.[a], Тимків І. Р.[b]

[a] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України (79060, Львів, вул. Наукова, 3-б, Україна)*

[b] *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу (76019, Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 5, Україна)*

(Отримано 10 листопада 2014 р.)

Досліджено крайову задачу для одного виродженого за радіальною змінною параболічного рівняння. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. За допомогою метричного підходу встановлено оцінку знизу для значень функцій Бесселя півцілого індексу, що входять знаменниками у вирази для коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі.

Ключові слова: вироджене рівняння, функція Бесселя, малий знаменник, міра Лебега.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: УДК 517.95+511.42

Вступ [1]

Крайові задачі для рівнянь із частинними похідними з виродженими коефіцієнтами виникають під час моделювання дифузійних, гідро- та газодинамічних процесів, явищ тепломасопереносу, кристалографії тощо. Дослідженню таких задач присвячені роботи [5, 6, 12, 8, 19]. Зокрема, у працях [5, 8] досліджено локальні та нелокальні крайові задачі для вироджених гіперболічних та безтипних рівнянь. У роботах [12, 19] вивчено нелокальні двоточкові та багатоточкові задачі для параболічних рівнянь з виродженнями та особливостями.

Важливим класом рівнянь із виродженими коефіцієнтами є рівняння, що містять оператор Бесселя. Умови розв'язності задач з інтегральними умовами для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь другого порядку з оператором Бесселя за просторовою змінною (B-параболічних рівнянь) встановлено у працях [3, 17], а умови розв'язності локальної багатоточкової задачі для B-параболічного рівняння високого порядку — в роботі [11]. Задачу Коші для гіперболічних рівнянь другого порядку з оператором Бесселя за часом у необмежених областях вивчено у працях [7, 16].

У цій роботі для рівняння (1), що вироджується за змінною r і є параболічним за r стосовно змінної φ, досліджено задачу про знаходження (в класі функцій, аналітичних за r, 2π-періодичних за φ) розв'язку $u(r,\varphi)$, який справджує крайову умову (2). Під час побудови та вивчення властивостей розв'язку цієї задачі виникають малі знаменники у вигляді значень функцій Бесселя півцілого індексу; для оцінювання знизу цих величин застосовано метричний підхід [10]. Зауважимо, що метричні оцінки для значень функцій Бесселя півцілого індексу у науковій літературі відсутні і в цій роботі отримані вперше.

Результати роботи анонсовано в [14].

I. Постановка задачі

Використовуватимемо такі позначення:

$$J_n(r)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}\left(\frac{r}{2}\right)^{2m+n},\ n\geq 0,-$$

функція Бесселя (див. с. 21 у [2] першого роду порядку n, де $\Gamma(q)$, $q\geq 0$, – гамма-функція Ейлера;

$$\omega(\alpha,\nu(k))=\alpha^{k^2}|k|^{\nu(k)},\quad \alpha\in\mathbb{R},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

де $\{\nu(k):k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$ – послідовність додатних дійсних чисел; $E_{\alpha,\nu(k)}$ – простір тригонометричних рядів $g(\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}g_ke^{ik\varphi}$, $g_k\in\mathbb{C}$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, для яких скінченна норма

$$\|g;E_{\alpha,\nu(k)}\|=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}|g_k|^2\omega^2(\alpha,\nu(k))};$$

$E^2_{\alpha,\nu(k)}$ — простір рядів $u(r,\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}u_k(r)e^{ik\varphi}$, коефіцієнти $u_k(r)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ яких є аналітичними за r на відрізку $[0,R]$, норму в $E^2_{\alpha,\nu(k)}$ задамо формулою

$$\|u;E^2_{\alpha,\nu(k)}\|=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{j=0}^{2}\max_{r\in[0,R]}|u_k^{(j)}(r)|^2\omega^2(\alpha,\nu(k))}.$$

У цій роботі в просторі $E^2_{\alpha,\nu(k)}$ досліджуємо розв'язність задачі

$$r\frac{\partial^2u(r,\varphi)}{\partial r^2}-2\frac{\partial^3u(r,\varphi)}{\partial r\partial\varphi^2}+\gamma^2r\frac{\partial^4u(r,\varphi)}{\partial\varphi^4}=0,\qquad(1)$$

[1] Робота частково підтримана ДФФД України (проект №54.1/027).

$$u(R,\varphi)=g(\varphi). \quad (2)$$

де $r\in(0,R)$, $\varphi\in[0,2\pi]$, $\gamma>0$. Рівняння (1) є параболічним (за змінною r стосовно змінної φ) у тому сенсі, що для довільного $\eta\in\mathbb{R}$ і для довільного $r\in(0,R)$ ξ-корені рівняння

$$r\xi^2+2\eta^2\xi+\gamma^2r\eta^4=0,$$

справджують оцінки

$$\mathrm{Re}\xi_j(r,\eta)\le-\delta(R)\eta^2,\quad j\in\{1,2\},$$

де $\delta(R)>0$.

Зауважимо, що до рівняння (1) зводиться (переходом від декартової системи (x,y) до полярної системи (r,φ)) рівняння, яке є аналогом рівняння Трикомі (див. [8, с. 133]) і має вигляд

$$y^4\frac{\partial^4v(x,y)}{\partial x^4}+x^4\frac{\partial^4v(x,y)}{\partial y^4}+F=0,$$

де символ F позначає лінійну комбінацію функцій $v,\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y},\ldots,\frac{\partial^4v}{\partial y\partial x^3}$, коефіцієнти якої є многочленами від x,y.

II. Умови єдиності розв'язку

Розв'язок задачі (1), (2) з простору $E^2_{\alpha,\nu(k)}$ шукаємо у вигляді ряду

$$u(r,\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}u_k(r)e^{ik\varphi}. \quad (3)$$

Кожна з функцій $u_k(r)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, є відповідно розв'язком задачі

$$r\frac{d^2u_k(r)}{dr^2}+2k^2\frac{du_k(r)}{dr}+(\gamma k^2)^2ru_k(r)=0, \quad (4)$$

$$u_k(R)=g_k, \quad (5)$$

де g_k, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, – коефіцієнти Фур'є функції $g(\varphi)$.

Функція $u_k(r)$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, є аналітичною за r, тому вона допускає розвинення у степеневий ряд

$$u_k(r)=\sum_{q=0}^{\infty}a_{k,q}r^q. \quad (6)$$

Підставляючи ряд (6) у рівняння (4), дістанемо, що його коефіцієнти при непарних степенях змінної r дорівнюють нулю

$$a_{k,2q-1}=0,\quad q\in\mathbb{N},$$

а коефіцієнти при парних степенях змінної r виражаються через $a_{k,0}$ і обчислюються за формулами

$$a_{k,2q}=\frac{(-1)^q(\gamma k^2)^{2q}a_{k,0}}{2^q\Gamma(q+1)\prod\limits_{m=1}^{q}(2m-1+2k^2)},\quad q\in\mathbb{N}. \quad (7)$$

Тоді з формул (6), (7) отримуємо, що

$$u_k(r)=a_{k,0}+\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q(\gamma k^2r)^{2q}a_{k,0}}{2^q\Gamma(q+1)\prod\limits_{m=1}^{q}(2m-1+2k^2)}.$$

Враховуючи, що

$$\Gamma(k^2+1/2)=\sqrt{\pi}2^{k^2}\prod_{p=1}^{k^2}(2p-1),$$

$$\prod_{m=1}^{q}(2m-1+2k^2)=\frac{2^q\Gamma(q+k^2+1/2)}{\Gamma(k^2+1/2)},$$

отримуємо

$$u_k(r)=a_{k,0}+\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q(\gamma k^2r)^{2q}\Gamma(k^2+1/2)a_{k,0}}{2^{2q}\Gamma(q+1)\Gamma(q+k^2+1/2)}=$$

$$=\frac{a_{k,0}\Gamma(k^2+1/2)2^{k^2-1/2}}{(\gamma k^2r)^{k^2-1/2}}\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-1)^q(\gamma k^2r/2)^{2q+k^2-1/2}}{\Gamma(q+1)\Gamma(q+k^2+1/2)}=$$

$$=\frac{a_{k,0}\Gamma(k^2+1/2)2^{k^2-1/2}}{(\gamma k^2)^{k^2-1/2}}\frac{J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2r)}{r^{k^2-1/2}}. \quad (8)$$

Якщо $J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2R)\neq0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, то коефіцієнт $a_{k,0}$ можна визначити з умови (5) за формулою

$$a_{k,0}=\frac{(\gamma k^2)^{k^2-1/2}}{\Gamma(k^2+1/2)2^{k^2-1/2}}\frac{R^{k^2-1/2}g_k}{J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2R)}. \quad (9)$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $E^2_{\alpha,\nu(k)}$, $\alpha>0$, $\{\nu(k):k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\subset\mathbb{R}_+$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\quad J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2R)\neq0. \quad (10)$$

Зауваження 1. Для довільного фіксованого рівняння (1) умова (10) виконується для всіх (крім, можливо, зліченної кількості) значень $R>0$. Це випливає з того, що при фіксованих $\gamma>0$ та $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ функція $J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2R)$ є аналітичною за R і на довільному відрізку додатної півосі може мати лише скінченну кількість нулів.

III. Умови існування розв'язку

Надалі вважатимемо, що умова (10) справджується. Тоді з формул (8), (9) отримуємо, що розв'язок задачі (4), (5) зображується формулою

$$u_k(r)=\frac{g_kJ_{k^2-\frac12}(\gamma k^2r)}{J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2R)}\left(\frac{R}{r}\right)^{k^2-\frac12},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}. \quad (11)$$

Із рівностей (3), (11) для розв'язку задачі (1), (2) отримуємо формальне зображення у вигляді ряду

$$u(r,\varphi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{g_kJ_{k^2-\frac12}(\gamma k^2r)}{J_{k^2-\frac12}(\gamma k^2R)}\left(\frac{R}{r}\right)^{k^2-\frac12}e^{ik\varphi}. \quad (12)$$

Для встановлення умов збіжності ряду (12) нам знадобиться таке твердження про оцінки згори функцій $J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r)/r^{k^2-\frac{1}{2}}$ та їх похідних.

Лема 1. *Для довільних $\gamma > 0$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, справджуються оцінки*

$$\max_{r\in[0,R]}\left|\frac{d^q}{dr^q}\left(\frac{J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r)}{r^{k^2-\frac{1}{2}}}\right)\right| \leq C_1\left(\frac{\gamma e}{2}\right)^{k^2}|k|^{2q}, \quad (13)$$

де $q \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, $C_1 = C_1(\gamma) > 0$.

□ *Доведення.* Із формули Пуассона для функцій Бесселя (див. с. 58 у [2]) для довільних $\gamma > 0$, $r \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, отримуємо

$$J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r) = \left(\frac{\gamma k^2 r}{2}\right)^{k^2-\frac{1}{2}}\frac{1}{\Gamma(k^2)}\times$$

$$\times\int_0^\pi \cos(\gamma k^2 r\cos\theta)\sin^{2k^2+1}\theta d\theta. \quad (14)$$

Враховуючи елементарні нерівності

$$|\cos(\gamma k^2 r\cos\theta)\sin^{2k^2+1}\theta| \leq 1,$$

$$\theta\in[0,\pi],\quad \gamma>0,\quad r\in[0,R],\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

а також формулу Стірлінга (див. с. 134 у [4])

$$\Gamma(k^2) = \sqrt{2\pi}|k|^{2k^2-1}e^{-k^2}e^{\frac{\delta_1(k)}{12}}, \quad (15)$$

$$0<\delta_1(k)<1,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

із (14) отримуємо

$$\max_{r\in[0,R]}\left|\frac{J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r)}{r^{k^2-\frac{1}{2}}}\right| \leq C_2\left(\frac{\gamma e}{2}\right)^{k^2},$$

$C_2 = \sqrt{\gamma\pi}/2$. Диференціюючи рівність (14) q разів за змінною r, одержуємо, що

$$\frac{d^q}{dr^q}\left(\frac{J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r)}{r^{k^2-\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{\gamma k^2}{2}\right)^{k^2-\frac{1}{2}}\frac{(\gamma k^2)^q}{\Gamma(k^2)}\times$$

$$\times\int_0^\pi \cos^q\theta\sin^{2k^2-1}\theta\cos(\gamma k^2 r\cos\theta + q\pi/2)d\theta. \quad (16)$$

Із формул (16) на підставі (15) та елементарних перетворень отримуємо нерівності

$$\max_{r\in[0,R]}\left|\frac{d^q}{dr^q}\left(\frac{J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r)}{r^{k^2-\frac{1}{2}}}\right)\right| \leq C_3\left(\frac{\gamma e}{2}\right)^{k^2}|k|^{2q}, \quad (17)$$

де $C_3 = C_3(\gamma) > 0$, $q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, з яких випливає твердження леми 1. ■

Встановимо достатні умови існування розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (10) *та існують $\alpha_1 > 0$ і послідовність $\{\nu_1(k) : k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\subset\mathbb{R}_+$ такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *значень $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ виконується нерівність*

$$|J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 R)| \geq \omega(\alpha_1, -\nu_1(k)). \quad (18)$$

Якщо $g\in E_{\alpha_0,\nu_0(k)}$, де

$$\alpha_0 = \frac{\alpha\gamma e R}{2\alpha_1},\quad \nu_0(k) = \nu(k)+\nu_1(k)+4,$$

то в просторі $E^2_{\alpha,\nu(k)}$ існує розв'язок задачі (1), (2), *який зображується рядом* (12) *і неперервно залежить від функції g.*

□ *Доведення.* Із формул (11), (18) на підставі оцінок (13) леми 1 для кожного $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ отримуємо

$$\sum_{q=0}^{2}\max_{r\in[0,R]}|u_k^{(q)}(r)| \leq \frac{R^{k^2-1/2}|g_k|}{|J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 R)|}\times$$

$$\times\sum_{q=0}^{2}\max_{r\in[0,R]}\left|\frac{d^q}{dr^q}\left(\frac{J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 r)}{r^{k^2-\frac{1}{2}}}\right)\right| \leq$$

$$\leq C_4\omega\left(\frac{e\gamma R}{2\alpha_1},\nu_1(k)+4\right)|g_k|, C_4>0. \quad (19)$$

Отже, із (19) маємо

$$\|u;E^2_{\alpha,\nu(k)}\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{q=0}^{2}\max_{r\in[0,R]}|u_k^{(q)}(r)|^2\omega^2(\alpha,\nu(k)) \leq$$

$$\leq C_5\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\omega^2\left(\frac{\alpha e\gamma R}{2\alpha_1},\nu(k)+\nu_1(k)+4\right)|g_k|^2 =$$

$$= C_5\|g;E_{\alpha_0,\nu_0(k)}\|^2. \quad (20)$$

Із (20) випливає доведення теореми. ■

IV. Оцінки малих знаменників

Збіжність ряду (12) у просторах $E^2_{\alpha,\nu(k)}$, $\alpha>0$, $\{\nu(k) : k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}\subset\mathbb{R}_+$, пов'язана із можливістю виконання оцінок (18). З'ясуємо питання про їх виконання. Для цього встановимо допоміжні леми 2, 3.

Лема 2. *Для довільного $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ та $\lambda>0$ справджується формула*

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n\left(t^{n+\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda t)\right) = \sqrt{2/\pi}\lambda^{n-\frac{1}{2}}\sin(\lambda t),\ t>0. \quad (21)$$

□ *Доведення.* Використаємо метод математичної індукції за n. Для $n=0$ твердження леми випливає з відомої (див. с. 66 у [2]) формули

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{2/(\pi z)}\sin z, \quad z>0.$$

Припустимо, що лема 3 правильна при $n=m$, $m\geq 1$. Доведемо її істинність при $n=m+1$. Очевидно, що

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\left(t^{m+\frac{3}{2}}J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t)\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{m}\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\left(t^{m+\frac{3}{2}}J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t)\right). \quad (22)$$

Із зображення функції Бесселя у вигляді ряду отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(t^{m+\frac{3}{2}}J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t)\right)=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{m+\frac{3}{2}}\times$$
$$\times\frac{d}{dt}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+m+\frac{5}{2})}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+2m+3}\right)=$$
$$=\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{m+\frac{1}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l+2m+3)}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+m+\frac{5}{2})}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+2m+2}. \quad (23)$$

На підставі властивості гамма-функції

$$\Gamma(l+m+5/2)=\frac{(2l+2m+3)}{2}\Gamma(l+m+3/2)$$

із рівності (23) отримуємо

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\left(t^{m+\frac{3}{2}}J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t)\right)=\lambda t^{m+\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{\Gamma(l+1)\Gamma(l+m+\frac{3}{2})}\left(\frac{\lambda t}{2}\right)^{2l+m+\frac{1}{2}}=$$
$$=\lambda t^{m+\frac{1}{2}}J_{m+\frac{1}{2}}(\lambda t). \quad (24)$$

Із формул (22), (24) та припущення індукції одержуємо

$$\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{m+1}\left(t^{m+\frac{3}{2}}J_{m+\frac{3}{2}}(\lambda t)\right)=$$
$$=\sqrt{2/\pi}\lambda^{m+\frac{1}{2}}\sin(\lambda t), \quad t>0, \quad \lambda>0.$$

Отже, твердження леми справедливе при $n=m+1$. Лему доведено. ■

Лема 3. *Нехай $f(t)\in C^n(a,b)$ є такою, що для всіх $t\in(a,b)$ виконується нерівність*

$$\left|\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{n}f(t)\right|\geq\delta>0.$$

Тоді для довільного $\varepsilon>0$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in(a,b):|f(t)|<\varepsilon\}\leq\frac{c_n}{a}\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{\delta}}, \quad c_n=2n\sqrt[n]{n!}.$$

□ *Доведення.* Застосуємо метод математичної індукції. Нехай $n=1$, $f(t)\in C^1(a,b)$, і нехай

$$\forall t\in(a,b) \quad \left|\frac{1}{t}\frac{d}{dt}f(t)\right|\geq\delta.$$

Тоді $|f'(t)|\geq\delta t>\delta a$ для всіх $t\in(a,b)$. На підставі леми 1 із [13] отримуємо, що

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in(a,b):|f(t)|<\varepsilon\}\leq\frac{2}{a}\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Припустимо, що лема 3 є правильною для $n=m$, $m\geq 1$. Доведемо її істинність для $n=m+1$.

Нехай $f(t)\in C^{m+1}(a,b)$ і нехай

$$\left|\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{m+1}f(t)\right|\geq\delta>0, \quad t\in(a,b).$$

Для кожного $\eta>0$ розглянемо множини

$$A_1(\eta)=\{t\in(a,b):|h(t)|>\eta\},$$
$$A_2(\eta)=\{t\in(a,b):|h(t)|\leq\eta\},$$

де $h(t)=\frac{1}{t}\frac{d}{dt}f(t)$. Оскільки $\left|\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^m h(t)\right|>\delta$ для всіх $t\in(a,b)$, то згідно з припущенням індукції маємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}A_2(\eta)\leq\frac{c_m}{a}\sqrt[m]{\frac{\eta}{\delta}}. \quad (25)$$

Якщо $A_1(\eta)=\emptyset$, то $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}A_1(\eta)=0$, якщо ж $A_1(\eta)\neq\emptyset$, то за теоремою (див с. 14 у [4]) про структуру відкритих множин в $\mathbb{R}$ множина $A_1(\eta)$ є об'єднанням попарно неперетинних інтервалів. На кожному з таких інтервалів (крім, можливо, двох крайніх) функція $\frac{1}{t}\frac{d}{dt}h(t)$ за узагальненою теоремою Ролля [9, с. 63] має хоча б один нуль. Оскільки

$$\left|\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{m}(h(t)\pm\eta)\right|=\left|\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^{m}h(t)\right|\geq\delta>0$$

для всіх $t\in(a,b)$ то з узагальненої теореми Ролля випливає, що функція $\frac{1}{t}\frac{d}{dt}h(t)$ може мати на (a,b) не більше $(m-1)$ нулів. Отже, кількість проміжків множини $A_1(\eta)$ не перевищує $(m+1)$. Застосовуючи на кожному з цих проміжків базу індукції, дістанемо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in A_1(\eta):|f(t)|<\varepsilon\}\leq\frac{2(m+1)}{a}\frac{\varepsilon}{\eta}. \quad (26)$$

Зауважимо, що для будь-якого $\eta>0$

$$\{t\in(a,b):|f(t)|<\varepsilon\}\subset\{t\in A_1(\eta):$$
$$|f(t)|<\varepsilon\}\cup\{t\in A_2(\eta):|f(t)|<\varepsilon\}. \quad (27)$$

Тоді із включення (27) на підставі адитивності міри Лебега та оцінок (25), (26) отримуємо, що для довільного $\eta>0$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in(a,b):|f(t)|<\varepsilon\}\leq\frac{2(m+1)}{a}\frac{\varepsilon}{\eta}+\frac{c_m}{a}\sqrt[m]{\frac{\eta}{\delta}}.$$

Досліджуючи функцію

$$\psi(\eta)=\frac{2(m+1)}{a}\frac{\varepsilon}{\eta}+\frac{2m\sqrt[m]{m!}}{a}\sqrt[m]{\frac{\eta}{\delta}}$$

на мінімум за змінною $\eta > 0$ ($a, m, \varepsilon, \delta$ – фіксовані) знаходимо, що

$$\min_{\eta>0}\psi(\eta) = \frac{2(m+1)\sqrt[m+1]{(m+1)!}}{a}\sqrt[m+1]{\frac{\varepsilon}{\delta}}.$$

Отже,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t \in (a,b) : |f(t)| < \varepsilon\} \leq$$
$$\leq \frac{2(m+1)\sqrt[m+1]{(m+1)!}}{a}\sqrt[m+1]{\frac{\varepsilon}{\delta}} = \frac{c_{m+1}}{a}\sqrt[m+1]{\frac{\varepsilon}{\delta}},$$

тобто твердження леми справедливе і для $n = m+1$. Лему доведено. ■

Зауваження 2. У роботах [10, 13, 18] встановлено оцінки мір множин

$$\{t \in (a,b) : |f(t)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0, \tag{28}$$

якщо для всіх $t \in (a,b)$ виконується нерівність

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t)\right| \geq \delta > 0. \tag{29}$$

Лема 3 цієї роботи поширює результати праць [10, 13, 18] про оцінки мір множин (28) на випадок, коли в умові (29) диференціальний оператор $\left(\frac{d}{dt}\right)^n$ замінено виразом $\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)^n$.

Встановимо тепер результат про виконання оцінок (18).

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $R \in [R_0, R_1]$ нерівність (18) виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, якщо $\alpha_1 = e\gamma/R_0$, а послідовність $\{\nu_1(k) : k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\} \subset \mathbb{R}_+$ справджує умову $\nu_1(k) = (5+\sigma_1)k^2 - 2 + \sigma_2, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$.*

□ *Доведення.* Розіб'ємо відрізок $[R_0, R_1]$ на такі проміжки $W_q(k)$, $q \in \{1,\ldots,N_1(k)\}$, та $V_q(k)$, $q \in \{1,\ldots,N_2(k)\}$, (кінцями яких є точки R_0, R_1 та R-нулі функцій $\sin(\gamma k^2 R) \pm \frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}}$, $\sigma_2 > 0$), що

$$\forall R \in W_q(k) \quad |\sin(\gamma k^2 R)| \geq \frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}},$$

$$\forall R \in V_q(k) \quad |\sin(\gamma k^2 R)| \leq \frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}}.$$

Зрозуміло, що $|N_j(k)| \leq C_6|k|^2$, $j \in \{1,2\}$. Згідно з побудовою розбиття для кожного проміжка $V_q(k)$, $q \in \{1,\ldots,N_2(k)\}$, існує $l \in \mathbb{Z}$ таке, що

$$V_q(k) \subset \left[\frac{1}{\gamma|k|^2}\left(l\pi - \arcsin\frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}}\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{\gamma|k|^2}\left(l\pi + \arcsin\frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}}\right)\right].$$

Тому

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}V_q(k) \leq \frac{2}{\gamma|k|^2}\arcsin\frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}}, q \in \{1,\ldots,N_2(k)\}. \tag{30}$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ розглянемо множини

$$Q(k) = \left\{R \in [R_0,R_1] : |R^{k^2-\frac{1}{2}}J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 R)| \leq \rho(k)\right\},$$

$$S_q(k) = \left\{R \in W_q(k) : |R^{k^2-\frac{1}{2}}J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 R)| \leq \rho(k)\right\},$$
$$q \in \{1,\ldots,N_1(k)\},$$

$$\rho(k) = \sqrt{2/\pi}(e\gamma)^{k^2-3/2}|k|^{-(5+\sigma_1)|k|^2+2-\sigma_2}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

$\sigma_1 > 0$. На підставі леми 3 отримуємо, що для всіх $R \in W_q(k)$, $q \in \{1,\ldots,N_1(k)\}$, виконуються оцінки

$$\left|\left(\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\right)^{k^2-1}\left(R^{k^2-\frac{1}{2}}J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 R)\right)\right| \geq$$
$$\geq \sqrt{2/\pi}\gamma^{k^2-3/2}|k|^{2k^2-4-\sigma_2}, \ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \tag{31}$$

Із леми 3 на підставі оцінок (15), (31) отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}S_q(k) \leq \frac{2(k^2-1)}{R_0}\left(\frac{\sqrt{\pi/2}(k^2-1)!\rho(k)}{\gamma^{k^2-\frac{3}{2}}|k|^{2k^2-4-\sigma_2}}\right)^{\frac{1}{k^2-1}} \leq$$
$$\leq \frac{C_7}{|k|^{3+\sigma_1}}, \ q \in \{1,\ldots,N_1(k)\}, k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{32}$$

де $C_7 = C_7(R_0,\pi,\gamma)$. Очевидно, що

$$Q(k) \subset \left(\bigcup_{q=1}^{N_1(k)} S_q(k)\right)\bigcup\left(\bigcup_{q=1}^{N_2(k)}(Q(k)\cap V_q(k))\right), \tag{33}$$

де $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Із (30), (32), (33), та адитивності міри Лебега отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}Q(k) \leq \sum_{q=1}^{N_1(k)}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}S_q(k) + + \sum_{q=1}^{N_2(k)}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}V_q(k) \leq$$
$$\leq \frac{C_8}{|k|^{1+\sigma_1}} + C_9\arcsin\frac{1}{|k|^{1+\sigma_2}} \leq \frac{C_{10}}{|k|^{1+\sigma_3}}, \ k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},$$

де $\sigma_3 = \min\{\sigma_1,\sigma_2\}$. У такий спосіб ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}Q_k$ є збіжним, тоді за лемою Бореля-Кантеллі [15, с. 13] оцінка

$$|J_{k^2-\frac{1}{2}}(\gamma k^2 R)| > \sqrt{2R_1/(\pi\gamma^3)}\frac{(e\gamma/R_0)^{k^2}}{|k|^{(5+\sigma_1)|k|^2-2+\sigma}},$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $R \in [R_0,R_1]$ для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Теорему доведено. ■

Зауваження 3. Відзначимо, що наявність діофантових оцінок знизу для значень функцій Бесселя дає можливість описати спектр розв'язного поворотно-інваріантного розширення оператора Лапласа у крузі (див. с. 220 у [1]). Однак у [1] такі оцінки знизу накладені аксіоматично, а питання про можливість виконання цих оцінок з погляду метричного аналізу не проводилося.

З теорем 2, 3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай* $g \in E_{\alpha_2, \nu_2(k)}$, *де*

$$\alpha_2 = \frac{\alpha R_0 R}{2}, \nu_2(k) = \nu(k) + (5 + \sigma_1)k^2 + 2 + \sigma_2,$$

$\sigma_1, \sigma_2 > 0$. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $R \in [R_0, R_1]$ *в просторі* $E^2_{\alpha, \nu(k)}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який зображується рядом* (12) *і неперервно залежить від функції* g.

Висновки

У спеціальних вагових просторах встановлено умови коректної розв'язності крайової задачі для одного виродженого параболічного рівняння і показано, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега на прямій) чисел $R \in [R_0, R_1]$.

Методи, описані в цій роботі, можна поширити на випадок багатоточкових задач для рівнянь із частиннними похідними високого порядку, а також систем рівнянь, коефіцієнти яких містять виродження.

Література

[1] *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – К.: Наук. думка, 2002. – 316 с.

[2] *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций. Ч. I. – М: Изд. иностр. литер., 1949. – 787 с.

[3] *Гарипов И. Б., Мавлявиев Р. М.* Краевая задача для одного параболического уравнения с оператором Бесселя и интегральным условием первого рода // Изв. Тул. ГУ. Естественные науки. Вып. 1. – Тула: Изд. Тул. ГУ. 2013. – С. 5–14.

[4] *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз: у 2-х ч. Ч. 2. – К.: Либідь, 1993. – 304 с.

[5] *Коренев Б. Г.* Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 460 с.

[6] *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.

[7] *Мухлисов Ф. Г., Гафурова С. М.* Потенциалы для некоторых сингулярных волновых уравнений // Сб. науч. тр. "Неклассические уравнения математической физики". – Новосибирск.: Изд.-во Ин-та математики СО АНРФ. – 2002. – С. 132–139.

[8] *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

[9] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. – 432 с.

[10] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[11] *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для B-параболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, №3. – С. 394–405.

[12] *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями: Монографія. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.

[13] *Симотюк М. М.* Про оцінки мір множин, на яких модуль гладкої функції обмежений зверху // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, №4. – С. 90–95.

[14] *Симотюк М. М., Тимків І. Р.* Двоточкова задача для рівняння з виродженими коефіцієнтами при найстарших похідних // Нелінійні проблеми аналізу: V Всеукр. наук. конф.: тез. доп. (19–21 вересня 2013 р. Івано-Франківськ)– Івано-Франківськ: Вид-во Прикарп. нац. ун-ту ім. В. Стефаника, 2013. – С. 67.

[15] *Спринжук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

[16] *Чепанова Н. В.* Решение задачи Коши для одного сингулярного B-гиперболического уравнения методом Фурье-Бесселя // Весник ТГГПУ. – 2008. – **13**, №2. – С. 27–29.

[17] *Bouziani A.* On thee-point boundary value problem with a weighted integral condition for a classe of singular parabolic equations // Abstract and Applied Analysis. – 2002. – **7**, No10. – P. 517–530.

[18] *Ilkiv V. S., Maherovska T. V.* Exact estimate for the level set of the modulus of a function with high-order constant-sign derivativ // Mat. stud. – 2010. – **34**. – P. 57–64.

[19] *Rassias J. M., Karimov E. T.* Boundary-values problem with non-local conditions for degenerate parabolic equations // Contemporary Analisis and Applied mathematics. – 2013. – **1**, №1. – P.42–48.

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ВЫРОЖДЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Симотюк М. М.[a], Тымкив И. Р.[b]

[a] *Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины (79060, Львов, ул. Научная 3-б, Украина)*
[b] *Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа (76090, Ивано-Франковск, ул. Карпатская 5, Украина)*

Исследована краевая задача для одного вырожденного по радиальной переменной параболического уравнения. Установлены условия существования и единственности решения задачи. С помощью метрического подхода установлена оценка снизу для значений функций Бесселя полуцелого индекса, входящих знаменателями в выражения для коэффициентов ряда Фурье, представляющего решение задачи.

Ключевые слова: вырожденное уравнение, функция Бесселя, малый знаменатель, мера Лебега.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.42

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE A DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

Symotyuk M. M.[a], Tymkiv I. R.[b]

[a] *Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine (79060, Lviv, 3-b Naukova Str., Ukraine)*
[b] *Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas (76019, Ivano-Frankivsk, 15, Karpatska Str., Ukraine)*

We investigate a boundary problem for some degenerate in radial variable parabolic equations. The theorems of existence and uniqueness the solution of the problem, are established. Using metric approach thake is obtained a lover estimate for values of Bessel function with semi integer index. The values are denominators in expression for coefficients of Fourier series, that is described a problem solutions.

Key words: degenerate equations, Bessel functions, small denominator, Lebesgue measure.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

UDK: УДК 517.95+511.42