УДК 528.32

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ ПРОСТОРОВИХ КООРДИНАТ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФОРМАЛІЗМУ ВЕКТОРІВ ГІББСА

В. Мельник, В. Расюн
Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

Ключові слова: вектори Гіббса, просторова орієнтація, системи координат, результуючі нахили.

Постановка проблеми

Необхідність перетворення просторових прямокутних координат з однієї системи в іншу досить часто виникає в геодезії та фотограмметрії [1, 2]. Так, виконавши з різних знімальних точок електронним тахеометром знімання (рис. 1), наприклад, реконструйованих будівель, зводять отримані результати знімання в одну загальну модель.

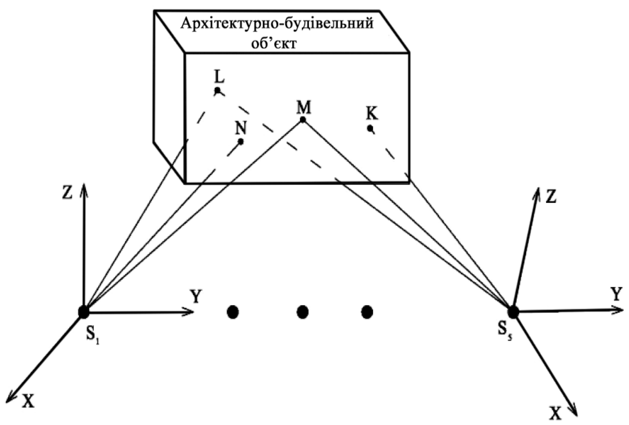

Рис. 1. До перетворення координат (1)

Під час фотограмметричного знімання також виникає необхідність перетворення систем координат. Проте у фотограмметрії цей процес поділено на два етапи. Спочатку знімки, складові стереопари, взаємно орієнтують одним з відомих способів незалежно один від одного й отримують окремі моделі в своїх системах координат [1], наприклад, $S_1X_1Y_1Z_1$ і $S_5X_5Y_5Z_5$. На цьому етапі не виникає ніяких труднощів. Потім ці моделі об'єднують у загальну, тобто отримують модель у єдиній системі координат, наприклад, у $S_1X_1Y_1Z_1$. Для цього можна скористатися відомими формулами переходу з однієї системи координат в іншу [2]:

$$R_1 = R_0 + A_5R_5t\,. \quad (1)$$

У нашому випадку R_1 і R_5 – вектори, що визначають положення точки M_1 моделі в системі координат $S_1X_1Y_1Z_1$ і $S_5X_5Y_5Z_5$ відповідно; R_0 – вектор, що задає положення початку системи координат $S_5X_5Y_5Z_5$ відносно $S_1X_1Y_1Z_1$; A_5 – ортогональна матриця повороту однієї системи координат відносно іншої; t – масштабний коефіцієнт другої моделі відносно першої.

Щоб скористатися рівнянням (1), необхідно знати R_0 A_5, t, значення яких можна знайти за спільними точками двох моделей. Відомий спосіб знаходження цих величин потребує знання наближених значень елементів орієнтування моделі. Їх можна отримати, виконавши польові геодезичні вимірювання. Однак цей процес доволі трудомісткий і складний, особливо для отримання даних кутової орієнтації систем координат (рис. 1). Тому пропонується обійтися без наближених значень елементів орієнтування моделі. Для цього спочатку переносять початок систем координат першої та другої моделей $S_1X_1Y_1Z_1$ і $S_5X_5Y_5Z_5$ в будь-яку зі спільних точок, наприклад, у точку M_1 або в центр ваги точок моделі. Тоді рівняння (1) перетвориться до вигляду

$$R_{1M} = A_5R_{5M}t\ , \quad (2)$$

де R_{1M} та R_{5M} – вектори, що визначають положення точки моделі в системах координат $M_1X_1Y_1Z_1$ і $M_1X_5Y_5Z_5$ відповідно. Для кутової орієнтації перетворених систем координат доцільно використовувати математичний формалізм векторів Гіббса [3, 4].

Особливістю методу векторів Гіббса, на відміну від відомої теорії незалежних моделей, є можливість визначати взаємну орієнтацію двох моделей за будь-яких (від 0º до 360º) значень кутів взаємного орієнтування цих моделей.

Зв'язок теми з важливими науковими і практичними завданнями

Ці дослідження пов'язані з науково-дослідною роботою "Дослідження сучасного стану та розробка засобами ГІС-технологій і РЕМ-мікроскопії засад раціонального землекористування ерозійно-деградованих земель Волинської височини" (номер держреєстрації 0111 U 002146), що виконувалась на кафедрі геодезії, землевпорядкування та кадастру Східноєвропейського національного університету ім. Лесі Українки (2011–2012 рр.).

Аналіз останніх досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Актуальність статті підтверджується публікаціями [9,10], в яких акцентують на важливості вказаної теми.

Постановка завдання

Мета статті – конкретизувати математичний формалізм векторів Гіббса стосовно завдань просторового орієнтування координатних систем та отримання у векторній формі виразу результуючого нахилу.

Виклад основного матеріалу

I. Опис просторової орієнтації координатних систем векторами Гіббса

Фізично будь-яке обертання являє собою поворот на кут Ω навколо осі, що характеризується одиничним вектором $\vec{C}$ із напрямними косинусами $\left(C_1, C_2, C_3\right)$ [2, 5, 6]. Закон перетворення *i*-го вектора $\vec{g}_{(i)}$ в $\vec{r}_{(i)}$ записується в такий спосіб:

$$\vec{r}_{(i)} = \hat{B}\,\vec{g}_{(i)} \tag{3}$$

де $\hat{B}$ – оператор обертання.

Наприклад, в електронній мікроскопії кристалів, як один з ефективних методів визначення оператора $\hat{B}$, можна використати формалізм векторів Гіббса $\vec{G}$ [7]. Запишемо вектори Гіббса в традиційній літерації. Вектор Гіббса, як відомо [3], задається трьома компонентами $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$. Компоненти вектора $\vec{G}$ за визначенням поєднані з кутом розвороту Ω і напрямними косинусами $\left(C_1, C_2, C_3\right)$ одиничного вектора $\vec{C}$, орієнтованого уздовж осі повороту. Цей зв'язок має вигляд [2]: $\vec{G} = \vec{C} \cdot tg\dfrac{\Omega}{2}$. Математично перетворення вектора $\vec{g}_{(i)}$ на $\vec{r}_{(i)}$ записується так:

$$\vec{r}_{(i)} = \cos^2\frac{\Omega}{2}\left[\left(1-\left|G^2\right|\right)\vec{g}_{(i)} + 2\left(\vec{G}\cdot\vec{g}_{(i)}\right)\vec{G} + 2\vec{G}\times\vec{g}_{(i)}\right]. \tag{4}$$

Тут векторний і скалярний добуток слід записувати за звичайними формулами, а вектори $\vec{r}_{(i)}$, $\vec{g}_{(i)}$, $\vec{G}$ задавати в єдиній системі координат. З метою спрощення обчислень рекомендується [5] використовувати для розрахунку компонентів $\vec{G}$ не рівняння (4), а властивість векторів Гіббса, що безпосередньо отримується з визначення:

$$\vec{G}\times\left(\vec{r}_{(i)} + \vec{g}_{(i)}\right) = \left(\vec{r}_{(i)} - \vec{g}_{(i)}\right). \tag{5}$$

Використовуючи цю властивість, мінімізують різницю

$$F\left(G_1, G_2, G_3\right) = \\ = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{G}\times\left(\vec{r}_{(i)} + \vec{g}_{(i)}\right) - \left(\vec{r}_{(i)} - \vec{g}_{(i)}\right)\right]^2 \xrightarrow{G_1, G_2, G_3} \min. \tag{6}$$

На відміну від (4), співвідношення (6) лінійне стосовно G_1, G_2, G_3.

Після переходу від векторної форми до координатної й нескладних перетворень одержимо систему трьох рівнянь із трьома невідомими G_1, G_2, G_3 у такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

де

$$a_{11} = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{r}_{i2} + g_{i2}\right)^2 + \left(\vec{r}_{i3} + g_{i3}\right)^2\right];$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{r}_{i1} + g_{i1}\right)^2 + \left(\vec{r}_{i3} + g_{i3}\right)^2\right];$$

$$a_{33} = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\vec{r}_{i1} + g_{i1}\right)^2 + \left(\vec{r}_{i2} + g_{i2}\right)^2\right];$$

$$a_{lm} = -\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_{il} + g_{il}\right)\ \left(\vec{r}_{im} + g_{im}\right), l \neq m;$$

$$b_1 = 2\sum_{i=1}^{N}\left(g_{i2}\vec{r}_{i3} - g_{i3}\vec{r}_{i2}\right);$$

$$b_2 = 2\sum_{i=1}^{N}\left(g_{i3}\vec{r}_{i1} - g_{i1}\vec{r}_{i3}\right);$$

$$b_3 = 2\sum_{i=1}^{N}\left(g_{i1}\vec{r}_{i2} - g_{i2}\vec{r}_{i1}\right).$$

Права частина містить тільки експериментально визначувані параметри опорних векторів у двох системах координат, тобто $\vec{r}_{(i)}$ і $\vec{g}_{(i)}$. За оцінку точності вимірів у цьому випадку приймають середньоквадратичне відхилення виміряних величин, тобто

$$s = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_{(i)} - \vec{r}_{(i)}\right)^2, \tag{8}$$

де $\vec{r}_{(i)}$ обчислюється за формулою (4).

II. Варіант векторного визначення результуючого нахилу

Результуючий нахил має принципове значення під час дослідження кристалів і просторової структури складних дислокаційних конфігурацій, коли зразку необхідно задати заздалегідь вибрані нахили [7]. Це питання розглянемо, використавши позначення векторів Гіббса через $\vec{w}_0$, як прийнято в електронній мікроскопії.

Нехай поворот навколо осі характеризується вектором $\vec{w}_0$, напрямок якого збігається з віссю обертання, а модуль дорівнює $tg\delta/2$, тобто $\left|\vec{w}_0\right| = tg\delta/2$. У цьому випадку вектор результуючого повороту, який отримують із двох послідовних поворотів з векторами $\vec{w}_1$ і $\vec{w}_2$, обчислюють за формулою [8]:

$$\vec{w} = \frac{\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - \vec{w}_1\times\vec{w}_2}{1 - \vec{w}_1\cdot\vec{w}_2}, \tag{9}$$

де $\vec{w}_1\times\vec{w}_2$ – векторний добуток, $\vec{w}_1\cdot\vec{w}_2$ – скалярний добуток. Приймемо $\left|\vec{w}_1\right| = tg\varphi/2$; $\left|\vec{w}_2\right| = tg\psi/2$.

Тоді

$$\left|\vec{w}_1 + \vec{w}_2\right| = \sqrt{\left|\vec{w}_1\right|^2 + \left|\vec{w}_2\right|^2} = \sqrt{tg^2\varphi/2 + tg^2\psi/2}$$

і з урахуванням перпендикулярності векторів $\vec{w}_1$ і $\vec{w}_2$

$$ctg\varepsilon = \pm\frac{\left|\vec{w}_1 + \vec{w}_2\right|}{\left|\vec{w}_1\times\vec{w}_2\right|} = \pm\frac{\sqrt{tg^2\varphi/2 + tg^2\psi/2}}{tg\varphi/2 + tg\psi/2}$$

Результуючий кут δ, що відповідає повороту навколо осі $\vec{w}$, дорівнює за визначенням $tg\delta/2 = \left|\vec{w}\right|$.

Тому

$$\vec{w}^2 = \vec{w}_1^{\,2} + \vec{w}_2^{\,2} + \left(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\right)^2 - 2\vec{w}_1\left(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\right) -$$
$$-2\vec{w}_2\left(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\right) = \vec{w}_1^{\,2} + \vec{w}_2^{\,2} + \left(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\right)^2;$$
$$\vec{w}_1\left(\vec{w}_1 \times \vec{w}_2\right)^2 = 0.$$

Остаточно

$$tg\delta/2 = \left|\vec{w}\right| = \sqrt{tg^2\varphi/2 + tg^2\psi/2 + tg^2\varphi/2 \cdot tg^2\psi/2}. \quad (10)$$

Знаючи результуючий нахил, оператор перетворення B можна обчислити за відомою формулою [9].

$$B = \begin{bmatrix} \left(1-\sigma_1^2\right)\cos\delta + \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\left(1-\cos\delta\right)+\sigma_3\sin\delta & \sigma_1\sigma_3\left(1-\cos\delta\right)-\sigma_2\sin\delta \\ \sigma_1\sigma_2\left(1-\cos\delta\right)-\sigma_3\sin\delta & \left(1-\sigma_2^2\right)\cos\delta+\sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3\left(1-\cos\delta\right)+\sigma_1\sin\delta \\ \sigma_1\sigma_3\left(1-\cos\delta\right)+\sigma_2\sin\delta & \sigma_2\sigma_3\left(1-\cos\delta\right)-\sigma_1\sin\delta & \left(1-\sigma_3^2\right)\cos\delta+\sigma_3^2 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

де $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – напрямні косинуси осі повороту.

Висновки

Перевірку коректності викладеного методу виконано на математичних моделях. Вона підтвердила його ефективність у геодезії та фотограмметрії з використанням сучасного комп'ютера.

Література

1. Дорожинський О. Л. Фотограмметрія / Дорожинський О. Л., Тукай Р. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2008. – 332 с.
2. Урмаев М. С. К теории преобразований координат в геодезии // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. 2003. – № 2. – с. 8 – 13.
3. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Корн Г., Корн Т. – М.: Наука, 1973. – 681 с.
4. Кочин Н. В. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1985. – 424 с.
5. Тронева Н. В. Электронно-зондовый микроанализ неоднородных поверхностей (в свете теории распознавания образов) / Тронева Н. В., Тронева М. А. – М.: Металлургия, 1996. – 208 с.
6. Барабанов О. О. Математические задачи дальномерной навигации / Барабанов О. О., Барабанова Л. П. – М.: Физматлит, 2007. – 272 с.
7. Мельник В. М. Кількісна стереомікрофрактографія: монографія [Текст] / Мельник В. М., Шостак А. В. – Луцьк: Твердиня, 2010. – 460 с.
8. Konitz H. Mathematische Gesichtspunkte beim Gebrach Von Doppelkippeikrichtungen in der Elektronenmikroskopie // Optik, 1975. – V. 43 – № 1.
9. Коугия В. А., Конашин Н. В. Определение градиентным методом элементов связи между трехмерными системами координат // Изв. вузов. 2008 – № 2. – С. 22–28.
10. Тюфлин Ю. С., Степаньянц Д. Г. Способы решения фотограмметрических задач без последовательных поворотов // Изв. вузов. Сер. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2004. – № 4. – С. 47–50.

Про перетворення просторових координат із застосуванням формалізму векторів Гіббса

В. Мельник, В. Расюн

Розглянуто питання визначення просторової орієнтації координатних систем, результуючого нахилу та перетворення координат із застосуванням векторів Гіббса.

О преобразовании пространственных координат с применением формализма векторов Гиббса

В. Мельник, В. Расюн

Рассмотрены вопросы определения пространственной ориентации координатных систем, результирующего наклона и преобразования координат с применением векторов Гиббса.

On the transformation of the spatial coordinates using Gibbs formalism vectors

V. Melnyk, V. Rasyun

The article deals with the issues of determining the spatial orientation of coordinate systems, the resulting slope and coordinate transformation using vectors Gibbs.