УДК 528.06+528.1

МАТЕМАТИЧНЕ ОПРАЦЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ПОДВІЙНИХ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ

В. А. Рябчій
Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет"

В. В. Рябчій
Національний університет "Львівська політехніка"

Ключові слова: подвійні нерівноточні виміри, систематична похибка, критерії значущості систематичної похибки, довірча ймовірність.

Постановка проблеми

У практиці геодезичних вимірів існують випадки виконання подвійних нерівноточних вимірів, наведені у навчальній та довідковій літературі. Перший – подвійні виміри між собою нерівноточні, а у кожній парі – рівноточні. Другий – подвійні виміри між собою і у кожній парі також нерівноточні [1–6, 8, 9, 12, 13].

Аналіз випадків подвійних нерівноточних вимірів показав, що є ще такий випадок – подвійні виміри між собою рівноточні, а у кожній парі – нерівноточні, тобто якщо значення тих самих величин одержано різними за точністю приладами. Наприклад, горизонтальні кути теодолітного ходу виміряні двічі, але різними за точністю теодолітами або електронними тахеометрами.

У науковій та навчальній літературі вказано, що систематична похибка обчислюється, а потім виключається з різниць без урахування ваг цих різниць. Із середніх значень подвійних нерівноточних вимірів кожної пари вона не виключається.

Наведені різні критерії встановлення значущості систематичної похибки не дають змогу дійти того самого висновку, тобто доволі часто одержані результати обчислення дають протилежні висновки.

Встановлення довірчої ймовірності, значення якої необхідне для визначення коефіцієнта Стьюдента, зовсім не обґрунтоване.

Вочевидь розв'язання порушених питань значно покращить математичну обробку результатів подвійних нерівноточних вимірів та підвищить їх точність.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

У науковій та навчальній літературі [1–6, 8, 12] вказано, що під час нерівноточних подвійних вимірів у випадках значущості систематичної похибки її необхідно визначати фактично за формулою загальної арифметичної середини:

$$\theta = \frac{\Sigma pd}{\Sigma p}, \tag{1}$$

потім виключати з кожної різниці:

$$d_i' = d_i - \theta, \tag{2}$$

де θ – систематична похибка у разі подвійних нерівноточних вимірів.

Такий підхід виключення систематичної похибки можливий тільки у тому випадку, якщо вона у кожній нерівноточній різниці однакова, що вказано у [5], тобто, ймовірно, це можливо, коли розглядається третій випадок подвійних нерівноточних вимірів.

У першому випадку подвійних нерівноточних вимірів значення середнього у парі обчислюють за формулою простої арифметичної середини, а у другому – за формулою загальної арифметичної середини.

$$\bar{x}_i = \frac{x_i p_i + x_i' p_i'}{p_i + p_i'}. \tag{3}$$

Автори книги [6] слушно зауважують, що до кожної різниці необхідно підходити диференційовано, відповідно до умов конкретної задачі (з урахуванням ваг кожної різниці й суми всіх ваг), а саме:

$$d_i' = d_i - \frac{\Sigma d}{\Sigma k} k_i. \tag{4}$$

або

$$d_i' = d_i - \frac{\Sigma d}{\Sigma S} S_i, \tag{5}$$

де $\frac{\Sigma d}{\Sigma k}$ і $\frac{\Sigma d}{\Sigma S}$ – коефіцієнти систематичного впливу.

А. С. Чеботарев у книзі [13] у разі подвійних нерівноточних вимірів перевищень при виключенні систематичної похибки з різниць враховує кількість станцій.

Мета статті

Мета статті, зважаючи на вищенаведене, полягає у тому, щоб точніше визначати систематичну похибку, її значущість, і виключати її не тільки з різниць, а і з середніх значень подвійних нерівноточних вимірів. Встановити, яким критерієм значущості систематичної похибки необхідно користуватись, та обґрунтувати вибір значення довірчої ймовірності.

Виклад основного матеріалу

Виконані розрахунки показали, що у разі застосування формул (4) і (5) сума добутків різниць, з яких виключили систематичну похибку, на корінь квадратний з ваг цих різниць може набувати невеликого значення, але практично ніколи не дорівнює нулю. Оскільки виміри нерівноточні, то необхідно, щоб після виключення систематичної похибки виконувалась умова:

$$\Sigma\sqrt{p_d}\, d' = 0. \tag{6}$$

У першому випадку нерівноточних подвійних вимірів за значущості систематичної похибки пропонується визначати її за формулою:

$$\theta = \frac{\Sigma d\sqrt{p_d}}{\Sigma k\sqrt{p_d}} \tag{7}$$

і потім виключати з кожної різниці:

$$d_i' = d_i - k_i\theta \qquad (8)$$

або

$$d_i' = d_i - S_i\theta , \qquad (9)$$

з контролем:

$$\Sigma d' = \Sigma d - \theta\Sigma k \qquad (10)$$

або

$$\Sigma d' = \Sigma d - \theta\Sigma S . \qquad (11)$$

Із середніх значень кожної пари вимірів пропонується виключити систематичну похибку за формулами:

$$\bar{x}_{i_{випр}} = \bar{x}_i - k_i\frac{\theta}{2} \qquad (12)$$

або

$$\bar{x}_{i_{випр}} = \bar{x}_i - S_i\frac{\theta}{2} . \qquad (13)$$

Для першого випадку наведемо приклад математичної обробки результатів нерівноточних подвійних вимірів за значущості систематичної похибки (табл. 1).

При цьому значення систематичної похибки дорівнює θ = 0,49 мм, $\Sigma\sqrt{p_d}\,d' = 0{,}00$ мм, а середня квадратична похибка одиниці ваги μ = 2,49 мм, яку обчислено за формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{\Sigma p_d d'^2}{n}} . \qquad (14)$$

У формулі (14) необхідно брати кількість вимірів *n*, а не (*n* – 1), оскільки *d'* – це поліпшені різниці, тобто різниці (випадкові похибки) з яких виключена систематична похибка, а як саме це виконано – не важливо.

Для другого випадку нерівноточних подвійних вимірів у разі значущості систематичної похибки пропонується її обчислювати за формулою (7). Виключати її з кожної різниці необхідно за формулами (8) або (9), але у кожній парі береться більше з двох значення k_i або S_i .

Потім із середніх значень кожної пари вимірів пропонується виключити систематичну похибку за формулами:

$$\bar{x}_{i_{випр}} = \bar{x}_i - \frac{k_i\theta\, p}{p_i + p_i'} \qquad (15)$$

або

$$\bar{x}_{i_{випр}} = \bar{x}_i - \frac{S_i\theta\, p}{p_i + p_i'} , \qquad (16)$$

береться значення ваги *p* у кожній парі у чисельнику, менше з двох.

Вагу кожної різниці обчислюють за відомою формулою:

$$p_{d_i} = \frac{p_i \cdot p_i'}{p_i + p_i'} . \qquad (17)$$

Наведемо для другого випадку приклад математичної обробки результатів нерівноточних подвійних вимірів у разі значущості систематичної похибки (табл. 2).

Таблиця 1

Вихідні дані та результати розрахунків у першому випадку

№ з/п	Сумарні значення перевищень, мм: прямо, h	зворотно, h'	Різниці d, мм	Кількість станцій k	Ваги вимірів p	Вага різниці p_d	Середні перевищення $\bar{h}$, мм	Різниці d', мм	Систематична похибка $k\theta$, мм	Виправлені перевищення $\bar{h}_{випр}$, мм
1	1205	-1202	3	2	2,00	1,00	1203,5	2,03	0,97	1203,01
2	-1492	1496	4	4	1,00	0,50	-1494,0	2,06	1,94	-1494,97
3	1275	-1272	3	2	2,00	1,00	1273,5	2,03	0,97	1273,01
4	1512	-1515	-3	3	1,33	0,67	1513,5	-4,46	1,46	1512,77
5	-1490	1487	-3	5	0,80	0,40	-1488,5	-5,43	2,43	-1489,72
6	1717	-1713	4	4	1,00	0,50	1715,0	2,06	1,94	1714,03
7	-1853	1855	2	2	2,00	1,00	-1854,0	1,03	0,97	-1854,49
8	1311	-1308	3	3	1,33	0,67	1309,5	1,54	1,46	1308,77
9	-1072	1068	-4	4	1,00	0,50	-1070,0	-5,94	1,94	-1070,97
10	-1100	1103	3	2	2,00	1,00	-1101,5	2,03	0,97	-1101,99
∑	13	-1	12	31	14,47	7,23	7,00	-3,07	15,07	-0,53

Примітка. Значення величин у деяких комірках табл. 1–3 наведено з округленням до другого знака після коми, але в розрахунках використовувалась більша кількість знаків після коми.

Таблиця 2

Вихідні дані та результати розрахунків у другому випадку

№ з/п	Сумарні значення перевищень, мм: прямо, h	зворотно, h'	Різниці d, мм	Кількість станцій: прямо, k	зворотно, k'	Ваги: прямо, p	зворотно, p'	Вага різниці p_d	Середні перевищення $\bar{h}$, мм	Систематична похибка $k\theta$, мм	Середні перевищення $\bar{h}_{випр}$, мм
1	1205	-1202	3	2	2	2,00	2,00	1,00	1203,50	0,97	1203,02
2	-1492	1496	4	4	3	1,00	1,33	0,57	-1494,29	1,93	-1495,11
3	1275	-1272	3	2	1	2,00	4,00	1,33	1273,00	0,97	1272,68
4	1512	-1515	-3	3	2	1,33	2,00	0,80	1513,80	1,45	1513,22
5	-1490	1487	-3	5	4	0,80	1,00	0,44	-1488,33	2,42	-1489,41
6	1717	-1713	4	4	3	1,00	1,33	0,57	1714,71	1,93	1713,89
7	-1853	1855	2	2	1	2,00	4,00	1,33	-1854,33	0,97	-1854,66
8	1311	-1308	3	3	2	1,33	2,00	0,80	1309,20	1,45	1308,62
9	-1072	1068	-4	4	2	1,00	2,00	0,67	-1069,33	1,93	-1069,98
10	-1100	1103	3	2	1	2,00	4,00	1,33	-1102,00	0,97	-1102,32
∑	13	-1	12	31	21	14,47	23,67	8,85	5,93	14,98	-0,06

Значення систематичної похибки дорівнює $\theta = 0{,}48$ мм, $\Sigma\sqrt{p_d}\,d' = 0{,}00$ мм, а середня квадратична похибка одиниці ваги $\mu = 2{,}75$ мм.

Детальніше розглянемо третій випадок нерівноточних подвійних вимірів. За таких подвійних нерівноточних вимірів виконуються такі умови:

$$p_1 = p_2 = ... = p_n \text{ і } p_1' = p_2' = ... = p_n' . \qquad (18)$$

При цьому в кожній парі $p_i \neq p_i'$.

Вага кожної різниці обчислюється, як і у другому випадку (17), але при цьому вага кожної різниці буде однаковою. Враховуючи це, у випадках значущості систематичної похибки її необхідно обчислювати за формулою для подвійних рівноточних вимірів і виключати з кожної різниці за формулою (2). Із середніх значень кожної пари вимірів пропонується виключити систематичну похибку за формулою, аналогічною до (15) або (16):

$$\bar{x}_{i_{випр}} = \bar{x}_i - \frac{\theta p}{p_i + p_i'} . \qquad (19)$$

У чисельнику береться мінімальне з двох вимірів у парі значення ваги p, оскільки передбачено, що у точнішого виміру повинна бути менша систематична похибка.

Самі значення середніх обчислюють за формулою загальної арифметичної середини (3), а середня квадратична похибка одиниці ваги за такою формулою:

$$\mu = \sqrt{\frac{p_d \Sigma d'^2}{n}} . \qquad (20)$$

У формулі (20), аналогічно як у (14), необхідно брати кількість вимірів n, а не $(n - 1)$.

Середні квадратичні похибки середніх дорівнюватимуть одна одній та обчислюватимуться за такою формулою:

$$m_{\bar{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_i + p_i'}} . \qquad (21)$$

Для третього випадку наведемо приклад математичної обробки результатів нерівноточних подвійних вимірів за значущості систематичної похибки (табл. 3).

Значення ваг кожного виміру першого ряду дорівнює $p = 1$, а другого – $p' = 4$, вага кожної різниці – $p_d = 0{,}8$, систематична похибка – $\theta = 1''$, а середня квадратична похибка одиниці ваги $\mu = 3{,}82''$.

Також існує проблема однозначного встановлення значущості систематичної похибки [7, 10]. У деяких посібниках [2 та ін.] наведено критерії визначення значущості систематичної похибки, тобто коли нею можна нехтувати, а коли її треба виключати у разі нерівноточних вимірів:

$$\left|\Sigma d\sqrt{p_d}\right| \le 0{,}25\Sigma\left|d\sqrt{p_d}\right| , \qquad (22)$$

$$\left|\Sigma p_d d\right| \le 0{,}25\Sigma\left|p_d d\right| , \qquad (23)$$

$$\left|\Sigma p_d d\right| \le 1{,}25\, t_\beta \frac{\Sigma\left|p_d d\right|}{\sqrt{\Sigma p_d}} \qquad (24)$$

або

$$\left|\Sigma p_d d\right| \le 2{,}5 \frac{\Sigma\left|p_d d\right|}{\sqrt{\Sigma p_d}} . \qquad (25)$$

Враховуючи формули (22)–(24), запропоновано ще один критерій значущості систематичної похибки за подвійних нерівноточних вимірів:

$$\left|\Sigma d\sqrt{p_d}\right| \le 1{,}25\, t_\beta \frac{\Sigma\left|d\sqrt{p_d}\right|}{\sqrt{\Sigma\sqrt{p_d}}} . \qquad (26)$$

У формулі (25) коефіцієнт 2,5 одержують за таких параметрів $n > 28$ і $\beta = 0{,}95$. З цього випливає, що за іншої кількості пар і довірчої ймовірності цю формулу використовувати недоречно, необхідно використовувати критерії (22)–(24) або (26).

Якщо у формулах (22)–(24) і (26) прийняти, що ваги різниць дорівнюють одиниці ($p = 1$), то одержимо формули критеріїв, наведених для подвійних рівноточних вимірів.

Для третього випадку подвійних нерівноточних вимірів, враховуючи, що вага усіх різниць буде однаковою і не дорівнюватиме одиниці, то критерії значущості систематичної похибки (22) і (23) перетворяться на вираз критерію, наведеного для подвійних рівноточних вимірів, а саме:

$$\left|\Sigma d\right| \le 0{,}25\Sigma\left|d\right| . \qquad (27)$$

Таблиця 3

Вихідні дані та результати розрахунків у третьому випадку

№ з/п	Горизонтальні кути, ° ′ ″		Різниці d, ° ′ ″	d^2	Різниці d', ° ′ ″	d'^2	Середнє значення кута $\bar{\beta}$, ° ′ ″	Виправлені значення кута $\bar{\beta}$, ° ′ ″
	β_1	β_2						
1	101 20 33	101 20 27	6	36	5	25	28,2	28,0
2	182 37 45	182 37 40	5	25	4	16	41,0	40,8
3	213 41 15	213 41 21	-6	36	-7	49	19,8	19,6
4	95 07 09	95 07 12	-3	9	-4	16	11,4	11,2
5	121 14 05	121 13 59	6	36	5	25	0,2	0,0
6	147 50 14	147 50 18	-4	16	-5	25	17,2	17,0
7	221 08 30	221 08 25	5	25	4	16	26,0	25,8
8	189 25 16	189 25 14	2	4	1	1	14,4	14,2
9	105 52 39	105 52 38	1	1	0	0	38,2	38,0
10	61 43 01	61 43 03	-2	4	-3	9	2,6	2,4
Σ	1440 00 27	1444 00 17	10	192	0	182	19,0	17,0

Критерій (24) – на такий вираз:

$$\left|\Sigma d\right| \le 1{,}25\, t_\beta \frac{\Sigma\left|d\right|}{\sqrt{n p_d}}, \tag{28}$$

а критерій (26) – на такий вираз:

$$\left|\Sigma d\right| \le 1{,}25\, t_\beta \frac{\Sigma\left|d\right|}{\sqrt{n\sqrt{p_d}}}. \tag{29}$$

Наведемо результати обчислення критеріїв (22)–(24) і (26) за даними табл. 1 і довільно прийнятим значенням довірчої ймовірності $\beta = 0{,}95$:

11,93 > 0,25 · 26,28 або 11,93 > 6,57;

11,80 > 0,25 · 22,20 або 11,80 > 5,55;

11,80 < 1,25 · 2,3 · 22,20 / $\sqrt{7{,}23}$ або 11,80 < 23,74;

11,93 < 1,25 · 2,3 · 26,28 / $\sqrt{8{,}39}$ або 11,93 < 26,08.

Аналізуючи одержані результати застосування критеріїв визначення значущості систематичної похибки (22)–(24) і (26) для першого випадку подвійних нерівноточних вимірів (табл. 1), можна дійти висновку, що за цими критеріями одержують протилежні результати. Відповідно до критеріїв (22) і (23) систематичною похибкою не можна нехтувати, а відповідно до критеріїв (24) і (26) – можна. Очевидно, що це недопустимо і необхідно користуватись лише одним критерієм. Тоді обчислювачі отримують ті самі результати. З цього випливає, що необхідне якесь обґрунтування для підтримки вибраного критерію.

Припустимо, що усі різниці у табл. 1, наприклад, додатні. Застосуємо критерії визначення значущості систематичної похибки (22)–(24) і (26) і одержимо такі результати:

26,28 > 0,25 · 26,28 або 26,28 > 6,57;

22,20 > 0,25 · 22,20 або 22,22 > 5,55;

22,20 < 1,25 · 2,3 · 22,20 / $\sqrt{7{,}23}$ або 22,20 < 23,74;

26,28 > 1,25 · 2,3 · 26,28 / $\sqrt{8{,}39}$ або 26,28 > 26,08.

З цього випливає, що за критерієм (24) систематичною похибкою можна нехтувати, що некоректно, оскільки прості міркування підтверджують необхідність виключення систематичної похибки. Інші критерії вказують на необхідність виключення систематичної похибки. Цей приклад ще раз наголошує на необхідності вибору критерію та встановленні значення довірчої ймовірності. Очевидно, можна припустити, що необхідно користуватись критерієм (22).

Оскільки математичне очікування істинних похибок подвійних вимірів прямуватиме до нуля, то приймаючи максимальні значення додатних і від'ємних різниць, з яких виключена систематична похибка, за межі інтервалу попадання істинних похибок (різниць), можна визначити ймовірність потрапляння різниць подвійних вимірів у цей інтервал, тобто $d_{\min} \le D \le d_{\max}$, беручи за основу приклади у [4, 11].

Згідно з даними табл. 1 мінімальне значення різниці дорівнює $d'_9 = -5{,}94$ мм з вагою $p_{d_9} = 0{,}50$, а максимальне значення – дві різниці $d'_2 = d'_6 = +2{,}06$ мм з вагами $p_{d_2} = p_{d_6} = 0{,}50$. У цьому прикладі ваги додатних максимальних різниць дорівнюють одна одній. Але частіше вони мають різні ваги. Тоді виникає запитання: "Яку різницю і з якою вагою взяти для обчислення довірчої ймовірності?". За результатами досліджень встановлено, що необхідно використовувати максимальні значення ваг різниць. За результатами розрахунків довірча ймовірність в інтервалах від $-t_{\min} = -1{,}69$ до $+t_{\max} = +0{,}58$ буде $\beta \approx 0{,}67$.

Враховуючи встановлене значення довірчої ймовірності $\beta = 0{,}67$, перевіримо критерії значущості систематичної похибки у разі нерівноточних подвійних вимірів (24) і (26):

11,80 > 1,25 · 1,03 · 22,20 / $\sqrt{7{,}23}$ або 11,80 > 10,63;

11,93 > 1,25 · 1,03 · 26,28 / $\sqrt{8{,}39}$ або 11,93 > 11,68.

За одержаними результатами можна дійти висновку, що систематичною похибкою не можна нехтувати, хоча ліва і права частини нерівностей відрізняються не так істотно, як за прийнятої довірчої ймовірності $\beta = 0{,}95$. Тобто обчислена довірча ймовірність $\beta = 0{,}67$ більше відповідає цьому ряду подвійних нерівноточних вимірів.

Результати визначення за критеріями значущості систематичної похибки (22)–(24) і (26) та довірчої ймовірності за даними табл. 2 у другому випадку подвійних нерівноточних вимірів аналогічні наведеним для першого випадку.

Порівнюючи критерії (22)–(24) і (26), бачимо, що ліві частини виразів (22) і (26) та (23) і (24) однакові. Тому можна встановити умови, за яких ці критерії можуть давати однакові висновки щодо значущості систематичної похибки. Спочатку прирівняємо праві частини виразів (22) і (26), тобто:

$$0{,}25\Sigma\left|d\sqrt{p_d}\right| = 1{,}25\, t_\beta \frac{\Sigma\left|d\sqrt{p_d}\right|}{\sqrt{\Sigma\sqrt{p_d}}} \tag{30}$$

або

$$0{,}25 = 1{,}25\, t_\beta \frac{1}{\sqrt{\Sigma\sqrt{p_d}}}. \tag{31}$$

Звідки, після перетворень

$$\sqrt{\Sigma\sqrt{p_d}} = 5\, t_\beta. \tag{32}$$

З рівності (32) можна записати таку нерівність:

$$\sqrt{\Sigma\sqrt{p_d}} \ge 5\, t_\beta \tag{33}$$

і дійти такого висновку. Якщо корінь квадратний із суми коренів квадратних з ваг різниць дорівнюватиме або буде більшим від п'ятикратного значення коефіцієнта Стьюдента, то висновки щодо значущості систематичної похибки за критеріями (22) і (26) збігатимуться.

Тепер прирівняємо праві частини виразів (23) і (24), тобто:

$$0{,}25\Sigma\left|p_d d\right| = 1{,}25\, t_\beta \frac{\Sigma\left|p_d d\right|}{\sqrt{\Sigma p_d}}. \tag{34}$$

Перетворюючи вираз (34), можна записати:

$$\sqrt{\Sigma p_d} = 5\, t_\beta \tag{35}$$

і

$$\sqrt{\Sigma p_d} \ge 5\, t_\beta. \tag{36}$$

З виразів (35) і (36) можна дійти аналогічного висновку, як за виразами (32) і (33). Якщо корінь квадратний з суми ваг різниць дорівнюватиме або буде більшим від п'ятикратного значення коефіцієнта Стьюдента, то висновки щодо значущості систематичної похибки за критеріями (23) і (24) збігатимуться. Але треба зауважити, що, незважаючи на значення ваг подвійних нерівноточних вимірів, які можуть бути різними, умови (33) і (36) можуть справджуватися тільки у разі значної кількості вимірів.

Усе наведене вище надає підстави віддати перевагу критерію (22). Але це зовсім не означає, що іншими критеріями можна нехтувати. Навпаки, їх необхідно використовувати для спільного аналізу і додаткових досліджень одержаних результатів подвійних нерівноточних вимірів.

Тепер застосуємо наведені критерії значущості систематичної похибки для третього випадку подвійних нерівноточних вимірів (табл. 3) за довільно прийнятого значення довірчої ймовірності $\beta = 0{,}95$:

$$10 = 0{,}25 \cdot 40 \text{ або } 10 = 10;$$

$$10 < 1{,}25 \cdot 2{,}3 \cdot 40 \,/\, \sqrt{10 \cdot 0{,}8} \text{ або } 10 < 40{,}66;$$

$$10 < 1{,}25 \cdot 2{,}3 \cdot 40 \,/\, \sqrt{10\sqrt{0{,}8}} \text{ або } 10 < 38{,}45.$$

Відповідно до результатів розрахунків, ліва і права частини критерію значущості систематичної похибки (27) дорівнюють одна одній, тому, як і за подвійних рівноточних вимірів, у таких випадках необхідно виключати систематичну похибку. Критерії (28) і (29) однозначно вказують, що систематичною похибкою можна нехтувати, але прості міркування щодо цього свідчать про протилежне. Тому в третьому випадку подвійних нерівноточних вимірів доцільно користуватись тільки критерієм (27).

Для третього прикладу (табл. 3) $m_d = 4{,}27''$, звідки довірча ймовірність в інтервалах від $-t = -1{,}64$ до $+t = +1{,}17$ буде $\beta = 0{,}83$.

Враховуючи встановлене значення довірчої ймовірності $\beta = 0{,}83$, перевіримо критерії значущості систематичної похибки для нерівноточних подвійних вимірів (28) і (29):

$$10 < 1{,}25 \cdot 1{,}52 \cdot 40 \,/\, \sqrt{10 \cdot 0{,}8} \text{ або } 10 < 26{,}87;$$

$$10 < 1{,}25 \cdot 1{,}52 \cdot 40 \,/\, \sqrt{10\sqrt{0{,}8}} \text{ або } 10 < 25{,}41.$$

За одержаними результатами обчислень можна дійти висновку, що систематичною похибкою можна нехтувати, хоча ліва і права частини нерівностей відрізняються не так істотно, як за прийнятої довірчої ймовірності $\beta = 0{,}95$. Тобто обчислена довірча ймовірність $\beta = 0{,}83$ більше відповідає цьому ряду подвійних нерівноточних вимірів.

Наведені приклади (табл. 1–3) та виконані інші численні експериментальні розрахунки, які у цій статті не наведено, показали, що після виключення систематичної похибки із середніх значень подвійних нерівноточних вимірів кутів і перевищень значення нев'язки зменшується.

У безмежності різноманіття сукупності подвійних нерівноточних вимірів можливо, що після виключення систематичної похибки з різниць сума $\Sigma\sqrt{p_d}\,d$ може не дорівнювати нулю і відхилятись на якусь величину. Це вказує на те, що застосовані формули не враховують фактичної закономірності спільного впливу систематичних і випадкових похибок. У такому випадку необхідні додаткові дослідження умов і результатів подвійних нерівноточних вимірів. І може статись так, що це не вплив систематичної похибки, а прояв взаємодії значень випадкових похибок кожної пари подвійних нерівноточних вимірів у їх сумарному значенні.

Висновки

1. Встановлено, що наведені у літературі критерії значущості систематичної похибки за подвійних нерівноточних вимірів (22)–(25) дають можливість дійти протилежних висновків. Для встановлення значущості систематичної похибки запропоновано використовувати тільки критерій (22). Інші критерії можна використовувати тільки для аналізу результатів подвійних нерівноточних вимірів та їх дослідження.

2. Для наведених у літературі двох випадків подвійних нерівноточних вимірів визначено формули виключення систематичної похибки з різниць і середніх значень виміряних подвійних величин. При цьому результати оцінки точності відповідають середнім значенням виміряних величин, а самі значення нев'язок під час вимірювань кутів і перевищень зменшуються.

3. Виявлено третій випадок подвійних нерівноточних вимірів. Для цього випадку також визначено формули обчислення систематичної похибки, її виключення з різниць і середніх значень подвійних нерівноточних вимірів та їх оцінки точності.

4. Для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги (після виключення з різниць систематичної похибки) суму квадратів виправлених різниць під коренем квадратним необхідно поділити на кількість подвійних нерівноточних вимірів, тобто застосовувати формули (14) або (20) залежно від випадку подвійних нерівноточних вимірів.

5. Для дослідження різниць подвійних рівноточних вимірів довірчу ймовірність необхідно розраховувати, але у деяких випадках можна приймати з якихось міркувань.

6. Зроблено гіпотетичне припущення. Якщо абсолютна сума добутків різниць подвійних рівноточних вимірів на корінь квадратний з їх ваг у межах від нуля до половини суми добутків їхніх абсолютних значень, то це може бути не тільки дія систематичної похибки, а і прояв сукупності взаємодії випадкових похибок.

Література

1. Большаков В. Д. Теория ошибок наблюдений: учеб. для вузов / В. Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
2. Большаков В. Д. Уравнивание геодезических построений: справочное пособие / В. Д. Большаков, Ю. И. Маркузе, В. В. Голубев. – М.: Недра, 1989. – 413 с.
3. Видуев Н. Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н. Г. Видуев, Г. С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
4. Войтенко С. П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посіб. / С. П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2003. – 216 с.

5. Гайдаев П. А. Теория математической обработки геодезических измерений / П. А. Гайдаев, В. Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
6. Зазуляк П. М. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навч. посіб. / П. М. Зазуляк, В. І. Гавриш, Е. М. Євсєєва, М. Д. Йосипчук. – Л.: Растр-7, 2007. – 408 с.
7. Івіна Д. С. Порівняння критеріїв значимості систематичної похибки при оцінці точності за різницями подвійних рівноточних вимірів [текст] / Д. С. Івіна, В. В. Рябчій // Тези доповідей XIII Міжнародної науково-практичної конференції молодих учених і студентів “Політ. Сучасні проблеми науки”, Київ, 3–4 квітня 2013 р. – С. 319.
8. Мазмишвили А. И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А. И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.
9. Папазов М. Г. Теория ошибок и способ наименьших квадратов / М. Г. Папазов, С. Г. Могильный. – М.: Недра, 1968. – 302 с.
10. Рябчий В. А. Сравнение критериев значимости систематической ошибки при оценке точности по разностям двойных равноточных измерений [текст] / В. А. Рябчий, Д. С. Ивина // Збірник праць IV Всеукраїнської науково-технічної конференції студентів, аспірантів і молодих вчених “Наукова весна 2013”, Дніпропетровськ, 28–29 березня 2013 р. – С. 176-177.
11. Рябчій В. А. Ймовірно-математичний аналіз обмеженої кількості результатів нерівноточних вимірів однієї величини [текст] / В. А. Рябчій, В. В. Рябчій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: зб. наук. пр. Зах. геодез. т-ва УТГК. – Л.: Вид-во Львівської політехніки, 2013. – Вип. II. – С. 25–30.
12. Рябчій В. А. Теорія похибок вимірювань: навч. посіб. / В. А. Рябчій, В. В. Рябчій. – Дн-к: Нац. гірн. ун-т, 2006. – 166 с.
13. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей: учебник для геодезических вузов и факультетов / А. С. Чеботарев. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Математична обробка результатів подвійних нерівноточних вимірів

В. А. Рябчій, В. В. Рябчій

Проаналізовано інформацію щодо математичної обробки результатів подвійних нерівноточних вимірів, яка наведена у науковій та навчальній літературі. Встановлено невідповідності щодо висновків, до яких можна дійти за критеріями значущості систематичної похибки. Результати досліджень надали змогу визначитись з вибором критерію значущості систематичної похибки. Деякі такі критерії пропонується використовувати тільки для досліджень вимірів та різниць, обчислюючи довірчу ймовірність. Розроблено методику визначення систематичної похибки з урахуванням ваг вимірів та виключення її з різниць і середніх значень виміряних подвійних нерівноточних вимірів. Застосування такої методики покращує оцінку точності й зменшує нев’язки.

Математическая обработка результатов двойных неравноточных измерений

В. А. Рябчий, В. В. Рябчий

Проанализирована существующая информация по математической обработке результатов двойных неравноточных измерений, приведенная в научной и учебной литературе. Установлены несоответствия выводов, которые можно сделать по критериям значимости систематической погрешности. Результаты исследований дали возможность определиться с выбором критерия значимости систематической погрешности. Некоторые такие критерии предлагается использовать только для исследований измерений и разностей, вычисляя доверительную вероятность. Разработана методика определения систематической погрешности с учетом весов измерений и исключения ее из разностей и средних значений измеренных двойных неравноточных измерений. Применение такой методики улучшает оценку точности и уменьшает невязки.

Mathematical processing of results of double unequally accurate measurements

V. A. Riabchii, V. V. Riabchii

This article analyzed the existing information on the results of mathematical processing of double unequally measurements, which is provided in scientific and academic literature. Irregularities on the findings, which are within the criteria of significance bias. The research results provide an opportunity to choose the criterion of significance bias. Some of these criteria is proposed to use only for research and measurement differences, and thus calculate the confidence probability. The method of determination of bias based on weights and dimensions exclude it from the differences and the mean values measured double unequally measurements. Application of this method improves estimate of accuracy and reduces residual.