ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
“ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
“Фізико-математичні науки”
№804, 2014, с. 29–37

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
“Physical and mathematical sciences”
№804, 2014, p. 29–37

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ МАЛИХ ЗНАМЕННИКІВ ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Ільків В. С.[a, b], Симотюк М. М.[a], Хомяк Д. В.[a]

[a] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України*
79060, Львів, вул. Наукова, 3-б, Україна
[b] *Національний університет “Львівська політехніка”*
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12, Україна

(Отримано 5 листопада 2014 р.)

Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають під час побудови розв'язку інтегральної задачі для навантаженого гіперболічного рівняння.

Ключові слова: диференціальні рівняння, малі знаменники, міра Лебега, функція Ґріна, виняткові множини.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2

Вступ

Використовуємо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p{=}(0,T)\times\Omega^p$, $x{=}(x_1,\ldots,x_p){\in}\Omega^p$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$, $(k,x)= = k_1x_1+\ldots+k_px_p$, $D{=}(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_p)$, $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера; $Pol_{n,p}$ (відповідно, $Pol_{n,p}^{hom}$) – множина усіх (відповідно, усіх однорідних) поліномів степеня n від p змінних з дійсними коефіцієнтами; $\{\tau_1,\ldots,\tau_m\}$ – набір різних чисел з відрізка $[0,T]$: $\tau_1<\ldots<\tau_m$; μ_nS – міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $S\subset\mathbb{R}^n$; H_α $(\alpha\in\mathbb{R})$ – простір, який є поповненням множини тригонометричних поліномів скінченного порядку $\varphi(x)=\sum_k\varphi_ke^{i(k,x)}$ за нормою

$$\|\varphi(x);H_\alpha\|=\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}};$$

$C^n([0,T];H_\alpha)$ – банахів простір функцій

$$u(t,x)\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)e^{i(k,x)}$$

таких, що $u_k\in C^n[0,T]$, $k\in\mathbb{Z}^p$, і для кожного $t\in[0,T]$ похідні

$$\partial^ju(t,x)/\partial t^j\equiv\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k^{(j)}(t)e^{i(k,x)},\quad 0\le j\le n,$$

належать до простору H_α і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норма в просторі $C^n([0,T];H_\alpha)$ визначається рівністю

$$\|u(t,x);C^n([0,T];H_\alpha)\|=\sum_{j=0}^n\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^ju(t,x)}{\partial t^j};H_\alpha\right\|.$$

Нехай $n\in\mathbb{N}$, $B_j\in Pol_{M,p}$, $j=\overline{1,m}$, $M<n$, і нехай $A_j\in Pol_{j,p}^{hom}$, $j=\overline{1,n}$, є такими, що диференціальний вираз

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)\equiv\frac{\partial^n}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(D)\frac{\partial^j}{\partial t^j}$$

є строго гіперболічним; зі строгої гіперболічності виразу $L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)$ випливає, що для кожного $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ корені $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)$ рівняння

$$L(\lambda,ik)=0 \tag{1}$$

є попарно різними суто уявними числами.

Дослідження умов коректної розв'язності у просторі $C^n([0,T];H_\alpha)$ задачі з інтегральними умовами

$$\int_0^Te^{\mu_jt}u(t,x)dt=\varphi_j(x),\quad j=\overline{1,n},\quad x\in\Omega^p, \tag{2}$$

$\mu_j\in\mathbb{C}$, $j=\overline{1,n}$, $\mu_j\ne\mu_q(j\ne q)$, для навантаженого строго гіперболічного рівняння

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D\right)u(t,x)=F(t,x)+$$

$$+\sum_{j=1}^mB_j(D)u(\tau_j,x),\quad (t,x)\in Q_T^p, \tag{3}$$

пов'язане з властивостями таких величин:

$$\Delta(k)=\det\left\|\int_0^Te^{\mu_jt}y_q(t,k)dt\right\|_{j,q=1}^n,\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{4}$$

$$\Gamma(k)=\det\|\delta_{jq}-B_j(ik)I_k(\tau_q)\|_{j,q=1}^n,\quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{5}$$

де

$$y_q(t,k)=\left\{\begin{array}{lll}t^{q-1} & , & k=\vec{0},\\ e^{\lambda_q(k)t} & , & k\ne\vec{0},\end{array}\right.\qquad q=\overline{1,n},$$

$I_k(t)\equiv\int_0^TG_k(t,\tau)d\tau$, а $G_k(t,\tau)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, – функція Ґріна (див. [7, с. 26–28]) інтегральної задачі для звичайного диференціального рівняння

$$L\left(\frac{d}{dt},ik\right)f(t)=0,\quad\int_0^Te^{\mu_jt}f(t)dt=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Відомо (див. [7, с. 16, с. 39–47]), що функція $G_k(t,\tau)$ коректно визначена тоді і тільки тоді, коли $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$. Тому формула (5) має зміст, якщо $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$.

Якщо

$$\forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k) \cdot \Gamma(k) \neq 0, \tag{6}$$

то існує єдиний формальний розв'язок задачі (2), (3), який зображується рядом Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} (f_k(t) + v_k(t) + w_k(t))e^{(ik,x)}, \tag{7}$$

де $f_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau)d\tau$, $k \in \mathbb{Z}^p$,

$$v_k(t) = \sum_{j,q=1}^{n} \frac{\Delta_{jq}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{jk} y_q(t,k), \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

$$w_k(t) = \frac{I_k(t)}{\Gamma(k)} \sum_{j=1}^{m} B_j(ik)(v_k(\tau_j) + f_k(\tau_j)), \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $\Delta_{jq}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $y_q(t_j,k)$, $j,q = \overline{1,n}$, у визначнику $\Delta(k)$, φ_{jk}, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$, $j = \overline{1,n}$. Якщо виконується умова (6) і, крім того, існують такі сталі ω_1, ω_2, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ справджуються нерівності

$$|\Delta(k)| \geq (1+|k|)^{-\omega_1}, \tag{8}$$

$$|\Gamma(k)| \geq (1+|k|)^{-\omega_2}, \tag{9}$$

то можна встановити оцінки згори для функцій $f_k(t), v_k(t), w_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, та їхніх похідних до порядку n включно, з яких випливає збіжність ряду (7) у шкалі просторів $C^n([0,T];H_\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, якщо $\varphi_j \in H_{\alpha_1}$, $j = \overline{1,n}$, $F \in C([0,T];H_{\alpha_2})$ для деяких значень $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Тому важливо дослідити питання про можливість виконання оцінок (8), (9). Це і є метою цієї роботи.

У працях [4, 8, 13, 14, 3] застосовано метричний підхід [7] та результати метричної теорії діофантових наближень [1] для встановлення оцінок знизу малих знаменників, які виникли під час побудови розв'язків задач з інтегральними умовами у вигляді моментів (коли вагові функції під знаком інтеграла є послідовними степенями часової змінної t) для рівнянь із частинними похідними за відсутності навантаження; при цьому у [4, 8, 13, 14, 3] доведено, що оцінки знизу (степеневі або експоненційні, залежно від типу рівняння) для малих знаменників виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, компонентами яких є параметри задач.

Метричний підхід використано і в цій роботі для встановлення оцінок (8), (9). Зокрема, у теоремі 1 роботи показано, що для майже всіх (стосовно міри Лебега на прямій) чисел $T > 0$ нерівність (8) виконується для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо

$$\omega_1 > (n^2+1) - C_n^2 + (p+1)(n!2^n - 1).$$

Істотним елементом доведення теореми 1 є допоміжні твердження про оцінки мір виняткових множин гладких функцій, а також леми 5, 6, які описують структуру визначника $\Delta(k)$ як квазімногочлена за змінною T з відмінною від нуля похідною порядку n^2. У доведенні леми 5 показано, що обчислення визначника $\Delta(k)$ зводиться до обчислення визначника $\Delta_{n-1,n-1}(k)$, при цьому елемент, який знаходиться у j-му рядку та q-му стовпці цього визначника, є інтегралом від добутку розділеної різниці функції $e^{\mu t}$, побудованої на коренях $\mu_1, \ldots, \mu_j$, та розділеної різниці функції $e^{\lambda t}$, побудованої на коренях $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_q(k)$.

Що стосується оцінок (9), то питання про можливість їх виконання у науковій літературі не вивчалося. У лемі 7 доведено результат про обчислення визначника матриці, що має аналогічну структуру до визначника $\Gamma(k)$. У теоремі 2 на підставі леми 3 показано, що при $\omega_2 > pmn$ оцінка (9) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторів $\vec{\tau} \in [0,T]^m$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо однорідний поліном $A_n(\xi)$ є відмінним від нуля для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p \backslash \{\vec{0}\}$. Зауважимо, що методика доведення теореми 2 є близькою до методики, використаної у працях [9, 5] для доведення метричних оцінок малих знаменників задачі з багатоточковими умовами для навантаженого полігармонічного рівняння та задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів для безтипних рівнянь із частинними похідними.

I. Допоміжні твердження

Використовуватимемо такі допоміжні твердження.

Лема 1. (Бореля-Кантеллі) *Нехай $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ – послідовність вимірних (за мірою Лебега в $\mathbb{R}^n$) множин з $\mathbb{R}^n$ таких, що*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_n A_j < \infty.$$

Тоді міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин A_j, $j \geq 1$, дорівнює нулю.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ позначимо:

$$W(k) = \det \|\lambda_q^{j-1}(k)\|_{j,q=1}^n,$$

де $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$ – корені многочлена $L(\lambda,k)$.

Лема 2. *Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \backslash \{\vec{0}\}$ виконуються оцінки*

$$|W(k)| \geq C_1 |k|^{n(n-1)/2}, \tag{10}$$

де $C_1 > 0$ – стала, що не залежить від k.

□ *Доведення.* З однорідності поліномів

$$A_j(\xi_1, \ldots, \xi_p), \quad j = \overline{1,n},$$

випливає, що для кожного вектора $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, виконуються рівності

$$A_j(ik_1, \dots, ik_p) = (i|k|)^j A_j\left(\frac{k_1}{|k|}, \dots, \frac{k_p}{|k|}\right),$$

де $j = \overline{1,n}$. Зі структури виразу $L(\partial/\partial t, D)$ отримуємо, що

$$L(\lambda, ik) = (i|k|)^n L\left(\frac{\lambda}{i|k|}, \frac{k}{|k|}\right).$$

Тому корені $\lambda_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, $k \neq \vec{0}$, рівняння (1) можна зобразити у вигляді

$$\lambda_j(k) = i|k|\sigma_j(k), \quad j = \overline{1,n}, \tag{11}$$

де $\sigma_j(k)$, $j = \overline{1,n}$, $k \neq \vec{0}$, – корені рівняння

$$L\left(\sigma, \frac{k}{|k|}\right) = 0.$$

Зі строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t, D)$ випливає, що для кожного $\xi \in \mathbb{R}\backslash\{\vec{0}\}$ дискримінант $D_L(\xi)$ многочлена $L(\lambda, \xi)$ (як многочлена змінної λ) є відмінним від нуля. Оскільки $D_L(\xi)$ є многочленом від коефіцієнтів $A_1(\xi), \dots, A_n(\xi)$ многочлена $L(\lambda, \xi)$ (див. формулу (4.32) на с. 62 у [7]), то $D_L(\xi)$ є неперервною функцією параметрів $\xi_1, \dots, \xi_p$. На компакті

$$S = \{\xi \in \mathbb{R}^p : |\xi_1| + \dots + |\xi_p| = 1\}$$

модуль цієї функції відокремлений знизу від нуля деякою додатною сталою C_1:

$$\forall \xi \in S \quad |D_L(\xi)| \geq C_1. \tag{12}$$

Враховуючи відому рівність (див. формулу (4.31) на с. 62 у [7])

$$D_L\left(\frac{k}{|k|}\right) = \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\sigma_j(k) - \sigma_q(k))^2, \quad k \neq \vec{0},$$

з оцінок (12) дістаємо, що

$$\prod_{n \geq j > q \geq 1} |\sigma_j(k) - \sigma_q(k)|^2 \geq C_1, \quad k \neq \vec{0}. \tag{13}$$

Кількість множників у формулі (13) дорівнює C_n^2, тому з нерівності (13) на підставі формул (11) випливає, що

$$\prod_{n \geq j > q \geq 1} |\lambda_j(k) - \lambda_q(k)| \geq \sqrt{C_1}|k|^{C_n^2}, \quad k \neq \vec{0}. \tag{14}$$

Лему доведено.■

Нижче будемо розглядати квазімногочлени $Q(t)$ вигляду

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{m} \exp(\rho_j t) p_j(t), \tag{15}$$

де $\rho_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{1,m}$, $\mu_j \neq \mu_r$, $j \neq r$, $\operatorname{Re}\rho_1 \geq \dots \geq \operatorname{Re}\rho_m$, а $p_j(t)$ — многочлени з комплексними коефіцієнтами степенів $(n_j - 1)$, $j = \overline{1,m}$, відповідно.

Для квазімногочлена $Q(t)$ будемо позначати: $N_Q = n_1 + \dots + n_m$, $B_Q = 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq m} |\rho_j|$, $\psi_Q = \max\{1, \exp(-\operatorname{Re}\rho_m T)\}$,

$G_Q = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left\{|Q^{(j-1)}(0)| B_Q^{-j}\right\}$.

Лема 3. ([10]) *Нехай функція $Q(t)$ має вигляд (15). Якщо для деяких комплексних чисел a_j, $j=\overline{1,n}$, в кожній точці $t \in [0,T]$ виконується умова*

$$|f^{(n)}(t) + a_1 f^{(n-1)}(t) + \dots + a_n f(t)| \geq \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справджується оцінка

$$\mu_1\{t \in [0,T] : |Q(t)| < \varepsilon\} \leq C_2 B_Q (\varepsilon/\delta)^{1/n},$$

де $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A = 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n} |a_j|^{1/j}$, $C_2 > 0$.

Лема 4. ([4]) *Існують такі додатні сталі C_3, C_4 (які залежать тільки від n, T), що для довільного квазімногочлена $Q(t)$ вигляду (15), довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = \frac{C_3 G_Q}{2\psi_Q B_Q^{n-1}}$, виконується оцінка*

$$\mu_1\{t \in [0,T] : |Q(t)| < \varepsilon\} \leq C_4 B_Q \Big(\frac{\varepsilon \psi_Q}{G_Q}\Big)^{1/(n-1)}.$$

II. Структура визначника $\Delta(k)$

З'ясуємо деякі структурні властивості визначника $\Delta(k)$ задачі (3), (2), коли $n \geq 2$.

Лема 5. *Для визначника $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$, як функції змінної T, виконуються рівності*

$$\frac{\partial^q \Delta(k)}{\partial T^q}\Big|_{T=0} = \begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad 0 \leq q < n^2, \\ C_5 W(k), & \textit{якщо} \quad q = n^2, \end{cases}$$

де $C_5 = \prod\limits_{n \geq j > q \geq 1} (\mu_j - \mu_q) \cdot (n^2)! \prod\limits_{q=1}^{n-1} q! / \prod\limits_{q=n}^{2n-1} (q!)$.

□ *Доведення.* Визначник $\Delta(k)$ перетворимо у такий спосіб. Від кожного q-го стовпця ($q \geq 2$) визначника $\Delta(k)$ віднімемо його перший стовпець і розділимо на $(\lambda_q(k) - \lambda_1(k))$. У результаті отримаємо

$$\Delta(k) = \Delta_1(k) \cdot \prod_{q=2}^{n} (\lambda_q(k) - \lambda_1(k)),$$

де $\Delta_1(k)$ – визначник, перший стовпець якого співпадає з першим стовпцем визначника $\Delta(k)$, а q-ий стовпець ($2 \leq q \leq n$) має вигляд

$$\operatorname{col}\left(\int_0^T e^{\mu_1 t}[f_{1,q}](t,k)dt, \dots, \int_0^T e^{\mu_n t}[f_{1,q}](t,k)dt\right),$$

де

$$[f_{1,q}](t,k) = \frac{e^{\lambda_q(k)t} - e^{\lambda_1(k)t}}{\lambda_q(k) - \lambda_1(k)}, \quad q = \overline{2,n}.$$

Із кожного q-го стовпця ($3 \leq q \leq n$) визначника $\Delta_1(k)$ віднімемо його другий стовпець і розділимо на $(\lambda_q(k) - \lambda_2(k))$, дістанемо

$$\Delta(k) = \Delta_2(k) \cdot \prod_{q=2}^{n} (\lambda_q(k) - \lambda_1(k)) \cdot \prod_{r=3}^{n} (\lambda_r(k) - \lambda_2(k)),$$

де $\Delta_2(k)$ – визначник, перший і другий стовпець якого співпадають з першим і другим стовпцем визначника $\Delta_1(k)$ відповідно, а q-ий стовпець ($3 \leq q \leq n$) є таким:

$$\operatorname{col}\left(\int_0^T e^{\mu_1 t}[f_{1,2,q}](t,k)dt, \ldots, \int_0^T e^{\mu_n t}[f_{1,2,q}](t,k)dt\right),$$

де

$$[f_{1,2,q}](t,k) = \frac{[f_{1,q}](t,k) - [f_{1,2}](t,k)}{\lambda_q(k) - \lambda_2(k)}, \quad q = \overline{3,n}.$$

Продовжуючи аналогічний процес, отримаємо, що

$$\Delta(k) = \Delta_{n-1}(k) \cdot \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\lambda_j(k) - \lambda_q(k)),$$

де

$$\Delta_{n-1}(k) = \left\| \int_0^T e^{\mu_j t}[f_{1,\ldots,q}](t,k)dt \right\|_{j,q=1}^n,$$

$[f_1](t,k) = e^{\lambda_1(k)t}$, а $[f_{1,\ldots,q}](t,k)$, $q = \overline{2,n}$, – розділена різниця $(q-1)$-го порядку функції $f(t) = e^{\lambda t}$, побудована в точках $\lambda = \lambda_1(k), \ldots, \lambda = \lambda_q(k)$.

Тепер перетворимо визначник $\Delta_{n-1}(k)$. Від кожного його j-го рядка ($j \geq 2$) віднімемо його перший рядок і розділимо на $(\mu_j - \mu_1)$. У результаті отримаємо

$$\Delta_{n-1}(k) = \Delta_{n-1,1}(k) \cdot \prod_{j=2}^n (\mu_j - \mu_1),$$

де $\Delta_{n-1,1}(k)$ – визначник, перший рядок якого співпадає з першим рядком визначника $\Delta_{n-1}(k)$, а j-ий рядок ($2 \leq j \leq n$) має вигляд

$$\left(\int_0^T [g_{1,j}](t)[f_1](t,k)dt, \ldots, \int_0^T [g_{1,j}](t)[f_{1,\ldots,n}](t,k)dt\right),$$

де $[g_{1,j}](t) = \frac{e^{\mu_j t} - e^{\mu_1 t}}{\mu_j - \mu_1}$, $j = \overline{2,n}$. Із кожного j-го рядка ($j \geq 3$) визначника $\Delta_{n-1,1}(k)$ віднімемо його другий рядок і розділимо на $(\mu_j - \mu_2)$, дістанемо

$$\Delta_{n-1}(k) = \Delta_{n-1,2}(k) \cdot \prod_{j=2}^n (\mu_j - \mu_1) \cdot \prod_{r=3}^n (\mu_r - \mu_2),$$

де $\Delta_{n-1,2}(k)$ – визначник, перший і другий рядок якого співпадають з першим і другим рядком визначника $\Delta_1(k)$ відповідно, а j-ий стовпець ($3 \leq j \leq n$) є таким:

$$\left(\int_0^T [g_{1,2,j}](t)[f_1](t,k)dt, \ldots, \int_0^T [g_{1,2,j}](t)[f_{1,\ldots,n}](t,k)dt\right),$$

де

$$[g_{1,2,j}](t) = \frac{[g_{1,j}](t) - [g_{1,2}](t)}{\mu_j - \mu_2}, \quad j = \overline{3,n}.$$

Продовжуючи аналогічний процес, отримаємо, що

$$\Delta_{n-1}(k) = \Delta_{n-1,n-1}(k) \cdot \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\mu_j - \mu_q),$$

де

$$\Delta_{n-1,n-1}(k) = \left\| \int_0^T [g_{1,\ldots,j}](t)[f_{1,\ldots,q}](t,k)dt \right\|_{j,q=1}^n,$$

$[g_1](t) = e^{\mu_1 t}$, а $[g_{1,\ldots,j}](t)$, $j = \overline{2,n}$, – розділена різниця $(j-1)$-го порядку функції $f(t) = e^{\lambda t}$, побудована в точках $\lambda = \mu_1, \ldots, \lambda = \mu_j$.

Отже,

$$\Delta(k) = \Delta_{n-1,n-1}(k) \cdot W(k) \cdot V, \tag{16}$$

де $V \equiv \prod_{n \geq j > q \geq 1} (\mu_j - \mu_q)$. Отже,

$$\left.\frac{d^q \Delta(k)}{dT^q}\right|_{T=0} = W(k) \cdot V \cdot \left.\frac{d^q \Delta_{n-1,n-1}(k)}{dT^q}\right|_{T=0}.$$

Із формули Лагранжа для розділених різниць (див. главу 1, §1 у [2]) випливає, що

$$[g_{1,\ldots,j}](t) = \sum_{r=1}^j \frac{e^{\mu_r t}}{P_j'(\mu_r)}, \quad j = \overline{1,n},$$

$$[f_{1,\ldots,j}](t,k) = \sum_{r=1}^j \frac{e^{\lambda_r(k)t}}{R_j'(\lambda_r(k),k)}, \quad j = \overline{1,n},$$

де $P_j(\mu)$, $R_j(\lambda,k)$, $j = \overline{1,n}$, – многочлени, визначені рівностями

$$P_j(\mu) = (\mu - \mu_1) \cdot \ldots \cdot (\mu - \mu_j), \quad j = \overline{1,n},$$

$$R_j(\lambda,k) = (\lambda - \lambda_1(k)) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_j(k)), \quad j = \overline{1,n}.$$

Отже, функції $[g_{1,\ldots,j}](t)$, $[f_{1,\ldots,j}](t,k)$, $j = \overline{1,n}$, є аналітичними за змінною t. Очевидно, що

$$\left.\frac{d^q [g_{1,\ldots,j}](t)}{dt^q}\right|_{t=0} = \sum_{r=1}^j \frac{\mu_r^q}{P_j'(\mu_r)}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{17}$$

$$\left.\frac{d^q [f_{1,\ldots,j}](t,k)}{dt^q}\right|_{t=0} = \sum_{r=1}^j \frac{\lambda_r^q(k)}{R_j'(\lambda_r(k),k)}, \quad j = \overline{1,n}, \tag{18}$$

Вирази у правих частинах формул (17) (відповідно, формул (18)) співпадають з $[h_{1,\ldots,j}^q]$ (відповідно, з $[d_{1,\ldots,j}^q](k)$), де $[h_{1,\ldots,j}^q]$, $q = \overline{1,n}$, – розділена різниця функції λ^q у точках $\mu_1, \ldots, \mu_j$, а $[d_{1,\ldots,j}^q](k)$, $q = \overline{1,n}$, – розділена різниця цієї ж функції у точках $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_j(k)$. Відомо (див. с. 224 у [12]), що

$$[h_{1,\ldots,j}^q] = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad q < j, \\ 1, & \text{якщо} \quad q = j, \end{cases} \tag{19}$$

$$[d_{1,\ldots,j}^q](k) = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad q < j, \\ 1, & \text{якщо} \quad q = j. \end{cases} \tag{20}$$

Якщо ж $q > j$, то вирази $[h^q_{1,\ldots,j}]$ (відповідно, $[d^q_{1,\ldots,j}](k)$) суть однорідними симетричними многочленами степеня $(q-j)$ від $\mu_1,\ldots,\mu_j$ (відповідно, від $\lambda_1(k),\ldots,\lambda_j(k)$).

Із формул (17), (18), (19), (20) дістаємо такі тейлорівські розвинення:

$$[g_{1,\ldots,j}](t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + t^j\alpha_j(t), \quad j=\overline{1,n},$$

$$[f_{1,\ldots,j}](t,k) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} + t^j\beta_j(t,k), \quad j=\overline{1,n},$$

де $\alpha_j(t)$, $\beta_j(t,k)$, $j=\overline{1,n}$, – аналітичні за t в околі $t=0$.

Отже, для елементів визначника $\Delta_{n-1,n-1}(k)$ отримаємо такі розвинення:

$$\int_0^T [g_{1,\ldots,j}](t)[f_{1,\ldots,q}](t,k)dt = \alpha_{jq}(T,k)T^{j+q} +$$

$$= \frac{T^{j+q-1}}{(j+q-1)\cdot(j-1)!\cdot(q-1)!}, \quad q=\overline{1,n},$$

де $\alpha_{jq}(T,k), j,q=\overline{1,n}$, аналітичні функції в околі точки $T=0$. Отже, в околі точки $T=0$

$$\Delta_{n-1,n-1}(k) = \det\left\|\frac{T^{j+q-1}}{(j+q-1)\cdot(j-1)!\cdot(q-1)!} +\right.$$

$$\left. + \alpha_{jq}(T,k)T^{j+q}\right\|.$$

У цьому визначнику винесемо з кожного j-го рядка множник $T^j/(j-1)!$, $j=\overline{1,n}$, а потім в одержаному визначнику винесемо з кожного q-го стовпця множник $T^{q-1}/(q-1)!$, $q=\overline{1,n}$. У результаті одержимо, що

$$\Delta_{n-1,n-1}(k) = C_6T^{n^2}\det\|(j+q-1)^{-1}+$$

$$+(j-1)!(q-1)!\alpha_{jq}(T,k)T\|^n_{j,q=1} =$$

$$= C_6T^{n^2}\left(\det\|(j+q-1)^{-1}\|^n_{j,q=1} + \beta(T,k)T\right), \quad (21)$$

де $C_6 = \prod\limits_{q=1}^{n-1}(q!)^{-2}$, $\beta(T,k)$ – аналітична функція в околі точки $T=0$. Відомо (див. задачу 3 на с. 110 у [6]), що

$$\det\left\|(j+q-1)^{-1}\right\|^n_{j,q=1} = \prod_{q=1}^{n-1}(q!)^3/\prod_{q=n}^{2n-1}q!.$$

У такий спосіб із формул (16) та (21) дістаємо розвинення

$$\Delta(k) = \frac{C_5T^{n^2}W(k)}{(n^2)!} + C_6W(k)V\beta(T,k)T^{n^2+1},$$

з якого випливає твердження леми 5.■

Лема 6. *Визначник $\Delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, є квазімногочленом вигляду*

$$\Delta(k) = \sum_{q=1}^{R}\exp(\Lambda_q(k)T)p_q(T,k),$$

де $\Lambda_j(k)\neq\Lambda_q(k), j\neq q$, а $p_q(T,k)$, $q=\overline{1,R}$, – многочлени за T степеня, не вищого, ніж n. Для порядку $n_\Delta(k) \equiv \sum\limits_{q=1}^{R}(\deg p_q(T,k)+1)$ квазімногочлена $\Delta(k)$ виконується нерівність

$$n_\Delta(k) \le (n+1)!2^n,$$

а для дійсних частин показників його експонент – нерівності: $\operatorname{Re}\Lambda_q(k) \ge n\min\limits_{1\le j\le n}\operatorname{Re}\mu_j$, $q=\overline{1,R}$.

□ *Доведення.* Для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ можливими є такі випадки: 1) усі показники $\mu_j+\lambda_q(k)$, $j,q=\overline{1,n}$, є відмінними від нуля; 2) деякі з цих показників можуть перетворюватися в нуль.

Розглянемо випадок 1). У цьому випадку елементи визначника $\Delta(k)$ мають вигляд

$$\int\limits_0^T e^{(\mu_j+\lambda_q(k))t}dt = \frac{e^{(\mu_j+\lambda_q(k))T}-1}{\mu_j+\lambda_q(k)}, \quad j,q=\overline{1,n}. \quad (22)$$

Використовуючи формулу для розвинення визначника та формули (22), одержимо

$$\Delta(k) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{r=1}^{n}\frac{e^{(\mu_{i_r}+\lambda_r(k))T}-1}{\mu_{i_r}+\lambda_r(k)}. \quad (23)$$

Оскільки для довільних наборів чисел $y_1,\ldots,y_n\in\mathbb{C}$ та $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$ виконується рівність

$$\prod_{r=1}^{n}(y_r+z_r) = \sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}y_1^{j_1}\ldots y_n^{j_n}z_1^{1-j_1}\ldots z_n^{1-j_n},$$

то з формули (23) отримаємо, що

$$\Delta(k) = \sum_{\substack{\omega=(i_1,\ldots,i_n),\\ \omega\in S_n}}\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}(-1)^{\rho_\omega+n+j_1+\ldots+j_n}\times$$

$$\times(\mu_{i_1}+\lambda_1(k))^{1-j_1}\ldots(\mu_{i_n}+\lambda_n(k))^{1-j_n}\times$$

$$\times e^{\{j_1[\mu_{i_1}+\lambda_1(k)]T+\ldots+j_n[\mu_{i_n}+\lambda_n(k)]T\}}.$$

Зрозуміло, що кількість різних показників експонент в останній формулі не перевищує $n!2^n$. Отже, для порядку $n_{\Delta(k)}$ визначника $\Delta(k)$ отримуємо оцінку $n_{\Delta(k)} \le n!2^n$. Оцінка знизу для дійсних частин показників експонент в попередній формулі для визначника $\Delta(k)$ є очевидною.

У випадку 2) лему доводять аналогічно, при цьому слід зауважити, що в межах кожного рядка та кожного стовпця визначника $\Delta(k)$ може виявитися лише один інтеграл від експоненти з нульовим показником (це випливає з того, що кожен з наборів $\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$, $\{\lambda_1(k),\ldots,\lambda_n(k)\}$ складається з різних чисел), який, очевидно, дорівнює T. ■

III. Метричні оцінки знизу для $\Delta(k)$

Встановимо оцінки знизу для визначника $\Delta(k)$.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T>0$ нерівність* (8) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p$, якщо $\omega_1>\sigma_1$, $\sigma_1=(p+1)\xi_1-p$, $\xi_1=(n+1)!2^n$.*

□ *Доведення.* Нехай T_0 – довільне додатне число. Через $A_{\omega_1}(k)$ позначимо множину тих $T\in(0,T_0]$, для яких нерівність

$$|\Delta(k)|\le(1+|k|)^{-\omega_1} \tag{24}$$

виконується при фіксованому $k\in\mathbb{Z}^p$. Згідно з лемою 1 для того, щоб довести теорему, досить перевірити, що для $\omega_1>\sigma_1$ ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\mu_1A_{\omega_1}(k)$ є збіжним.

Із лем 2, 5, 6 випливає, що

$$B_{\Delta(k)}\le C_7(1+|k|),$$

$$G_{\Delta(k)}\ge C_8(1+|k|),$$

$$\psi_{\Delta(k)}\le C_9,$$

де додатні сталі C_7, C_8, C_9 не залежать від k. Тоді за лемою 4 для $\omega_1>\sigma_1$ для міри Лебега множини $A_{\omega_1}(k)$ отримуємо оцінку

$$\mu_1A_{\omega_1}(k)\le C_{10}(1+|k|)(1+|k|)^{(1-\omega)/(n_{\Delta(k)}-1)}\le$$

$$\le C_{10}(1+|k|)^{(\xi_1-\omega)/(\xi_1-1)}=C_{10}(1+|k|)^{-p-\varepsilon},\ k\in\mathbb{Z}^p, \tag{25}$$

де $n_{\Delta(k)}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, – порядок квазімногочлена $\Delta(k)$ (див. формулювання леми 6), $\varepsilon=(\omega_1-\sigma_1)/(\xi_1-1)>0$. З нерівностей (25) випливає, що

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\mu_1A_{\omega_1}(k)\le C_{10}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}(1+|k|)^{-p-\varepsilon}<\infty.$$

Теорему доведено. ■

IV. Структура визначника $\Gamma(k)$

З'ясуємо структуру визначника $\Gamma(k)$.

Лема 7. *Для довільних двох наборів m чисел $b_1,\dots,b_m$, $c_1,\dots,c_m$ визначник m-го порядку*

$$W_m\equiv\det\|\delta_{ij}-b_ic_j\|_{i,j=1}^m$$

обчислюється за формулою

$$W_m=1-b_1c_1-\ldots-b_mc_m. \tag{26}$$

□ *Доведення.* Використаємо метод математичної індукції за m. Для $m=1$ твердження леми є очевидним.

Припустимо, що твердження леми є істинним для $m=l$ і доведемо його істинність для $m=l+1$. Якщо хоча б одне серед чисел $b_1,\dots,b_{l+1}$, наприклад, b_{j_0}, $1\le j_0\le l+1$, дорівнює нулю, то j_0-й стовпець визначника W_{l+1} має вигляд $col(0,\dots,0,1,\dots,0)$, де одиниця знаходиться на j_0-му місці. Тому, розвиваючи визначник W_{l+1} за елементами j_0-го стовпця, дістанемо, що

$$W_{l+1}=\det\|\delta_{ij}-b_ic_j\|_{i,j\in\{1,\dots,l+1\}\setminus\{j_0\}}. \tag{27}$$

За припущенням індукції

$$\det\|\delta_{ij}-b_ic_j\|_{i,j\in\{1,\dots,l+1\}\setminus\{j_0\}}=$$

$$=1-\sum_{j=1,j\ne j_0}^{l+1}b_jc_j. \tag{28}$$

Тоді з формул (27), (28) випливає твердження леми для $m=l+1$, коли $b_{j_0}=0$.

Нехай тепер всі числа $b_1,\dots,b_{l+1}$ є відмінними від нуля. Диференціюючи визначник

$$W_{l+1}\equiv\det\|\delta_{ij}-b_ic_j\|_{i,j=1}^{l+1},$$

за змінною c_{l+1}, одержимо

$$\frac{\partial W_{l+1}}{\partial c_{l+1}}=\begin{vmatrix}1-b_1c_1 & \dots & -b_lc_1 & -b_{l+1}c_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -b_1c_l & \dots & 1-b_lc_l & -b_{l+1}c_l\\ -b_1 & \dots & -b_l & -b_{l+1}\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^{l+1}b_1\cdot\ldots\cdot b_lb_{l+1}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}c_1-\frac{1}{b_1} & \dots & c_1 & c_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_l & \dots & c_l-\frac{1}{b_l} & c_l\\ 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}. \tag{29}$$

Визначник у формулі (29) не зміниться, якщо його останній стовпець замінити різницею останнього та передостаннього стовпців. Тому

$$\frac{\partial W_{l+1}}{\partial c_{l+1}}=(-1)^{l+1}b_1\cdot\ldots\cdot b_lb_{l+1}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}c_1-\frac{1}{b_1} & \dots & c_1 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_l & \dots & c_l-\frac{1}{b_l} & \frac{1}{b_l}\\ 1 & \dots & 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)^lb_1\cdot\ldots\cdot b_{l-1}b_{l+1}\times$$

$$\times\begin{vmatrix}c_1-\frac{1}{b_1} & \dots & c_1 & c_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ c_{l-1} & \dots & c_{l-1}-\frac{1}{b_{l-1}} & c_{l-1}\\ 1 & \dots & 1 & 1\end{vmatrix}. \tag{30}$$

Визначник у формулі (30) має структуру, аналогічну до структури визначника у формулі (29), і має порядок l. Застосовуючи міркування, аналогічні до проведених вище, одержимо

$$\frac{\partial W_{l+1}}{\partial c_{l+1}}=-b_{l+1}. \tag{31}$$

Легко перевірити, що $W_{l+1}|_{c_{l+1}=0}=W_l$. Тому з рівності (31) випливає, що

$$W_{l+1}=W_l-b_{l+1}c_{l+1}. \tag{32}$$

За припущенням індукції

$$W_l = 1 - b_1 c_1 - \ldots - b_l c_l. \qquad (33)$$

У такий спосіб з рівностей (32), (33) отримуємо, що

$$W_{l+1} = 1 - b_1 c_1 - \ldots - b_{l+1} c_{l+1}.$$

Лему доведено. ■

V. Метричні оцінки визначника $\Gamma(k)$

Теорема 2. *Нехай $\Delta(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^p$, і нехай існує стала $C_2 > 0$ така, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність*

$$|A_n(ik)| \geq C_{11}|k|^n, \quad C_{11} > 0. \qquad (34)$$

Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^m$) векторів $\vec{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m) \in [0,T]^m$ нерівність (9) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\omega_2 > pmn$.

□ *Доведення.* Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$, $k \neq \vec{0}$, запровадимо такі множини:

$$E_{\omega_2}(k) = \{\vec{\tau} \in [0,T]^m : |\Gamma(k)| \leq |k|^{-\omega_2}\}.$$

З огляду на лему 1 для доведення теореми досить перевірити, що ряд $\sum_{|k|>0} \mu_m E_{\omega_2}(k)$ є збіжним, якщо $\omega_2 > mnp$. Згідно з твердженням леми 7 визначник $\Gamma(k)$ обчислюється за формулою

$$\Gamma(k) = 1 - B_1(ik) I_k(\tau_1) - \ldots - B_m(ik) I_k(\tau_m), \quad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Розглянемо такі величини: $\Upsilon_0(k) = \Gamma(k)$,

$$\Upsilon_j(k) = A_n^j(ik)\left(1 - \sum_{r=j+1}^{m} B_r(ik) I_k(\tau_r)\right) -$$

$$-A_n^{j-1}(ik) \sum_{r=1}^{j} B_r(ik), \quad j = \overline{1, m-1}, \qquad (35)$$

$\Upsilon_m(k) = A_n^{m-1}(ik)(A_n(ik) - B_1(ik) - \ldots - B_m(ik))$.

Легко перевірити, що

$$E_{\omega_2}(k) \subset \bigcup_{j=1}^{m+1} E_{j,\omega_2}(k),$$

де $E_{m+1,\omega_2} = \{\vec{\tau} \in [0,T]^m : |\Upsilon_m(k)| \leq \eta_m(k)\}$,

$$E_{j,\omega_2}(k) = \{\vec{\tau} \in [0,T]^m : |\Upsilon_{j-1}(k)| \leq \eta_{j-1}(k),$$

$$|\Upsilon_j(k)| > \eta_j(k)\}, \quad j = \overline{1,m},$$

а $\eta_j(k) = |k|^{mn-(m-j)n(p+1)-\varepsilon_j}$, $\varepsilon_j > 0$, $j = \overline{0,m}$, $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_m$.

Тому збіжність ряду $\sum_{|k|>0} \mu_m E_{\omega_2}(k)$ є наслідком збіжності усіх рядів $\sum_{|k|>0} \mu_m E_{j,\omega_2}(k)$, $j = \overline{1, m+1}$.

Оскільки степені усіх многочленів $B_j(\xi)$ є меншими від n, то існує таке $K_1 \in \mathbb{N}$, що для $\Upsilon_m(k)$ при $|k| > K_1$ виконується така оцінка знизу:

$$|\Upsilon_m(k)| = |A_n^m(ik)| \left| \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j(ik)}{A_n(ik)} - 1 \right| \geq \frac{1}{2}|A_n(ik)|^m. \qquad (36)$$

Тоді з нерівностей (34), (36) отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > K$ виконується оцінка

$$|\Upsilon_m(k)| \geq \frac{C_{11}^m}{2}|k|^{mn}. \qquad (37)$$

З оцінки (37) випливає, що множина $E_{m+1,\omega_2}(k)$ є порожньою для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, $|k| > \max\{K_1, K_2\}$, де $K_2 = (C_{11}^m/2)^{1/\varepsilon_m}$. Тому $\mu_m E_{m+1,\omega_2}(k) = 0$, якщо $|k| > \max\{K_1, K_2\}$.

Позначимо:

$$\vec{\tau_j} = (\tau_1, \ldots, \tau_{j-1}, \tau_{j+1}, \ldots, \tau_m), \quad j = \overline{1,m},$$

$$E_{j,\omega_2}(k, \vec{\tau_j}) = \{\tau_j \in [0,T] : \vec{\tau} \in E_{j,\omega_2}(k)\}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Із основної властивості функції Ґріна випливає, що виконуються рівності

$$L\left(\frac{\partial}{\partial \tau_j}, k\right) \Upsilon_{j-1}(k) = \Upsilon_j(k), \;\; j = \overline{1,m}, \;\; k \in \mathbb{Z}^p. \qquad (38)$$

Якщо $\vec{\tau} \in E_{j,\omega_2}(k)$, $j = \overline{1,m}$, то з формул (38) випливає, що

$$\left| L\left(\frac{\partial}{\partial \tau_j}, k\right) \Upsilon_{j-1}(k) \right| \geq \eta_j(k), \; j = \overline{1,m}, \; k \in \mathbb{Z}^p. \qquad (39)$$

Для оцінки зверху міри множини $E_{j,\omega_2}(k, \vec{\tau_j})$ застосуємо лему 3. Отримаємо, що

$$\mu_1 E_{j,\omega_2}(k, \vec{\tau_j}) \leq C_{12}|k| \left(\frac{\eta_{j-1}(k)}{\eta_j(k)}\right)^{1/n} \leq$$

$$\leq C_{12}|k|^{-p-\xi_j}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k \in \mathbb{Z}^p,$$

де $\xi_j = (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j)/n > 0$, $j = \overline{1,m}$. Тоді за теоремою Фубіні

$$\mu_m E_{j,\omega_2}(k) \leq C_{12} T^{n-1} |k|^{-p-\xi_j}, j = \overline{1,m}. \qquad (40)$$

Із нерівності (40) отримуємо збіжність рядів $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \mu_m E_{j,\omega_2}(k)$, а отже, й ряду $\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \mu_m E_{\omega_2}(k)$.

Теорему доведено. ■

Висновки

У роботі встановлено метричні оцінки знизу для малих знаменників, які виникають під час побудови розв'язку задачі з інтегральними умовами з показниковими ваговими функціями для строго гіперболічного рівняння, навантаженого значеннями невідомої функції та її похідних на скінченній кількості гіперплощин. Під час доведення цих оцінок з'ясовано детальну структуру цих знаменників, при цьому використано техніку розділених різниць.

Результати можна поширити на випадок малих знаменників, що виникають у задачах з інтегральними умовами для систем рівнянь із частинними похідними.

Робота частково підтримана ДФФД України (проект №54.1/027).

Література

[1] *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.

[2] *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей / Гельфонд А. О.– М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 400 с.

[3] *Ільків В. С.* Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку / Ільків В. С., Магеровська Т. В. // Вісн. Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – Сер. Фізико-математичні науки. – Вип. 625, № 625, 2008. – С. 12–19.

[4] *Медвідь О. М.* Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними / О. М. Медвідь, М. М. Симотюк // Мат. студії. – 2007. – Т. 28, № 2. – С. 115–140.

[5] *Медвідь О.* Інтегральна задача для навантажених рівнянь із частинними похідними / О. Медвідь // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т. 4. – С. 201–213.

[6] *Полиа Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. / Полиа Г., Сеге Г. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с. – Ч. 2. – 432 с.

[7] *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[8] *Пташник Б. Й.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[9] *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для навантаженого полігармонічного рівняння // Прикладні проблеми механіки і математики. – Науковий збірник, 2003, вип. 1. – С. 25–34.

[10] *Симотюк М. М.* Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ. – 2005, Т. 2. – С. 199–212.

[11] *Симотюк М. М.* Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними: дис. ... канд. фіз.-мат. наук.: 01.01.02 "Диференціальні рівняння" / Симотюк Михайло Михайлович. – Львів, 2005. – 193 с.

[12] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Шилов Г. Е. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

[13] *Штабалюк П. И.* Почти-периодические решения дифференциальных уравнений гиперболического и составного типов: дисс. ... канд. физ.-мат. наук.: 01.01.02. "Дифференциальные уравнения" / Штабалюк Петр Иванович. – Львов, 1984. – 146 с.

[14] *Штабалюк П. И.* Почти-периодические решения задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Штабалюк П. И. – В сб.: Материалы IX-й конференции молодых ученых Института прикладных проблем механики и математики АН УССР, ч. II. – Львов, 1982, с. 175 –182 – Деп. в ВИНИТИ 10.01.1984 г. – № 324-84 Деп.

МЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ МАЛЫХ ЗНАМЕНАТЕЛЕЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Ильків В. С.[a,b], Симотюк М. М.[a], Хомяк Д. В.[a]

[a] *Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины 79060, Львов, ул. Научная, 3-б, Украина*

[b] *Национальный университет "Львивськa политэхника" 79013, Львов, ул. С. Бандеры, 12, Украина*

Доказаны метрические теоремы об оценках снизу малых знаменателей, возникающих при построении решения интегральной задачи для нагруженного гиперболического уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, малые знаменатели, мера Лебега, функция Грина, исключительные множества.

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

УДК: 517.95+511.2

METRIC ESTIMATES OF SMALL DENOMINATORS OF THE INTEGRAL PROBLEM FOR LOADED HYPERBOLIC EQUATION

Ilkiv V. S.[a, b], Symotyuk M. M.[a], Khomyak D. V.[a]

[a] *Pidstryhach Institute of Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine*
79060, Lviv, 3-b Naukova Str., Ukraine
[b] *Lviv Polytechnic National University*
12, S. Bandery Str., Lviv, 79013, Ukraine

The metric theorems of the estimation of small denominators which arise under construction of the solution of the nonlocal integral problems for loaded hyperbolic equation are proved.

Key words: differential equations, small denominators, Lebesgue measure, Green functions, exceptional sets

2000 MSC: 35K35, 35B15, 35B30

UDK: 517.95+511.2