ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
№804, 2014, с. 7–15

JOURNAL OF LVIV POLYTECHNIC
NATIONAL UNIVERSITY
"Physical and mathematical sciences"
№804, 2014, p. 7–15

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ АНІЗОТРОПНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ ПОКАЗНИКАМИ НЕЛІНІЙНОСТІ В НЕОБМЕЖЕНИХ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ОБЛАСТЯХ

Бокало М. М., Притула Я. Г., Скіра І. В.

Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська 1, 79000, Львів, Україна

(Отримано 2 жовтня 2014 р.)

Доведена коректність задачі Фур'є для анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності без обмежень на зростання розв'язків і вихідних даних при прямуванні часової змінної до $-\infty$. Отримано оцінки узагальненого розв'язку цієї задачі та умови існування періодичних і майже періодичних розв'яків.

Ключові слова: параболічне рівняння вищого порядку, анізотропне параболічне рівняння, змінні показники нелінійності, задача Фур'є, періодичний розв'язок, майже періодичний розв'язок.

2000 MSC: 35K10, 35K55, 35K92

УДК: 517.95

Вступ

Ми досліджуємо питання існування та єдиності розв'язків задачі Фур'є (задачі без початкових умов) для анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності. Рівняння задані в циліндричних областях, що є декартовими добутками обмежених просторових областей на часову вісь. Як наслідки з цих результатів отримуємо умови на вихідні дані задач, при яких їхні розв'язки мають ту чи іншу поведінку на нескінченності або є періодичними та майже періодичними функціями відносно часової змінної.

Задачі Фур'є для параболічних рівнянь вивчали в працях багатьох математиків, зокрема, в [1–11]. Доволі докладний огляд стосовно цих результатів можна знайти в [8]. Варто відзначити, що задачі Фур'є для лінійних та багатьох нелінійних параболічних рівнянь є коректними лише тоді, коли на їхні розв'язки та вихідні дані накладені певні обмеження на зростання у разі прямування часової змінної до $-\infty$ [1–8]. Проте існують нелінійні рівняння, для яких задачі Фур'є однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [9–11]. Тут ми розглядаємо саме таку ситуацію у випадку анізотропних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності.

Диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності сьогодні доволі активно досліджують. Розв'язки відповідних задач для таких рівнянь беруться з узагальнених просторів Лебега та Соболєва. Докладнішу інформацію про ці простори та їх використання можна знайти в [12–16].

Робота складається з трьох частин: у першій частині формулюється досліджувана задача і основні результати стосовно неї, в другій частині наведено допоміжні твердження, потрібні для доведення теорем, в яких викладені основні результати, а в третій – обґрунтування основних результатів.

I. Постановка задачі і формулювання основного результату

Нехай n, m – натуральні числа і M – підмножина множини $\{0, 1, \ldots, m\}$ така, що $\{0, m\} \subset M$. Позначимо через N кількість мультиіндексів розмірності n (впорядкованих наборів $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ з цілих невід'ємних чисел), довжини яких ($|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$) є елементами множини M, а через $\mathbb{R}^N$ – лінійний простір впорядкованих наборів з N дійсних чисел $\xi = (\xi_{\widehat{0}}, \ldots, \xi_\alpha, \ldots) \equiv (\xi_\alpha : |\alpha| \in M)$, компоненти яких пронумеровані мультиіндексами розмірності n, що мають довжини з M і впорядковані лексикографічно (це означає, що $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ передує $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, коли або $|\alpha| < |\beta|$, або $|\alpha| = |\beta|$ і $\alpha_k > \beta_k$, де $k = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$). Тут і далі $\widehat{0}$ – мультиіндекс, складений з нулів. Приймемо $|\xi| := \Big(\sum\limits_{|\alpha| \in M} |\xi_\alpha|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$ для довільного $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$, елементами якого є впорядковані набори дійсних чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ і на якому введена норма $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$. Вважатимемо, що межа $\Gamma := \partial\Omega$ області Ω є кусково-гладкою і позначимо через ν одиничний вектор зовнішньої нормалі до Γ. Приймемо

$Q := \Omega \times \mathbb{R}$, $\Sigma := \Gamma \times \mathbb{R}$ і $Q_{t_1,t_2} := \Omega \times (t_1,t_2)$ для довільних t_1 і t_2 (тут і далі припускаємо, що $t_1 < t_2$).

Розглянемо *задачу*: знайти функцію $u : \overline{Q} \to \mathbb{R}$, яка задовольняє (в певному сенсі) рівняння

$$u_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x,t,\delta u) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (1)$$

та крайові умови

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Sigma = 0\,, \quad j = \overline{0, m-1}, \qquad (2)$$

де $a_\alpha : Q \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f_\alpha : Q \to \mathbb{R}$ ($|\alpha| \in M$) – задані функції, δu – впорядкований набір з похідних $D^\alpha u \equiv \frac{\partial^{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}} u$ функції u порядків $|\alpha| \in M$ (правило впорядкування таке ж, як для компонентів векторів $\xi \in \mathbb{R}^N$).

Сформульовану задачу називають *задачею Фур'є для рівняння (1) з крайовими умовами (2)* , і далі ми її коротко називаємо *задачею (1),(2).*

Тут вивчатимемо узагальнені розв'язки задачі (1),(2), а для цього введемо необхідні позначення і зробимо відповідні припущення щодо вихідних даних цієї задачі.

Спочатку введемо потрібні нам далі функційні простори. Нехай $r \in L_\infty(\Omega)$, причому $r(x) \ge 1$ для майже всіх $x \in \Omega$. Припустимо, що або $G{=}\Omega$, або $G = \Omega \times S$, де S – інтервал в $\mathbb{R}$. Позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ узагальнений простір Лебега, який складається з функцій $v \in L_1(G)$ таких, що $\rho_{G,r}(v) < \infty$, де $\rho_{G,r}(v) := \int_\Omega |v(x)|^{r(x)}dx$, якщо $G{=}\Omega$, і $\rho_{G,r}(v) := \int_G |v(x,t)|^{r(x)}dxdt$, якщо $G{=}\Omega{\times}S$. На цьому просторі введемо норму $\|v\|_{L_{r(\cdot)}(G)} := \inf\{\lambda > 0 \mid \rho_{G,r}(v/\lambda) \le 1\}$, з якою він є банаховим [12]. Якщо $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\Omega} r(x) > 1$, то спряжений простір $[L_{r(\cdot)}(G)]'$ може бути ототожненим з $L_{r'(\cdot)}(G)$, де r' є функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(x)} + \frac{1}{r'(x)} = 1$ для майже всіх $x \in \Omega$.

Нехай $G = \Omega \times S$, де S є необмеженим інтервалом в $\mathbb{R}$ (зокрема, $S = \mathbb{R}$). Позначимо через $L_{r(\cdot),loc}(\overline{G})$ лінійний простір вимірних функцій $g\colon G \to \mathbb{R}$ таких, що звуження g на Q_{t_1,t_2} належить до $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1,t_2 \in S$. Цей простір є повним локально опуклим із системою півнорм $\big\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}\,\big|\, t_1,t_2{\in}S\big\}$. Послідовність $\{g_m\}$ є сильно збіжною (відповідно, слабко збіжною) в $L_{r(\cdot),loc}(\overline{G})$, якщо послідовність звужень $\{g_m|_{Q_{t_1,t_2}}\}$ є сильно збіжною (відповідно, слабко збіжною) в $L_{r(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1,t_2 \in S$. Аналогічно визначаємо простір $L_{\infty,loc}(\overline{G})$.

Введемо ще простір $W_q^m(\Omega) := \{v \in L_q(\Omega)\,|\, D^\alpha v \in L_q(\Omega)\ \forall\alpha,\ |\alpha| \le m\}$, який є банаховим з нормою $\|v\|_{W_q^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha v\|_{L_q(\Omega)}$, де $q \ge 1$ – яке-небудь число.

Нехай $p = (p_\alpha : |\alpha| \in M)$ – впорядкований набір вимірних на Ω функцій p_α (пронумерованих так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$), для яких виконується умова

$$(\mathcal{P})\ 2 \le p_\alpha^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} p_\alpha(x) =: p_\alpha^+ < +\infty,$$
$$p_{\widehat{0}}^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} p_{\widehat{0}}(x) > 2.$$

Через $p' = ({p_\alpha}' : |\alpha| \in M)$ позначатимемо впорядкований набір функцій таких, що $1/p_\alpha(x) + 1/{p_\alpha}'(x) = 1$ ($|\alpha| \in M$) для м.в. $x \in \Omega$.

Нехай $W_{p(\cdot)}^m(\Omega) := \{v \in L_1(\Omega)\,|\, D^\alpha v \in L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)\ \forall\alpha,\ |\alpha| \in M\}$ – банахів простір з нормою $\|v\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha v\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(\Omega)}$. Під $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega)$ розуміємо замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_{W_{p(\cdot)}^m(\Omega)}$. Для зручності викладення матеріалу позначимо $\mathbb{V}_p := \overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^m(\Omega)$.

Введемо простір $W_{p(\cdot)}^{m,0}(Q_{t_1,t_2})$ як підпростір простору $L_{p_0(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$, складений з тих функцій h, для яких $D^\alpha h \in L_{p_\alpha(\cdot)},(Q_{t_1,t_2})$, якщо $|\alpha| \in M$, із нормою $\|h\|_{W_{p(\cdot)}^{m,0}(Q_{t_1,t_2})} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}$.

Через $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot),}^{m,0}(Q_{t_1,t_2})$ позначимо підпростір простору $W_{p(\cdot),}^{m,0}(Q_{t_1,t_2})$, складений з таких функцій h, що $h(\cdot,t) \in \mathbb{V}_p$ для майже всіх $t \in [t_1,t_2]$.

Нехай $G = \Omega \times S$, де S – числовий промінь або вся числова вісь. Введемо простір $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot),loc}^{m,0}(\overline{G})$ як підпростір простору $L_{p_0(\cdot),loc}(\overline{G})$, складений з функцій h, звуження яких на Q_{t_1,t_2} належить $\overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot)}^{m,0}(Q_{t_1,t_2})$ для будь-яких $t_1,t_2 \in S$. Цей простір є повним локально опуклим із сім'єю півнорм $\big\{\|h\|_{W_{p(\cdot)}^{m,0}(Q_{t_1,t_2})} := \sum\limits_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})}\,\big|\, t_1,t_2 \in S\big\}$.

Через $C(S;B)$, де B – банахів простір з нормою $\|\cdot\|_B$, S – числовий промінь або вся числова вісь, позначимо лінійний простір функцій $v\colon S{\to}B$ таких, що звуження v на довільний відрізок $[t_1,t_2] \subset S$ належить до $C([t_1,t_2];B)$. Простір $C(S;B)$ є повним локально опуклим із системою півнорм $\big\{\max_{t\in[t_1,t_2]} \|v(t)\|_B\,\big|\, t_1,t_2 \in S\big\}$. Отож, послідовність $\{v_m\}$ є збіжною в $C(S;B)$, якщо послідовність звужень $\{v_m|_{[t_1,t_2]}\}$ є збіжною в $C([t_1,t_2];B)$ для будь-яких $t_1,t_2 \in S$.

Визначимо лінійний простір

$$\mathbb{U}_{p,loc} := \overset{\circ}{W}{}_{p(\cdot),loc}^{m,0}(\overline{Q}) \cap C(\mathbb{R};L_2(\Omega))$$

із системою півнорм $\big\{\sum_{|\alpha|\in M} \|D^\alpha h\|_{L_{p_\alpha(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})} + \|h\|_{C([t_1,t_2];L_2(\Omega))}\,\big|\, t_1,t_2 \in S\big\}$ на ньому, з якою він є повним локально опуклим.

Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину, складену з впорядкованих наборів $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$, визначених на $Q \times \mathbb{R}^N$ дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як компоненти елементів простору $\mathbb{R}^N$, і функції з будь-якого такого набору задовольняють такі три умови:

($\mathcal{A}_1$) для кожного α ($|\alpha| \in M$) функція $a_\alpha(x,t,\xi)$, $(x,t,\xi) \in Q \times \mathbb{R}^N$, є каратеодорівською, тобто, для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_\alpha(x,t,\cdot) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ є неперервною і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^N$ функція $a_\alpha(\cdot,\cdot,\xi) : Q \to \mathbb{R}$ є вимірною за Лебегом;

($\mathcal{A}_2$) для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$, будь-яких $\xi \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ маємо

$$|a_\alpha(x,t,\xi)| \le h_\alpha(x,t) \sum_{|\beta|\in M} |\xi_\beta|^{p_\beta(x)/p'_\alpha(x)} + g_\alpha(x,t),$$

де $h_\alpha \in L_{\infty,loc}(\bar{Q})$, $g_\alpha \in L_{p_\alpha{}'(\,\cdot\,)}(Q)$;

($\mathcal{A}_3$) для довільних $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ та майже всіх $(x,t) \in Q$ виконується нерівність

$$\sum_{|\alpha|\in M} (a_\alpha(x,t,\xi) - a_\alpha(x,t,\eta))(\xi_\alpha - \eta_\alpha) \ge$$

$$\ge K_a \sum_{|\alpha|\in M} |\xi_\alpha - \eta_\alpha|^{p_\alpha(x)},$$

де $K_a{>}0$ – стала, яка залежить від набору $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$.

Розглядатимемо також підмножину $\mathbb{A}_p^*$ множини $\mathbb{A}_p$, складену з елементів вигляду

$$(a_\alpha(x,t,\xi) \equiv \hat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha : |\alpha| \in M),$$

де $\hat{a}_\alpha \in L_{\infty,loc}(\bar{Q})$ і

$$\hat{a}_\alpha(x,t) \ge \widehat{K}_a = const > 0 \,\text{для м.в.}(x,t) \in Q\,(|\alpha| \in M),$$

де стала $\widehat{K}_a$ залежить від набору $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$. Те, що $\mathbb{A}_p^* \subset \mathbb{A}_p$ легко перевірити опираючись на нерівність (див. [5])

$$(|s_1|^{q-2}s_1 - |s_2|^{q-2}s_2)(s_1 - s_2) \ge 2^{2-q}|s_1 - s_2|^q,$$

яка правильна для будь-яких $q \ge 2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$.

Відзначимо, що якщо $(a_\alpha : |\alpha| \in M)$ належить $\mathbb{A}_p^*$, то рівняння (1) має вигляд

$$u_t + \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha(\hat{a}_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha u) =$$

$$= \sum_{|\alpha|\in M} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha f_\alpha(x,t), \quad (x,t) \in Q, \qquad (3)$$

Частковим випадком рівняння (3), а отже, і рівняння (1), є

$$u_t + (-\Delta)^m u + \hat{a}_{\hat{0}}(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t),\ (x,t) \in Q.$$

Нехай $\mathbb{F}_{p',loc}$ – множина, елементами якої є впорядковані набори $(f_\alpha : |\alpha| \in M)$ з N визначених на Q дійснозначних функцій, які пронумеровані так само, як елементи простору $\mathbb{R}^N$, і для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$ функція f_α належить простору $L_{p_\alpha{}'(\cdot),loc}(\overline{Q})$.

Означення. Нехай $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p',loc}$. Узагальненим розв'язком задачі (1),(2) називаємо функцію $u \in \mathbb{U}_{p,loc}$, яка задовольняє рівність

$$\int\!\!\int_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x,t,\delta u) D^\alpha v\varphi - uv\varphi' \Big\}\, dxdt =$$

$$= \int\!\!\int_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha(x,t) D^\alpha v\varphi\, dxdt \qquad (4)$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p,\ \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$.

Основними результатами нашої роботи є такі твердження.

Теорема 1. *Нехай $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{F}_{p',loc}$. Тоді задача (1), (2) має єдиний узагальнений розв'язок і для будь-яких R, R_0, t_0 таких, що $R_0 > 0$, $R \ge max\{1, 2R_0\}$, $t_0 \in \mathbb{R}$, виконується оцінка*

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int_\Omega |u(x,t)|^2\, dx +$$

$$+ \int_{t_0-R_0}^{t_0} \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)} \Big)\, dxdt \le$$

$$\le C_1 \big(R^{-2/(p_0^+-2)} +$$

$$+ \int_{t_0-R}^{t_0} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt \big), \qquad (5)$$

де $C_1 > 0$ – стала, яка залежить тільки від K_a і $p_\alpha^-(|\alpha| \in M)$.

Розв'язок u задачі (1),(2) називається *обмеженим*, якщо $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2\, dx < \infty$.

Наслідок 1. *Нехай виконуються умови теореми 1 та $f_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)(|\alpha| \in M)$. Тоді узагальнений розв'язок задачі (1),(2) є обмеженим, він належить простору $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q)$ та задовольняє оцінку*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_\Omega |u(x,t)|^2\, dx + \int\!\!\int_Q \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\, dxdt \le$$

$$\le C_1 \int\!\!\int_Q \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt. \qquad (6)$$

Наслідок 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 та*

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt \le C_2,$$

де $C_2 > 0$ – стала. Тоді розв'язок задачі (1),(2) є обмеженим і задовольняє оцінку

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\, dxdt \le C_3,$$

де $C_3 > 0$ – стала, яка залежить лише від K_a, p_α^- $(|\alpha| \in M)$ і C_2.

Наслідок 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 та*

$$\lim_{\tau\to-\infty(+\infty)} \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt = 0.$$

Тоді, якщо u – узагальнений розв'язок задачі (1),(2), то

$$\lim_{t\to-\infty(+\infty)} \|u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega)} = 0,$$

$$\lim_{\tau\to-\infty(+\infty)} \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\, dxdt = 0.$$

Теорема 2. *Нехай $(a_\alpha : |\alpha|\in M)\in\mathbb{A}_p$, $(f_\alpha : |\alpha|\in M) \in \in \mathbb{F}_{p',loc}$. Крім того, припустимо, що існує число $\sigma > 0$ таке, що функції $a_\alpha(|\alpha| \in M)$ і $f_\alpha(|\alpha| \in M)$ є періодичними за змінною t з періодом σ. Тоді задача (1),(2) має единий узагальнений розв'язок і цей розв'язок є періодичним за змінною t з періодом σ.*

Множина $X \subset \mathbb{R}$ називається *відносно щільною*, якщо існує $l > 0$ таке, що для довільного $a \in \mathbb{R}$ маємо $X \cap [a, a + l] \neq \varnothing$, тобто у відрізку $[a, a + l]$ знайдеться хоча б один елемент множини X. Функція v як елемент простору $C(\mathbb{R}; B)$, де B – банахів простір з нормою $\|\cdot\|_B$, є *майже періодичною за Бором*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ множина $\{\sigma \mid \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|v(\cdot, t+\sigma)-$ $-v(\cdot,t)\|_B \leq \varepsilon\}$ є відносно щільною. Функція f_α як елемент простору $L_{p_\alpha{}'(\cdot),loc}(\overline{Q})\,(|\alpha|\in M)$ є *майже періодичною за Степановим*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ множина $\{\sigma \mid \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} |f_\alpha(x, t + \sigma) -$ $f_\alpha(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \leq \varepsilon\}$ є відносно щільною. Функція w як елемент простору $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),loc}(\overline{Q})$ є *майже періодичною за Степановим*, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ множина $\{\sigma \mid \sup\limits_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \big[\sum_{|\alpha\in M} |D^\alpha(x, t + \sigma)-$ $-D^\alpha(x,t)|^{p_\alpha(x)} + +|w(x,t+\sigma)-w(x,t)|^{p_0(x)}\big]\, dxdt \leq \varepsilon\}$ є відносно щільною. Детальнішу інформацію про майже періодичні функції можна знайти в монографіях [4, 17–22].

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1 та для кожного $\alpha\,(|\alpha| \in M)$ функція a_α належить простору $C(\mathbb{R}; L_\infty(\Omega))$ і є майже періодичною за Бором як елемент цього простору, а функція f_α є майже періодичною за Степановим як елемент простору $L_{p_\alpha(\cdot),loc}(\overline{Q})$ і, крім того, для довільного $\varepsilon > 0$ множина*

$$F_\varepsilon := \{\sigma \mid \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha(x, t + \sigma) -$$
$$- f_\alpha(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \leq \varepsilon,$$
$$\max_{|\alpha|\in M} \sup_{t\in\mathbb{R}} \|a_\alpha(\cdot, t + \sigma) - a_\alpha(\cdot, t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \varepsilon\}$$

є відносно щільною.

Тоді задача (1),(3) має единий узагальнений розв'язок і цей розв'язок є майже періодичним за Бором як елемент простору $C(\mathbb{R}; L_2(\Omega))$ та майже періодичним за Степановим як елемент простору $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),loc}(\overline{Q})$.

II. Допоміжні твердження

Тут наведемо потрібні нам для обґрунтування основного результату допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай для будь-яких $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ функція $w \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ така, що виконується тотожність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \big\{\big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v\big)\varphi - wv\varphi'\big\}\, dxdt = 0,$$
$$v \in \mathbb{V}_p,\ \varphi \in C_0^1(t_1, t_2), \tag{7}$$

для деяких $g_\alpha \in L_{p'_\alpha(\cdot)}(Q)$ $(|\alpha| \in M)$. Тоді $w \in \in C\big([t_1, t_2]; L_2(\Omega)\big)$ і для будь-яких $\theta \in C^1([t_1, t_2])$, $v \in \mathbb{V}_p$ та $\tau_1, \tau_2 \in [t_1, t_2]$ $(\tau_1 < \tau_2)$ маємо

$$\theta(\tau_2) \int\limits_{\Omega} w(x, \tau_2)v(x)\, dx - \theta(\tau_1) \int\limits_{\Omega} w(x, \tau_1)v(x)\, dx+$$
$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Omega} \big\{\big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha v\big)\theta - wv\theta'\big\}\, dxdt = 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\theta(\tau_2)\|w(\cdot, \tau_2)\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{1}{2}\theta(\tau_1)\|w(\cdot, \tau_1)\|^2_{L_2(\Omega)} -$$
$$-\frac{1}{2} \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \|w(\cdot, t)\|^2_{L_2(\Omega)}\theta'(t)\, dt+$$
$$+ \int\limits_{\tau_1}^{\tau_2} \int\limits_{\Omega} \big(\sum_{|\alpha|\in M} g_\alpha D^\alpha w\big)\theta\, dxdt = 0. \tag{9}$$

Доведення цієї леми подібне до доведення леми 1 роботи [10].

Лема 2. *Нехай $(a_\alpha : |\alpha| \in M) \in \mathbb{A}_p$ і для деяких чисел $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_2 - t_1 \geq 1$, та кожного $l \in \{1, 2\}$ функції $u_l \in \overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_1,t_2}) \cap C([t_1, t_2]; L_2(\Omega))$, $f_{\alpha,l} \in L_{p_\alpha{}'(\cdot)}(Q_{t_1,t_2})$ $(|\alpha| \in M)$ такі, що виконується рівність*

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha(x, t, \delta u_l)D^\alpha v\varphi - u_l v\varphi'\big\}\, dxdt =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\in M} f_{\alpha,l}(x, t)D^\alpha v\varphi\, dxdt \tag{10}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p$ і $\varphi \in C_0^1(t_1, t_2)$. Тоді для довільних чисел R, R_0, t_0 таких, що $R_0 > 0$, $R \geq max\{1, 2R_0\}, t_1 \leq t_0 - R < t_0 \leq t_2$, правильна нерівність

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]} \int\limits_{\Omega} |u_1(x, t) - u_2(x, t)|^2\, dx +$$

$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_1-D^\alpha u_2|^{p_\alpha(x)}\big)\,dxdt\le$$
$$\le C_4\big\{R^{-2/(p_0^+-2)}+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big\},\quad(11)$$

де $C_4>0$ *– стала, яка залежить тільки від* K_a, p_α^- $(|\alpha|\in M)$.

Доведення леми 2. Використаємо ідею роботи [23]. Нехай R,R_0,t_0 такі, як у формулюванні леми, і $\eta(t):=t-t_0+R$, $t\in\mathbb{R}$. Для заданих $v\in\mathbb{V}_p$ і $\varphi\in C_0^1(t_1,t_2)$ розглянемо рівність (10) при $l=1$ та цю ж рівність при $l=2$ і віднімемо ці рівності. Прийнявши для майже всіх $(x,t)\in Q$

$$u_{12}(x,t):=u_1(x,t)-u_2(x,t),$$
$$f_{\alpha,12}(x,t):=f_{\alpha,1}(x,t)-f_{\alpha,2}(x,t),\ |\alpha|\in M,$$
$$a_{\alpha,12}(x,t):=a_\alpha(x,t,\delta u_1(x,t))-a_\alpha(x,t,\delta u_2(x,t)),$$
$$|\alpha|\in M,$$

у підсумку отримаємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\big\{\big(\sum_{|\alpha|\in M}a_{\alpha,12}D^\alpha v\big)\varphi-\ u_{12}v\varphi'\big\}\,dxdt=$$
$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}f_{\alpha,12}D^\alpha v\varphi\,dxdt,$$

до якої застосуємо лему 1 з $\tau_1=t_0-R$, $\tau_2=\tau\in(t_0-R,t_0]$, $w=u_{12}$, $g_\alpha=a_{\alpha,12}-f_{\alpha,12}$ $(|\alpha|\in M)$, $\theta=\eta^s$, $s:=p_0^-/(p_0^--2)$. Звідси здобуваємо рівність

$$\eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,\tau)|^2dx+$$
$$+2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}a_{\alpha,12}\,D^\alpha u_{12}\eta^s\,dxdt=$$
$$=s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^2\eta^{s-1}\,dxdt+$$
$$+2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}f_{\alpha,12}\,D^\alpha u_{12}\eta^s\,dxdt.\qquad(12)$$

Зробимо відповідні оцінки членів рівності (12). Згідно з умовою $(\mathcal{A}_3)$ маємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}a_{\alpha,12}D^\alpha u_{12}\eta^s\,dxdt\ge$$
$$\ge K_a\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt.\qquad(13)$$

Далі нам буде потрібна нерівність:

$$a\,b\le\varepsilon|a|^q+\varepsilon^{-1/(q-1)}\,|b|^{\,q'},$$
$$a,b\in\mathbb{R},\ q>1,\ 1/q+1/q'=1,\ \varepsilon>0,\qquad(14)$$

яка є наслідком стандартної нерівності Юнга: $a\,b\le\le|a|^q/q+|b|^{q'}/q'$. Вибираючи (для майже кожного $x\in\Omega$) $q=p_0(x)/2$, $q'=p_0(x)/(p_0(x)-2)$, $a=|u_{12}|^2\eta^{s/q}$, $b=\eta^{s/q'-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_1>0$, на підставі (14) отримаємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^2\eta^{s-1}dxdt\le\varepsilon_1\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}|u_{12}|^{p_0(x)}\eta^s\,dxdt+$$
$$+\varepsilon_1^{-2/(p_0^--2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt,\qquad(15)$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число. Знову використовуючи нерівність (14), одержуємо

$$\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}f_{\alpha,12}\,D^\alpha u_{12}\eta^s\,dxdt\le$$
$$\le\varepsilon_2\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}\varepsilon_2^{-1/(p_\alpha^--1)}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt,\qquad(16)$$

де $\varepsilon_2\in(0,1)$ – довільне число.

З (12) на підставі (13), (15), (16) за достатньо малих значень ε_1 і ε_2 отримаємо

$$\eta^s(\tau)\int\limits_{\Omega_R}|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt\le$$
$$\le C_5\big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\eta^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\eta^s\,dxdt\big],\qquad(17)$$

де $C_5>0$ – стала, яка залежить тільки від K_a і p_α^- $(|\alpha|\in M)$, а $\tau\in(t_0-R,t_0]$ – довільне число.

Оскільки $0\le\eta(t)\le R$, коли $t\in[t_0-R,t_0]$, та $\eta(t)\ge R-R_0$, коли $t\in[t_0-R_0,t_0]$, то з нерівності (17) отримаємо нерівність

$$(R-R_0)^s\int\limits_{\Omega}|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+$$
$$+(R-R_0)^s\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_{12}|^{p_\alpha(x)}\,dxdt\le$$
$$\le C_5\big[\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}R^{s-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\,dxdt+$$

$$+R^s\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\big]. \qquad (18)$$

Поділимо отриману нерівність на $(R-R_0)^s$. Зауважимо, що оскільки $R\geq\max\{1;2R_0\}$, то маємо $R/(R-R_0)=1+R_0/(R-R_0)\leq 2$. Врахувавши це та нерівність $R^{-p_0(x)/(p_0(x)-2)}\leq R^{-p_0^+/(p_0^+-2)}$, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_R}|u_{12}(x,\tau)|^2\,dx+\int\limits_{t_0-R_0}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}(D^\alpha u_{12})^{p_\alpha(x)}\,dxdt\leq$$
$$\leq C_6\big[R^{-p_0^+/(p_0^+-2)}\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}dxdt+$$
$$+\int\limits_{t_0-R}^{\tau}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{12}|^{p'_\alpha(x)}\,dxdt\big], \qquad (19)$$

де C_6 – додатна стала, яка залежить тільки від K_a і p_α^- $(|\alpha|\in M)$, а $\tau\in(t_0-R,t_0]$ – довільне число.

Звідси, врахувавши, що $\int\limits_{t_0-R}^{t_0}\int\limits_{\Omega}dxdt=R\cdot mes_n\Omega$, отримаємо (11). ∎

III. Доведення основних результатів

Доведення теореми 1. Спочатку доведемо, що задача (1),(2) має не більше ніж один узагальнений розв'язок. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки цієї задачі. Тоді на підставі леми 2 маємо

$$\max_{t\in[t_0-R_0,t_0]}\int\limits_{\Omega}|u_1(x,t)-u_2(x,t)|^2\,dx\leq C_4R^{-2/(p_0^+-2)}, \qquad (20)$$

де R,R_0,t_0 – довільні числа такі, що $R_0>0$, $R\geq\max\{1,2R_0\}$, $t_0\in\mathbb{R}$.

Зафіксуємо числа $R_0>0$ і $t_0\in\mathbb{R}$ та перейдемо в (20) до границі при $R\to+\infty$. У результаті одержуємо, що $u_1=u_2$ майже скрізь на $Q_{t_0-R_0,t_0}$. Оскільки R_0,t_0 – довільні числа, то звідси одержуємо, що $u_1=u_2$ майже всюди на Q. Отримане протиріччя доводить наше твердження.

Тепер перейдемо до доведення існування узагальненого розв'язку задачі (1),(2). Для цього для кожного $m\in\mathbb{N}$ розглянемо мішану задачу для рівняння (1) в області $Q_m=\Omega\times(-m,+\infty)$ з однорідною початковою умовою і крайовими умовами типу (2), а точніше, задачу на знаходження функції $u_m\in\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot),loc}(\overline{Q}_m)\cap C([-m,+\infty);L_2(\Omega))$, яка задовольняє початкову умову:

$$u_m|_{t=-m}=0$$

та інтегральну рівність

$$\int\limits_{Q_m}\big\{\sum_{|\alpha|\in M}a_\alpha(x,t,\delta u_m)D^\alpha v\varphi-u_mv\varphi'\big\}\,dxdt=$$
$$=\int\limits_{Q_m}\sum_{|\alpha|\in M}f_{\alpha,m}(x,t)D^\alpha v\varphi\,dxdt \qquad (21)$$

для будь-яких $v\in\mathbb{V}_p$, $\varphi\in C_0^1(-m,+\infty)$, де $f_{\alpha,m}(x,t):=f_\alpha(x,t)$, якщо $(x,t)\in Q_m$, і $f_{\alpha,m}(x,t):=0$, якщо $(x,t)\in Q\setminus Q_m$. Існування та єдиність функції u_m доведено в роботі [24]. Продовжимо u_m нулем на Q і за цим продовженням збережемо позначення u_m. Покажемо, що послідовність $\{u_m\}$ збігається в $\mathbb{U}_{p,loc}$ до узагальненого розв'язку задачі (1),(2). Для цього спочатку зауважимо, що для кожного $m\in\mathbb{N}$ функція u_m є узагальненим розв'язком задачі, яка відрізняється від задачі (1),(2) тільки тим, що замість f_α стоїть $f_{\alpha,m}$ для кожного $\alpha\,(|\alpha|\in M)$. Отож, на підставі леми 2 для будь-яких натуральних чисел m і k маємо

$$\max_{t\in[t_0,t_0-R_0]}\int\limits_{\Omega}|u_m(x,t)-u_k(x,t)|^2dx+$$
$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\big(\sum_{|\alpha|\in M}|D^\alpha u_m-D^\alpha u_k|^{p_\alpha(x)}\big)\,dxdt\leq$$
$$\leq C_4\big\{R^{-2/(p_0^+-2)}+$$
$$+\int\limits_{t_0-R_0}^{t_0}\int\limits_{\Omega}\sum_{|\alpha|\in M}|f_{\alpha,m}(x,t)-f_{\alpha,k}(x,t)|^{p_\alpha{}'(x)}\,dxdt\big\}, \qquad (22)$$

де R,R_0,t_0 – довільні числа такі, що $t_0\in\mathbb{R}$, $R\geq 1$, $0<R_0<R/2$.

Покажемо, що при фіксованих t_0 і R_0 ліва частина нерівності (22) прямує до нуля при $m,k\to+\infty$. Справді, нехай $\varepsilon>0$ – довільне як завгодно мале число. Виберемо $R\geq\max\{1,2R_0\}$ настільки великим, щоб виконувалась нерівність

$$C_4R^{-2/(p_0^+-2)}<\varepsilon. \qquad (23)$$

Це можна зробити, оскільки $p_0^+-2>0$. Тоді для будь-яких m і k з $\mathbb{N}$ таких, що $\max\{-m,-k\}\leq$ $\leq t_0-R$, маємо $f_{\alpha,m}=f_{\alpha,k}$ $(|\alpha|\in M)$ майже всюди на $\Omega\times(t_0-R,t_0)$ і, отже, права частина нерівності (22) на підставі (23) є меншою за ε. Звідси випливає, що звуження членів послідовності $\{u_m\}$ на $Q_{t_0-R_0,t_0}$ утворює фундаментальну послідовність в просторі $\overset{\circ}{W}{}^{m,0}_{p(\cdot)}(Q_{t_0-R_0,t_0})\cap C([t_0-R_0,t_0];L_2(\Omega))$. Отже, в силу довільності t_0 і R_0 існує функція $u\in\mathbb{U}_{p,loc}$ така, що $u_m\to u$ в $\mathbb{U}_{p,loc}$. Зауваживши, що в (21) можна замінити інтегрування по Q_m на інтегрування по Q, перейдемо в цій рівності до границі при $m\to\infty$. У результаті отримаємо (4) для довільних $v\in\mathbb{V}_p$ і $\varphi\in C_0^1(\mathbb{R})$. Це означає, що функція u є узагальненим розв'язком задачі (1),(2). Оцінка (5) безпосередньо випливає з леми 2 при $u_1=u$, $u_2=0$, $f_{\alpha,1}=f_\alpha$, $f_{\alpha,2}=0\,(|\alpha|\in M)$. ∎

Доведення наслідків 1–3. Ці твердження неважко отримати, використовуючи оцінку (5). ∎

Доведення теореми 2. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (1),(2). Введемо позначення:

$u^{(\mu)}(x,t) := u(x,t+\mu)$, $f_\alpha^{(\mu)}(x,t) := f_\alpha(x,t+\mu)$, $a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\xi) := a_\alpha(x,t+\mu,\xi)$, $(x,t) \in Q$, де $\mu \in \mathbb{R}$. Зробимо в (4) заміну t на $t+\mu$ ($\mu \in \mathbb{R}$ – поки що довільне) . У результаті здобуваємо тотожність

$$\int\int_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v\varphi - u^{(\mu)} v\varphi' \Big\}\, dxdt = \\ = \int\int_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)}(x,t) D^\alpha v\varphi\, dxdt$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p, \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$. Звідси, зробивши очевидні перетворення, отримаємо інтегральну тотожність

$$\int_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(0)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) D^\alpha v\varphi - u^{(\mu)} v\varphi' \Big\}\, dxdt = \\ = \int_Q \sum_{|\alpha|\in M} \{a_\alpha^{(0)}(x,t,\delta u^{(\mu)}) - a_\alpha^{(\mu)}(x,t,\delta u^{(\mu)})\} D^\alpha v\varphi\, dxdt + \\ + \int_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)}(x,t) D^\alpha v\varphi\, dxdt, \; v \in \mathbb{V}_p, \; \varphi \in C_0^1(\mathbb{R}). \tag{24}$$

Підставивши $\mu = \sigma$ в (24) і врахувавши періодичність a_α і f_α ($|\alpha| \in M$), доходимо висновку, що $u^{(\sigma)}$ – узагальнений розвязок (1),(2). В силу єдиності узагальненого розв'язку цієї задачі маємо, що $u^{(0)} = u^{(\sigma)}$ майже скрізь на Q, тобто функція u є періодичною за t з періодом σ. ■

Доведення теореми 3. Приймемо

$$a_\alpha^{(\mu)}[w](x,t) := \hat{a}_\alpha(x,t+\mu)|D^\alpha w(x,t)|^{p_\alpha(x)-2} D^\alpha w(x,t), \\ (x,t) \in Q \; (|\alpha| \in M).$$

Міркуючи так як при отриманні тотожності (24), приходимо до тотожності

$$\int_Q \Big\{ \sum_{|\alpha|\in M} a_\alpha^{(0)}[u^{(\mu)}]\, D^\alpha v\, \varphi - u^{(\mu)}\, v\, \varphi' \Big\}\, dxdt = \\ = \int_Q \sum_{|\alpha|\in M} \big\{ a_\alpha^{(0)}[u^{(\mu)}] - a_\alpha^{(\mu)}[u^{(\mu)}] \big\}\, D^\alpha v\, \varphi\, dxdt + \\ + \int_Q \sum_{|\alpha|\in M} f_\alpha^{(\mu)}\, D^\alpha v\, \varphi\, dxdt \tag{25}$$

для будь-яких $v \in \mathbb{V}_p, \; \varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$.

Нехай $\delta_* := \min\{1; K_a/2\}$ і $\sigma \in F_{\delta_*}$, де F_ε визначено у формулюванні теореми. Розглянемо тотожність (25) спочатку для $\mu = 0$, а потім для $\mu = \sigma$. Тоді, використовуючи лему 2 з $u_1 = u^{(0)}, \; u_2 = u^{(\sigma)}$, $a_\alpha(x,t,\xi) = \hat{a}_\alpha(x,t)|\xi_\alpha|^{p_\alpha(x)-2}\xi_\alpha \, (|\alpha| \in M), \; f_{\alpha,1} = f_\alpha^{(0)}$, $f_{\alpha,2} = a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(0)}] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(\sigma)}] + f_\alpha^{(\sigma)} \; (|\alpha| \in M)$, $t_0 = \tau \in \mathbb{R}$ – довільне, $R_0 = 1, \; R = l \in \mathbb{N} \; (l \geq 2)$, отримаємо

$$\max_{t\in[\tau-1,\tau]} \int_\Omega |u^{(\sigma)}(x,t) - u^{(0)}(x,t)|^2\, dx + \\ + \int_{\tau-1}^{\tau} \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u^{(\sigma)} - D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)} \Big)\, dxdt \leq \\ \leq C_4 \big\{ l^{-2/(p_0^+-2)} + \\ + \int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |a_\alpha^{(0)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma] + f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \big\}. \tag{26}$$

На підставі нерівності $(a+b)^\nu \leq 2^{\nu-1}(a^\nu + b^\nu)$, $a \geq 0, \; b \geq 0, \; \nu \geq 1$, маємо

$$\int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |a_\alpha^{(0)}[u^{(\sigma)}] - a_\alpha^{(\sigma)}[u^{(\sigma)}] + f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \leq \\ \leq \sum_{|\alpha|\in M} 2^{1/(p_\alpha^- -1)} \int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega \big(|f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)} + \\ + |a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(0)}[u^\sigma]|^{p'_\alpha(x)} \big)\, dxdt. \tag{27}$$

Здобуваємо

$$\int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega |a_\alpha^{(\sigma)}[u^\sigma] - a_\alpha^{(0)}[u^\sigma]|^{p'_\alpha(x)} dxdt = \\ = \int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega |\hat{a}_\alpha(x,t+\sigma) - \hat{a}_\alpha(x,t)|^{p'_\alpha(x)} |D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)} dxdt \leq \\ \leq \big(\sup_{t\in\mathbb{R}} ||\hat{a}_\alpha(\cdot,t+\sigma) - \hat{a}_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)} \big)^{(p_\alpha^+)'} \times \\ \times \int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega |D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)} dxdt. \tag{28}$$

На підставі леми 2 отримаємо

$$\sum_{|\alpha|\in M} \int_{\tau-l}^{\tau} \int_\Omega |D^\alpha u^{(\sigma)}|^{p_\alpha(x)} dxdt \leq C_4 \big\{ (2l)^{-2/(p_0^+-2)} + \\ + \int_{\tau-2l}^{\tau} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \big\}. \tag{29}$$

Тоді з (26), враховуючи (27), (28) і (29) здобуваємо

$$\int_\Omega |u^{(\sigma)}(x,\tau) - u^{(0)}(x,\tau)|^2\, dx + \\ + \int_{\tau-1}^{\tau} \int_\Omega \Big(\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u^{(\sigma)} - D^\alpha u^{(0)}|^{p_\alpha(x)} \Big)\, dxdt \leq \\ \leq C_7 \big\{ l^{-2/(p_0^+-2)} + \\ + \sum_{k=1}^{l} \int_{\tau-k}^{\tau-k+1} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} \big(|f_\alpha^{(\sigma)} - f_\alpha^{(0)}|^{p'_\alpha(x)}\, dxdt + \\ + \max_{|\alpha|\in M} \big(\sup_{t\in\mathbb{R}} ||a_\alpha^{(\sigma)}(\cdot,t) - a_\alpha(\cdot,t)||_{L_\infty(\Omega)} \big)^{(p_\alpha^+)'} \times \\ \times \big(l^{-2/(p_0^+-2)} + \sum_{k=1}^{2l} \int_{\tau-k}^{\tau-k+1} \int_\Omega \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \big) \big\}, \tag{30}$$

де C_7 – стала, яка від τ, σ і l не залежить.

Оскільки функції $f_\alpha\,(|\alpha| \in M)$ є майже періодичними за Степановим як елементи простору $L_{p_\alpha{}'(\cdot),loc}(\overline{Q})$, то правильна оцінка

$$\sup_{\tau\in\mathbb{R}} \int\limits_{\tau}^{\tau-1} \int\limits_{\Omega} \sum_{|\alpha|\in M} |f_\alpha^{(\sigma)}|^{p_\alpha{}'(x)}\, dxdt \le C_8, \qquad (31)$$

де $C_8 = const \ge 0$.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне як завгодно мале фіксоване число. Покажемо, що множина

$$U_\varepsilon := \Big\{\sigma \in \mathbb{R} \Big| \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{\Omega} |u(x,t+\sigma) - u(x,t)|^2\, dx \le \varepsilon,$$

$$\sup_{|\tau|\in\mathbb{R}} \int\limits_{\tau-1}^{\tau} \int\limits_{\Omega} \Big[\sum_{|\alpha|\in M} |D^\alpha u(x,t+\sigma) - $$

$$- D^\alpha u(x,t)|^{p_\alpha(x)}\Big]\, dxdt \le \varepsilon \Big\}$$

містить множину F_δ для деякого $\delta \in (0, \delta_*]$, тобто є відносно щільною. Справді, виберемо $l \in \mathbb{N}\,(l \ge 2)$ настільки великим, щоби виконувалася нерівність

$$C_7 l^{-2/(p_0^+ - 2)} \le \varepsilon/2, \qquad (32)$$

і зафіксуємо це значення l. Тепер візьмемо $\delta \in (0, \delta_*]$ таким, щоб виконувалась нерівність

$$C_7\big(l\cdot\delta + \max_{|\alpha|\in M} \delta^{(p_\alpha^+)'}\big(l^{-2/(p_0^+-2)} + 2lC_8\big)\big) \le \frac{\varepsilon}{2}. \quad (33)$$

Отже, якщо $\sigma \in F_\delta$, то права частина нерівності (30) на підставі (31), (32), (33) менша або дорівнює ε. Звідси випливає, що $F_\delta \subset U_\varepsilon$, що і треба було довести. ■

Література

[1] *Тихонов А. Н.* Теоремы единственности для уравнения теплопроводности / Тихонов А. Н. // Мат. сб. – 1935. – № 2. – С. 199–216.

[2] *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Лионс Ж.-Л. – М.: Мир, 1972. – 588 с.

[3] *Олейник О. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений / Олейник О. А., Иосифьян Г. А. // Успехи мат. наук. – **31**. – 1976. – № 6. – С. 142–166.

[4] *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциальных операторных уравнений / А. А. Панков. – К.: Наукова думка, 1985. – 184 с.

[5] *Бокало Н. М.* О задаче без начальных условий для некоторых классов нелинейных параболических уравнений / Н. М. Бокало // Труды семинара имени И. Г. Петровского. – 1989. – № 14. – С. 3–44.

[6] *Пукач П. Я.* О задаче без начальных условий для одной нелинейной вырождающейся параболической системы / П. Я. Пукач // Укр. мат. журн. – **46**. – 1994. – № 4. – С. 454–456.

[7] *Showalter R. E.* Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. – Mathematical surveys and monographs, 49. – Amer. Math. Soc., Providence, 1997.

[8] *Bokalo M.* Linear evolution first-order problems without initial conditions / Mykola Bokalo and Alfredo Lorenzi // Milan Journal of Mathematics. – 2009. – **77**. – P. 437–494.

[9] *Бокало М. М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації / М. М. Бокало, В. М. Сікорський // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 85–98.

[10] *Бокало М. М.* Коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зв змінними показниками нелінійності / Бокало М. М., Паучок І. Б. // Математичні студії. – **24**. – 206.– № 1. – С. 25–48.

[11] *Bokalo M.* Dynamical problems without initial conditions for elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains// Mykola Bokalo // Electronic Journal of Differential Equations. – **2010**. – 2010. – No. 178. – P. 1–24.

[12] *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,\,p(x)}$ /Kováčik O., Rákosníc J. // Czechoslovak Mathematical Journal. – **41**. – 1991. – P. 592–618.

[13] *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory / Růžička M.. – Lecture Notes in Mathematics, 1748. (Springer-Verlag, Berlin, 2000).

[14] *Fu Y.* Existence of solutions for nonlinear parabolic problem with $p(x)$-growth/ Fu Y., Pan N. // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – **362**. – 2010. – P. 313–326.

[15] *Alkhutov Y.* Parabolic equations with variable order of nonlinearity/ Alkhutov Y., Antontsev S., Zhikov V.// Collection of works of Institute of Mathematics NAS of Ukraine. – **6**. – 2009. – P. 23–50.

[16] *Mashiyev R. A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity/ Mashiyev R. A., Buhrii O. M.// Journal of Mathematical Analysis and Applications. – **377**. – 2011. – P. 450–463.

[17] *Бор Г.* Почти периодические функции / Бор Г. – М.: 1934.

[18] *Левитан Б. М.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 204 с.

[19] *Hu Z.* Boundeness and Stepanov's almost periodicity of solutions/ Hu Z.// Electronic Journal of Differential Equations Vol. – **2005**. – 2005. – No.35 – P. 1–7.

[20] *Maqbul Md.* Almost periodic solutions of neutral functional differential equations with Stepanov-almost periodic terms/ Maqbul Md. // Electronic Journal of Differential Equations. – **2011**. – 2011. – No. 72 – P. 1–9.

[21] *Bokalo M. M.* Unbounded, periodic and almost periodic solutions of anisotropic parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / Bokalo M. M. // Математичні студії. – **41**. – 2014. – № 1. – С. 81–91.

[22] *Bokalo M. M.* Almost periodic solutions of anisotropic elliptic-parabolic equations with variable exponents of nonlinearity / Mykola Bokalo // Electronic Journal of Differential Equations. – **2014**. – 2014. – № 178. – P. 1–13.

[23] *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity / F. Bernis // Arch. Rational Mech. Anal. – **106** – 1989. – № 3. – P. 217–241.

[24] *Бокало М. М.* Мішана задача для еліптичнопараболічних анізотропних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / М. М. Бокало // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2013. – Вип. 78. – С. 14–26.

О РЕШЕНИЯХ АНИЗОТРОПНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ НЕЛИНЕЙНОСТИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ПО ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ ОБЛАСТЯХ

Бокало Н. М., Притула Я. Г., Скира И. В.

Львовский национальный университет имени Ивана Франко
ул. Университетская 1, 79000, Львов, Украина

Доказана корректность задачи Фурье для анизотропных параболических уравнений высших порядков с переменными показателями нелинейности без ограничений на рост решений и исходных данных при стремлении временной переменной к $-\infty$. Получены оценки обобщенного решения этой задачи и условия существования периодических и почти периодических решений.

Ключевые слова: параболическое уравнение высшего порядка, анизотропное параболическое уравнение, переменные показатели нелинейности, задача Фурье, периодическое решение, почти периодическое решение.

2000 MSC: 35K10, 35K55, 35K92

УДК: 517.95

ON SOLUTIONS OF ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN TIME UNBOUNDED DOMAINS

Bokalo M. M., Prytula Y. G., Skira I. V.

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., 79000, Lviv, Ukraine

We prove the well-posedness of Fourier problem for anisotropic higher order parabolic equations with variable exponents of nonlinearity without any assumptions on the solution behavior and growth of the initial data as time variable tends to $-\infty$. We obtain estimates for generalized solutions of this problem as well as conditions for the existence of periodic and almost periodic solutions.

Key words: higher order parabolic equation, anisotropic parabolic equation, variable exponents of nonlinearity, Fourier problem, periodic solution, almost periodic solution.

2000 MSC: 35K10, 35K55, 35K92

UDK: 517.95