УДК 528.11

Ю. Ткаченко, М. Іващенко
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

НАДІЙНІСТЬ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРІВ І ОБГРУНТУВАННЯ ДОПУСКІВ

Пропонується нова система допусків, в основі якої є змішана модель випадкових і грубих похибок, яка дозволяє проектувати виміри з високою надійністю.

The new system of tolerances is suggested. It is based on the mixed probability model of the distribution accidental and gross errors. The system of tolerances mentioned above allows to design and to make measurements with the highest reliability.

Постановка проблеми. Проблема забезпечення надійності при виконанні геодезичних вимірювань, при створенні і опрацюванні геодезичних побудов є важливою складовою ланкою в геодезії. Про це свідчить зростаюча увага науковців і практиків до цієї проблеми. Кількість залишкових невиявлених грубих помилок, якими визначається якість геодезичних побудов, на думку багатьох дослідників, може досягати 10% і більше.

З іншого боку, сам термін "надійність вимірів" не отримав до цих пір чіткого математичного обгрунтування, що не дозволяє розглядати його, як додаткову кількісну характеристику якості вимірювань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останні роки затвердились поняття внутрішньої та зовнішньої надійності, де під внутрішньою надійністю розуміється деяка міра присутності грубих помилок у вимірювальному матеріалі, а під зовнішньою надійністю – можливий вплив невиявлених грубих помилок на результати урівнювання. В даній роботі конкретизується поняття внутрішньої надійності.

Формування цілей роботи. В даній роботі наведені теоретичні обгрунтування поняття надійності і критеріїв, за якими можна давати кількісну характеристику надійності. Запропоновані нові принципи формування допусків, які забезпечують високу ефективність контролю.

Виклад основного матеріалу. В роботі [1] запропонована концепція побудови основ теорії надійності геодезичних вимірів, що дає можливість ввести в процес вимірювань нову кількісну характеристику – надійність виміру.

Відомо, що результати вимірів мають елементи випадковості та невизначеності. Під надійністю вимірів розуміється степінь довіри до цих результатів. Очевидно, що оцінка надійності може змінюватися від одиниці (повна довіра) до нуля (повна недовіра). Проте така оцінка можлива тільки при наявності додаткової інформації щодо імовірності характеристик вимірів. Звичайно, роль такої інформації грає математичне очікування та дисперсія або їх оцінки. Наприклад, якщо оцінка якості виконується згідно правила "*k сігм*", рішення про надійність виміру приймається на його відхилення δ від $\overline{X}$:

$$\gamma = \begin{cases} 1, |\delta| < \delta_{доп} \\ 0, |\delta| \geq \delta_{доп} \end{cases}$$

де $\delta = X - \overline{X}$, $\delta_{доп} = \kappa\delta_x$

Якщо вимір пройшов контроль допуском, він рахується надійним, інакше приймається рішення про наявність грубої похибки. Така схема визначення надійності є типовою, однак завдяки своєму наближеному характеру не може рахуватися задовільною.

Розглянемо інший підхід до цієї проблеми. Позначимо ϖ величину грубої помилки. Тоді рішення про надійність виміру зводиться до задачі перевірки гіпотези H_0: $\varpi = 0$ проти альтернативи H_1: $\varpi \neq 0$. Нульовій гіпотезі H_0 відповідає імовірнісна модель випадкових похибок, гіпотезі H_1 – змішана модель випадкових та грубих похибок. В цьому випадку клас допустимих розподілів F спостерігаючої випадкової величини визначається значенням параметра $\varpi = (\varpi_1,...,\varpi_r)$. Тому гіпотези H_0, H_1 є параметричними. Якщо параметрична множина $\Omega_0(\Omega_1)$ складається з однієї точки, то гіпотеза H_0, (H_1) буде простою, інакше – складною.

Надійність виміру – це кількісна величина, яка характеризує степінь відповідальності цього виміру нульовій параметричній гіпотезі. В термінах теорії перевірки параметричних гіпотез надійність – це імовірність прийняття альтернативної гіпотези у випадку, коли вона вірна. Якщо позначити β – імовірність похибки другого роду, то надійність виміру, який задовільняє допуску, визначається формулою

$$\gamma = 1 - \beta = 1 - \int_{|X| < X_{доп}} f_2(x)dx \qquad (1)$$

Для показу надійності проведемо чисельний експеримент, моделюючий нев'язку трикутника, де в один з кутів внесена похибка величиною $\kappa\delta$, а випадкові похибки розподілені нормально з параметрами (О, δ^2). Результати моделювання для різних за величиною грубих похибок наведені в таблиці 1, де n – кількість випробувань, m – кількість випадків, коли нев'язка перевищила допустиму величину.

Таблиця 1

Результати моделювання для різних за величиною грубих похибок

K	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*n*
m/n	0,295	0,520	0,750	0,905	0,950	200
m/n	0,282	0,498	0,698	0,882	0,952	500
γ	0,282	0,500	0,718	0,876	0,958	

У відповідності до закону великих чисел відносна частота m/n довільної події збігається по імовірності при $n \to \infty$ до імовірності цієї події. Тому імовірність

$$P\ (x_{доп}, k) = lim\ (m/n)$$

є імовірність виявлення грубої похибки порядку k при заданій величині допуску $x_{доп}$. Якщо імовірність $P\ (x_{доп}, k)$ наближається до одиниці, то груба похибка визначається практично однозначно, а вимір, що задовільняє умову $|x| < x_{доп}$ можна рахувати повністю надійним.

Точні значення надійності γ в таблиці 1 знайдені за формулою (1).

Як це випливає з [1], надійність виміру є функцією допуску $x_{доп}$, який в свою чергу дорівнює критичному значенню статистики критерію. В зв'язку з цим виникає задача формування таких допусків, які дозволяють отримати максимальну надійність. Важливе місце при рішенні цієї проблеми займають деякі методи побудови оптимальних критеріїв перевірки статистичних гіпотез [1].

Спираючись на метод відношення правдоподібності, сформулюємо принципи побудови допусків, які дозволяють отримати виміри з найвищою надійністю.

Якщо в задачі перевірки параметричної гіпотези існує рівномірно найбільш потужній (РНП) критерій, то допуск, який задається цим критерієм, має оптимальні властивості. Це означає, що процедура відбраковки, яка влаштована за допомогою оптимального критерія, дозволяє відбирати виміри з найвищою надійністю у класі всіх критеріїв рівня α. Це положення є наслідком леми Неймана-Пірсона, яка дає загальні умови існування РНП критеріїв.

Якщо параметричні гіпотези є простими, то достатньою умовою існування РНП критерія є абсолютна неперервність розподілів F_0 та F_1, які відповідають імовірнісним моделям вимірів для гіпотез H_0, H_1.

Для складання гіпотез (до них відноситься випадок невідомої дисперсії) достатньою умовою існування РНП критеріїв є регулярність імовірнісних моделей вимірів.

З наведеного випливає, що для багатьох важливих для практики геодезичних вимірів випадків можна запропонувати систему допусків з найвищою надійністю контролю від грубих похибок.

Розглянемо випадок одного виміру x, що відповідає простій нульовій гіпотезі. Для встановлення допуску та визначення надійності необхідно, щоб параметри m_x, δ_x випадкової величини x були відомими. Величина математичного очікування m_x може бути відомою при наявності еталона або, якщо випадкова величина x є наслідком деякої математичної умови. Тоді задача встановлення допуску зводиться до перевірки простої гіпотези H_0: $\varpi = 0$. Альтернативною може бути одна з трьох гіпотез

$$1)\ \ H_1:\ \varpi = 0;\ \ 2)\ H_1^+ :\ \varpi > 0;\ \ 3)\ H_1^- :\ \varpi < 0.$$

Величина допуску визначається на основі критерія Неймана-Пірсона і має вигляд

$$\text{а) двохбічний критерій } (\varpi \neq 0)\ x_{доп}{}^{*} = \delta_x \Phi_0^{-1}(0{,}5 - \alpha/2) \qquad (2)$$

$$\text{б, в) однобічні критерії } (\varpi > 0,\ \varpi < 0)\ x_{доп} = \delta_x \Phi_0^{-1}(0{,}5 - \alpha) \qquad (3)$$

Виміри, які пройшли контроль цими допусками, мають відповідно надійності

$$\text{а) } \gamma = \int\limits_{|x| \geq x^*_{доп}} f_2^*(x,\omega)dx\,;$$

$$\text{б) } \gamma = \int\limits_{x \geq x_{доп}} f_2(x,\omega)dx\,; \quad \text{в) } \gamma = \int\limits_{x \leq -x_{доп}} f_2(x,-\omega)dx\,,$$

де щільність дорівнює $f_2(x;\ \varpi) = (2\pi\delta^2)^{-1/2} exp\left\{-(x-\omega)^2 / 2\delta^2 x\right\}$ і відповідає імовірностній моделі композиції випадкових та однобічної грубої похибки, а щільність $f_2^*(x;\ \varpi) = ½\, f_2(x;\ \varpi) + ½\, f_2(x;\ -\varpi)$ – це композиція випадкових та двобічної грубої похибки.

Допуски, визначені формулами (2, 3) використовують для контролю вимірів з відомими стандартами, що відповідає наступним випадкам: один вимір; подвійні виміри; проектування багаторазових вимірів.

Випадок, коли виміри мають невідомі стандарти відносяться до задачі перевірки складної гіпотези. Загальним методом перевірки складних гіпотез є метод відношення правдоподібності, який в певних умовах приводить до оптимального критерію, а відповідні допуски мають найвищу надійність контролю.

Розглянемо випадковий нормальний вектор $X = (X_1,\ldots, X_n)$ з невідомою дисперсією, де одна з випадкових величин X_1 вміщує грубу похибку. Перейдемо до випадкового вектора $\eta=(\eta_1,\ldots, \eta_{n-1})$, де $\eta_1 = X_1 - X_i$. Тепер задача встановлення допуску зводиться до перевірки складної гіпотези H_0: $\theta_1 = \theta_{10}$ при одній з альтернатив

$$а)\ H_1\!: \theta_1 \neq \theta_{10} \quad б)\ H_1^{+}\!: \theta_1 > \theta_{10} \quad в)\ H_1^{-}\!: \theta_1 < \theta_{10}$$

які також є складними.

Функція правдоподібності для даної моделі буде мати вигляд

$$L_{n-1}(\eta;\, \theta) = \prod_{i=1}^{n-1} f(\eta_i;\theta),$$

де $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ – вектор параметрів.

Розглянемо відношення правдоподібності

$$\lambda_{n-1} = \frac{L_{n-1}\left(\eta;\theta_{10},\hat{\hat{\theta}}_2\right)}{L_{n-1}\left(\eta;\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)}$$

Для моделі $\varpi(\theta_1, \theta_2^2)$ безумовні МП-оцінки дорівнюють

$$\hat{\theta}_1 = \overline{\eta};\hat{\theta}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta_1 - \overline{\eta}\right)^2 = S_\eta^2$$

Для гіпотези H_0 МП-оцінкою для θ_2^2 буде

$$\hat{\hat{\theta}}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left(\eta - \theta_{10}\right)^2 = S_0^2$$

Тому

$$\ln\lambda_{n-1} = (n-1)\ln\left\{1 + \frac{\left(\overline{\eta} - \theta_{10}\right)^2}{S_\eta^2}\right\} = (n-1)\ln\left(1+t^2\right), \qquad (4)$$

де $t = t(\eta) = \dfrac{\overline{\eta} - \theta_{10}}{S_\eta}$.

З (4) видно, що між значеннями λ_{n-1} та t^2 існує взаємооднозначна відповідність. Це дає змогу для визначення допуску скористатись розподілом статистики $t(\eta)$.

Розглянемо випадкову величину

$$t(\eta) = \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left(X_l - \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i\right)}{S_\eta}$$

і доведемо наступну пропозицію.

Нехай $X = (X_1,\ldots, X_n)$ – вибірка з $\varpi(\mu, \delta^2)$ і $\overline{X}^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$; $S_\eta^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - X^*\right)^2$ вибіркові середнє та дисперсія при наявності виміру X_l, перевіряючого на наявність грубої похибки, і нехай

$$t = \left\{\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right\}^{1/2} \frac{X_l - \overline{X}^*}{S_\eta}$$

Тоді для довільного $\delta^2>0$ розподіл

$$Z(t|H_0) = S(n-2) \tag{5}$$

є центральним розподілом Стьюдента з $(n\text{-}2)$ степенем свободи.

Мають місце наступні розподіли

$$Z\left(\frac{x_l - \mu}{\sigma}\right) = N(0{,}1),$$
$$Z\left(\frac{\overline{x}^* - \mu}{\sigma}\right) = N\left(0, \frac{1}{n-1}\right),$$
$$Z\left(\frac{n-1}{\delta^2} S_\eta^2\right) = \chi^2(n-2),$$

де $N(0, 1)$ – нормальний розподіл з параметрами $(0, 1)$, $\chi(n\text{-}2)$ – розподіл x_i^2 з $(n\text{-}2)$–степенями вільності.

В зв'язку з незалежністю X_l та $\overline{X}^*$ маємо

$$Z\left(\frac{X_l - \overline{X}^*}{\sigma}\right) = N\left(0{,}1 + \frac{1}{n-1}\right)$$

звідки

$$Z\left(\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \frac{X_l - \overline{X}^*}{\sigma}\right) = N(0{,}1)$$

Так само є незалежними випадкові величини $(X_l - X^*)$ та $(n\text{-}1)S_\eta^2$, звідки випливає співвідношення (5).

З наведеного випливає, що критерії, які еквівалентні критерію відношення правдоподібності, можна задати у вигляді

$$\text{а)}\ X_1^* = \left\{\eta : |t(\eta)| \ge \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} t_{1-\alpha/2,\, n-2}\right\}$$

$$\text{б)}\ X_1^* = \left\{\eta : |t(\eta)| \ge \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} t_{1-\alpha,\, n-2}\right\}$$

в) $X_1^* = \left\{ \eta : |t(\eta)| \le \left(\frac{n}{n-2} \right)^{1/2} t_{1-\alpha/2, n-2} \right\}$

Можна довести, що ці критерії є оптимальними. Тому відповідні їм допуски

а) $t^*_{доп} = \left(\frac{n}{n-2} \right)^{1/2} t_{1-\alpha/2, n-2}$, $\varpi = \pm k\,\delta$

б) $t^*_{доп} = \left(\frac{n}{n-2} \right)^{1/2} t_{1-\alpha, n-2}$, $\varpi > 0$

в) $t^*_{доп} = -\left(\frac{n}{n-2} \right)^{1/2} t_{1-\alpha, n-2}$, $\varpi < 0$

мають найвищу надійність контролю.

Для визначення надійності вимірів після контролю допусками знайдемо розподіл статистики $t(\eta)$ для гіпотези H_1. для цього розглянемо випадкову величину

$$t'(\eta) = \frac{\overline{\eta} + \omega}{S_\eta} \left(\frac{n}{n-2} \right)^{-1/2} = (n-2)^{1/2} \frac{\frac{\overline{\eta}}{\sigma}\left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2} + \frac{\omega}{\sigma}\left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2}}{\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S_\eta^2 \right)^{1/2}} = \frac{Z+\lambda}{U}(n-2)^{1/2}$$

де *z* розподілено нормально з параметрами *(0, 1)*, а *U* має центральний x_i-квадрат розподіл з *(n-2)*–степенями свободи. Таким чином, $t'(\eta)$ має нецентральний розподіл Стьюдента з *(n-2)*-степенями свободи та параметром не центральності

$$\lambda = \frac{\omega}{\sigma} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{1/2}$$

Тому і статистика $t(\eta)$ для гіпотези H_1 має аналогічний розподіл

$$Z(t(\eta)|H_1) = Z(t'(\eta)) = S_H((n-2), \lambda)$$

Тепер диференційну надійність можна знайти за формулами

$$\gamma_k = \int_{t_{доп}}^{\infty} f_S(t;\lambda)dt, \quad \varpi > 0$$

$$\gamma_к = \int_{-\infty}^{-t_{доп}} f_S(t;-\lambda)dt, \quad \omega < 0$$

$$\gamma_к = 2\int_{t^*_{доп}}^{\infty} f^*{}_S(t;\lambda)dt, \quad \omega = \pm k\,\sigma_x$$

де $f^*_S(t;\lambda) = \frac{1}{2} f_S(t;\lambda) + \frac{1}{2} f_S(t;-\lambda)$, а $f_S(t;\lambda)$ – щільність t'-розподілу. S_H – функція t'-розподілу.

Припустимо тепер, що випадковий нормальний вектор *X* має відомий стандарт. Перейдемо до статистики

$$V = (n-1)X_l - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^{n} X_i$$

Критерій для виявлення грубої помилки у виміру X_l в цьому випадку має вигляд

$$X_l^* = \left\{ \vartheta : \frac{|V|}{\sigma_V} \geq V_\alpha \right\}$$

а величинадопуску для статистики Z буде

$$V_{доп} = \sigma_x \left(n^2 - n\right)^{1/2} \varPhi_0^{-1}\left(0{,}5 - \alpha / 2\right).$$

Виміри X після проходження контролю цим допуском мають найвищу надійність, яка знаходиться за формулою

$$\gamma_к = 0{,}5 + \varPhi_0\left(K\sqrt{\frac{n-1}{n}} - \varPhi_0^{-1}\left(0{,}5 - \alpha / 2\right) \right)$$

Надійність, як ймовірність виявлення неякісних вимірів, є зручною характеристикою ефективності використання різних критеріїв відбраковки. Недаремно результати порівняння запропонованих критеріїв з деякими класичними критеріями:

1. Найбільше по абсолютній величині нормоване відхилення (критерій Н.В.Смірнова), рекомендований в стандартах по метрологій

$$D_1 = \max \frac{|x_i - \bar{x}|}{S}$$

2. Найбільше нормоване відхилення

$$D_2 = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{\sigma}$$

3. Найбільше нормоване відхилення

$$D_3 = \frac{x_{\max} - \mu}{\sigma}$$

де μ, σ – математичне очівання і стандарт; $\bar{x}$, S – їх оцінки.

При проведенні тестових випробувань формувалась реалізація нормального вектора $X=(X_1,\ldots,X_n)$ з параметрами $M_x = 0$, $\sigma_x = 1$, в одну екомпонент якого вносилась груба похибка величиною K. Для кожної реалізації випадкового вектора визначались: m_1 – кількість випадків, коли $D_1 \geq D_{1доп}$; m_2 – кількість випадків, коли $D_2 \geq D_{2доп}$; m_3 – кількість випадків, коли $D_3 \geq D_{3доп}$; m_4 – кількість випадків, коли $t(\eta) \geq t_{доп}$; m_5 – кількість випадків, коли $V \geq V_{доп}$. Результати тестування для n = 6, 10 наведені в таблиці 1, 2 (кількість реалізацій випадкового вектора – 200), де α - ймовірність помилки першого роду.

Таблиця 2

Результати тестування для n = 6

K	α = 0,10					α =0,05				
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
0	20	14	11	14	12	12	5	7	4	5
1	27	18	20	41	47	14	9	13	19	24
2	27	52	73	76	107	11	42	69	49	88
3	61	136	149	145	164	32	103	136	113	160
4	110	181	196	183	199	57	171	186	156	189
5	126	197	200	196	200	114	194	197	190	199
6	168	200	200	200	200	136	199	200	194	200

При цьому використані наступні величини допусків (табл.3).

Таблиця 3

Величини допусків

n	α	$D_{1доп}$	$D_{2доп}$	$D_{3доп}$	$t_{доп}$	$V_{доп}$
6	0,10	1,996	2,184	2,386	2,132	9,010
	0,05	2,066	2,460	2,635	2,776	10,735
10	0,10	2,294	2,441	2,568	1,860	15,606
	0,05	2,414	2,680	2,603	2,306	18,594

Як це видно з результатів тестування, запропоновані допуски в усіх випадках мають вищу ефективність ніж класичні критерії. Міру підвищення ефективності можна оцінити за допомогою показника

$$E = \frac{N - N_K}{N_K} 100\%$$

де N – кількість виявлених грубих похибок запропонованими критеріями; N_K – кількість виявлених грубих похибок класичними критеріями. В табл.4 наведені дані про міру підвищення ефективності відбраковки E для критеріїв, які можна порівнювати (при відомому стандарті σ – це статистики V і D_2; при невідомому σ – це статистики t(η) і D_1).

Таблиця 4

Дані про міру підвищення ефективності відбраковки

K	n=6				n=10			
	α = 0,10		α = 0,05		α = 0,10		α = 0,05	
	σ	$\sigma_н$	σ	$\sigma_н$	σ	$\sigma_н$	σ	$\sigma_н$
1	161	51	167	35	183	141	375	150
2	106	181	110	345	119	191	153	292
3	21	138	55	253	58	103	65	216
4	10	66	11	174	10	42	13	71
5	1	56	2,6	67	3	19	3	21
6	0	19	0,5	43	0,5	2,5	0,5	11

Висновки. 1. Запропоновані критерії надійності – диференційний та інтегральний – дають можливість кількісно характеризувати можливу "засміченість" вимірювального матеріалу грубими помилкими. 2. Сформульовані основні принципи створення системи допусків, які грунтуються на понятті надійності і які забезпечують найвищу надійність контролю.

1. Ткаченко Ю.Ф. Надійність геодезичних мереж: проблема і рішення//Вісник геодезії та картографії. – К., 1994.-№1.-с.39-42. 2. Леман Э. Проверка статистических гипотез. – М.: Наука.-1964.-с.152-226.