

Умови реалізації цифрових регуляторів на цифрових системах з обмеженою розрядністю

Мар'ян Сольський

Кафедра електроприводу та автоматизації промислових установок, Національний університет "Львівська політехніка", УКРАЇНА, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, E-mail: solskiy1990@mail.ru

Abstract – The problem of impact of finite-precision data on digital control systems synthesis and practical realization is described. Dependences between the accuracy of elementary first and second order dynamic links coefficients and minimal admissible sampling step were determined and analyzed.

Ключові слова – цифровий регулятор, обмежена розрядність, дискретна передатна функція, цифрові системи керування.

I. Вступ

Цифрові системи керування є найефективнішими з точки зору забезпечення високої точності, універсальності та можливості реалізації складних алгоритмів керування. Їх використання є найбільш перспективним з точки зору експлуатаційних, енергетичних, динамічних характеристик, що необхідні для функціонування певного технологічного комплексу. Синтез цифрових систем, як правило, базується на дискретизації неперервного прототипу (наприклад, методом Тастіна, відповідності нулів-полюсів тощо [1, 2]).

Потрібно відзначити, що однією з малодосліджених проблем у цифрових системах керування є вплив на їх поведінку обмеженої розрядності апаратної частини, яка має вплив на їх синтез і практичну реалізацію.

II. Аналіз останніх досліджень і публікацій

Ефект обмеженої розрядності апаратної частини враховується у розробці цифрових фільтрів (DSP), наприклад, [3, 4], але, як правило, лише на рівні обмеженої точності вхідних і вихідних даних і дискретного характеру розміщення нулів і полюсів дискретної передатної функції цифрової системи. У відомих роботах в області реалізації цифрових систем керування [1, 2, 5] ефект впливу обмеженої розрядності даних на поведінку системи аналізується лише з огляду двох факторів:

- вплив обмеженої розрядності на точність підтримання регульованих координат, яка, в основному, визначається розрядністю АЦП або цифрових давачів;
- розміщення нулів і полюсів дискретних передатних функцій лише в обмеженій кількості дискретних точок на комплексній площині.

Таким чином, у переважній більшості випадків аналіз стійкості цифрових систем керування проводиться класичними методами для лінійних систем – дослідження розміщення нулів/полюсів на комплекс-

ній площині, аналіз частотних характеристик тощо [5, 6]. У той же час, як буде показано далі, виявлено інші фактори, за яких цифрова система керування стає нестійкою за певного значення розрядності цифрового пристрою.

Потрібно відзначити, що проблема числової нестійкості у випадку обмеженої розрядності обчислень є відомою в прикладній математиці, наприклад, розглянута у роботах [7, 8]. Однак результати проведених авторами цих робіт досліджень, зокрема, впливу похибок коефіцієнтів поліномів на точність знаходження їхніх коренів, у теорії цифрових систем наразі не є поширеними.

III. Виклад основного матеріалу

Найпопулярнішими методами дискретизації під час синтезу цифрових систем керування є, як вже згадувалося раніше, підстановка Тастіна і метод відповідності нулів та полюсів. При цьому отримана дискретна передатна функція записується двома способами:

- як класична передатна функція, що задана відношенням поліномів чисельника і знаменника;
- у термінах нулів-полюсів.

Метою проведених досліджень було вивчення впливу обмеженої точності запису коефіцієнтів передатної функції (обмеженої розрядності) на поведінку цифрової системи, реалізованої переліченими вище методами, а також встановлення взаємного зв'язку між точністю коефіцієнтів дискретної передатної функції цифрової системи та мінімальним кроком дискретизації з умови забезпечення працездатності такої системи.

Об'єктом досліджень був вибраний доволі простий динамічний об'єкт з двома парами комплексно спряжених полюсів:

- 1) $p_{1,2} = 1 \pm j$;
- 2) $p_{3,4} = 3 \pm 3j$,

результуюча передатна функція якого має вигляд:

$$W(s) = \frac{1}{s^4 + 8s^3 + 32s^2 + 48s + 36}. \quad (1)$$

Відповідні дискретні передатні функції досліджуваних цифрових систем були синтезовані згаданими методами (наприклад, використанням засобів Control Systems Toolbox середовища MATLAB) і, відповідно, мають такий вигляд (коефіцієнти передатних функцій залежать від кроку та застосованого методу дискретизації):

1) отримана підстановкою Тастіна дискретна передатна функція як відношення поліномів чисельника і знаменника:

$$W(z) = \frac{b_4 z^4 + b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}; \quad (2)$$

2) отримана підстановкою Тастіна дискретна передатна функція, яка записана в термінах нулів і полюсів:

$$W(z) = \frac{k \cdot (z+1)^4}{(z^2 + p_1 z + q_1)(z^2 + p_2 z + q_2)}; \quad (3)$$

3) отримана методом відображення нулів/полюсів дискретна передатна функція як відношення поліномів чисельника і знаменника:

$$W(z) = \frac{b_3^* z^3 + b_2^* z^2 + b_1^* z + b_0^*}{z^4 + a_3^* z^3 + a_2^* z^2 + a_1^* z + a_0^*}; \quad (4)$$

4) отримана методом відображення нулів/полюсів дискретна передатна функція записана в термінах нулів і полюсів:

$$W(z) = \frac{k^* \cdot (z+1)^4}{(z^2 + p_1^* z + q_1^*)(z^2 + p_2^* z + q_2^*)}. \quad (5)$$

Аналіз поведінки отриманих цифрових систем досліджувався для кроків дискретизації $h = 1; 0.3; 0.1; 0.03; 0.01$ с. Інструментом для досліджень було середовище імітаційного моделювання Simulink математичного застосунок MATLAB.

Комп'ютерна модель досліджень у середовищі MATLAB показана на рис. 1. Потрібно відзначити, що коефіцієнти чисельника і знаменника дискретних передатних функцій і коефіцієнти у випадку їх задання нулями і полюсами записувалися з точністю до чотирьох десяткових цифр.

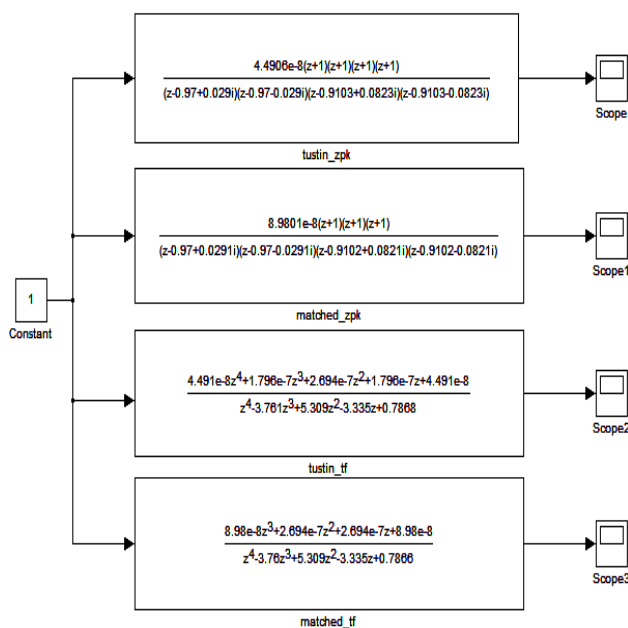


Рис. 1. Комп'ютерна модель системи

Загальноприйнятою є думка, що у випадку зменшення кроку дискретизації система теоретично мала б наближатися за своєю поведінкою до неперервного прототипу. Проте, наявність у системі обмеженої розрядності при заданні коефіцієнтів дискретної передатної функції призводить до інших, неочікуваних наслідків – зменшення періоду дискретизації викликає відхилення у поведінці отриманої цифрової системи порівняно з неперервним прототипом.

Перехідні характеристики цифрових систем отриманих за допомогою підстановки Тастина і методу відповідності нулів та полюсів (дискретні передатні функції яких записувалися в термінах нулів/полюсів) при кроці дискретизації $h = 0.3$ с показано на рис. 2.

Аналогічні перехідні характеристики цифрових систем отриманих за допомогою підстановки Тастина і методу відповідності нулів та полюсів, проте, дискретні передатні функції яких записувалися як класична передатна функція, що задана відношенням поліномів чисельника і знаменника при кроці дискретизації $h = 0.3$ с показано на рис. 3. Потрібно відзначити, що при кроці дискретизації $h = 0.3$ с усі цифрові системи, синтезовані згаданими вище методами та записані згаданими вище способами, залишаються стійкими та працездатними.

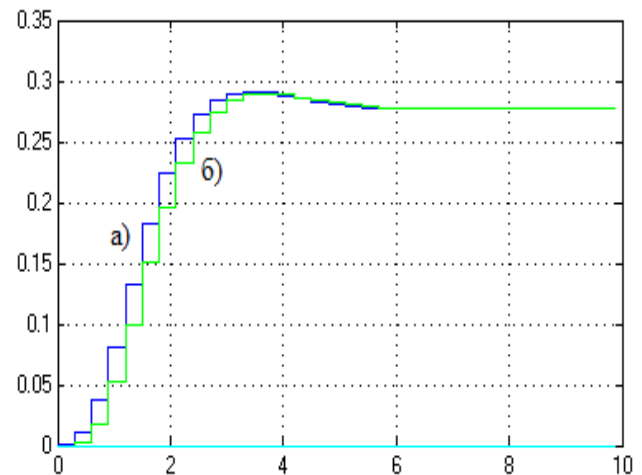


Рис. 2. Перехідні характеристики системи записаної в термінах нулів/полюсів при $h=0.3$ с:

- а) метод Тастина;
- б) метод відповідності нулів та полюсів

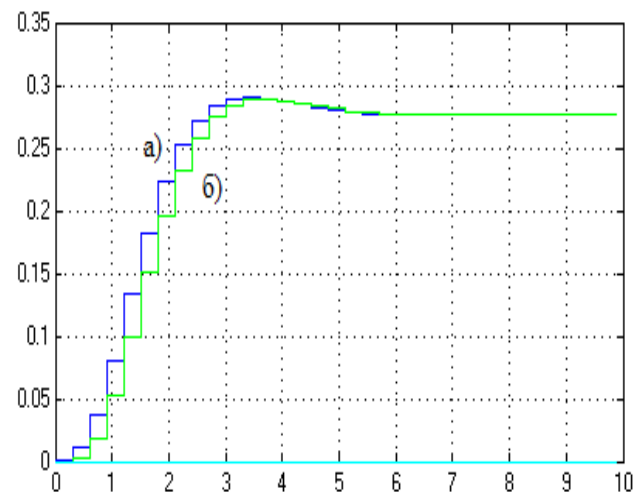


Рис. 3. Перехідні характеристики системи записаної у вигляді класичної передатної функції при $h=0.3$ с:

- а) метод Тастина;
- б) метод відповідності нулів та полюсів

Отримано, що при поданні дискретної передатної функції цифрової системи керування класичною передатною функцією вже при кроці дискретизації меншому за $0,03$ с система керування стає нестійкою (рис. 4). При цьому варто зауважити, що у випадку представлення дискретної передатної функції у

термінах нулів-полісів цифрова система залишається стійкою (рис. 5).

Пояснення цього явища можна отримати з робіт [7, 8], в яких показано, що поліноми з кратними чи близькими коренями є дуже чутливими до похибок у задаванні коефіцієнтів поліномів. Як наслідок, у цифрових системах зменшення кроку дискретизації призводить до переміщення всіх нулів і полюсів дискретної передатної функції до одиниці – тобто, всі корені поліномів чисельника і знаменника стають дуже близькими, внаслідок чого поліноми стають погано обумовленими і, як результат, чутливими до точності задавання коефіцієнтів.

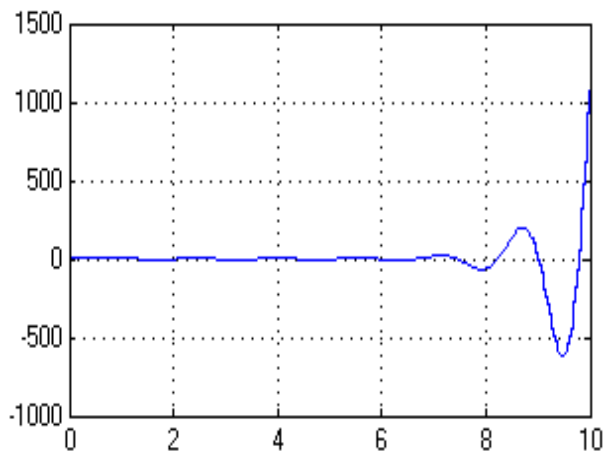


Рис. 4. Результат впливу обмеженої розрядності на поведінку цифрової системи при $h=0.03$ с

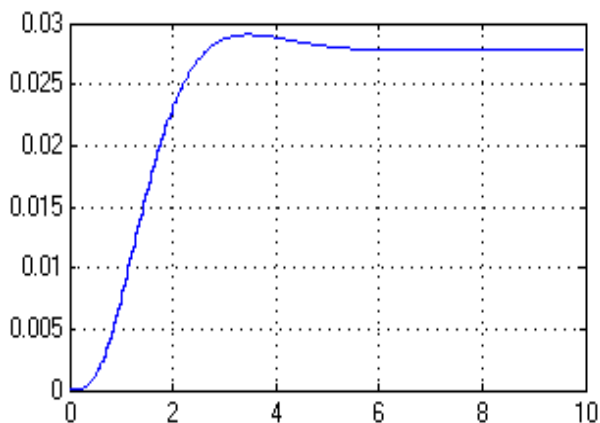


Рис. 5. Перехідна характеристика системи записаної в термінах нулів/полісів при $h=0.03$ с

Такий недолік, як показали дослідження, менш властивий у випадку запису передатної функції у формі нулів і полюсів.

Спрощенню задачі аналізу сприяє використання основної теореми алгебри (відомої також як теорема розкладення Хевісайда) – будь-яку правильну дробово-раціональну функцію (у нашому випадку – передатну функцію) можна розкласти на елементарні складові не вище другого порядку (відповідають нульовим і дійсним полюсам та парам комплексно-спряжених полюсів). Таким чином, подальші дослі-

дження будуть стосуватися елементарних ланок першого та другого порядку.

Оскільки погана обумовленість дискретної передатної функції впливає з переміщення всіх її нулів та полюсів до одиниці, необхідно здійснити аналіз граничної можливості забезпечення умови стійкості – нерівності $e^{-h/T} < 1$ виходячи з розрядності системи.

Для ланки першого порядку неперервний p та, відповідно, дискретний полюс P^* мають вигляд:

$$\frac{1}{Ts+1} \Rightarrow p = -\frac{1}{T}; P^* = e^{-\frac{h}{T}}. \quad (6)$$

Проведені дослідження показали, що у випадку одного дійсного полюса відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу, для прикладу в типовій 16-розрядній системі без знаку ($N = 16$, де N – двійкова розрядність системи) для граничних умов має наступний вигляд:

$$\frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{-\frac{h}{T}}, \text{ тобто } \frac{h}{T} \geq 1,526 \cdot 10^{-5}. \quad (7)$$

У випадку одного дійсного полюса відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу в N -розрядній системі без знаку, де N – двійкова або десяткова розрядність системи, наведені у Табл. 1.

ТАБЛИЦЯ 1

ВІДНОШЕННЯ НАЙМЕНШОГО ДОПУСТИМОГО КРОКУ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДО НАЙБІЛЬШОЇ СТАЛОЇ ЧАСУ СИСТЕМИ У ВИПАДКУ ОДНОГО ДІЙСНОГО ПОЛЮСА

Двійкова розрядність системи	Відношення h/T
8	$3,9 \cdot 10^{-3}$
12	$2,4 \cdot 10^{-4}$
16	$1,5 \cdot 10^{-5}$
Десяткова розрядність системи	Відношення h/T
2	10^{-2}
3	10^{-3}
4	10^{-4}

Для ланки другого порядку з передатною функцією $\frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$ неперервні та, відповідно, дискретні полюси (з верхнім індексом *) будуть такими:

$$P_{1,2} = \frac{-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{T}, P_{1,2}^* = e^{-\frac{\xi h}{T}} \cdot e^{\pm j\sqrt{1-\xi^2} \frac{h}{T}}. \quad (8)$$

Як видно з формул (8), дискретні полюси ланки другого порядку містять дві складові:

- 1) перша складова відповідає довжині вектора комплексного числа, тобто його модулю;
- 2) друга складова відповідає куту повороту вектора комплексного числа.

Проведений аналіз показав, що у випадку ланки другого порядку з парою комплексно спряжених полюсів відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу, для прикладу в 16-ти розрядній цифровій системі ($N = 16$, де N – двійкова розрядність системи) має аналогічний вигляд:

$$\frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{-\xi \frac{h}{T}}, \quad \frac{2^N - 1}{2^N} \geq e^{\pm j \sqrt{1-\xi^2} \frac{h}{T}}. \quad (9)$$

Потрібно відзначити, що у коливній ланці другого порядку з'являється додатковий параметр, а саме ξ – коефіцієнт вгамування, який у реальних системах змінюється в межах від 0,1 до 0,9 і вносить корективи у величину мінімально допустимого кроку дискретизації відповідно до умови стійкості дискретної системи $e^{-h/T} < 1$.

У випадку ланки другого порядку з парою комплексно спряжених полюсів відношення кроку дискретизації до найбільшої сталої часу в N-розрядній цифровій системі, де N – двійкова або десяткова розрядність системи, для складової, що відповідає довжині вектора комплексного числа наведені у Табл. 2. Потрібно відзначити, що коефіцієнту вгамування ξ при цьому задано значення $\xi = 0,7$.

ТАБЛИЦЯ 2

ВІДНОШЕННЯ НАЙМЕНШОГО ДОПУСТИМОГО КРОКУ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ ДО НАЙБІЛЬШОЇ СТАЛОЇ ЧАСУ СИСТЕМИ У ВИПАДКУ ПАРИ КОМПЛЕКСНО СПРЯЖЕНИХ ПОЛЮСІВ

Двійкова розрядність системи	Відношення h/T
8	$5,6 \cdot 10^{-3}$
12	$3,5 \cdot 10^{-4}$
16	$2,2 \cdot 10^{-5}$
Десяткова розрядність системи	Відношення h/T
2	$1,4 \cdot 10^{-2}$
3	$1,4 \cdot 10^{-3}$
4	$1,4 \cdot 10^{-4}$

Висновок

Обмежена розрядність даних у цифрових системах керування суттєво впливає на їх практичну реалізацію. Дана проблема пояснюється чутливістю коефіцієнтів дискретної передавальної функції, значень її

нулів та полюсів до малих похибок допущених при представленні даних в математиці.

Для зменшення впливу розрядності даних у цифрових системах необхідно використовувати представлення дискретної передавальної функції системи у формі нулів-полюсів.

У статті встановлено залежність між розрядністю апаратної частини цифрових систем та мінімально допустимим з умов реалізації кроком дискретизації. З використанням отриманих залежностей (7) і (9) показано, що у цифрових системах з обмеженою розрядністю існує мінімальний крок дискретизації, для якого виконується умова стійкості дискретної системи.

References

- [1] R. Isermann, Digital Control Systems, Vol.2. NY: Springer-Verlag, 1981, 566 p.
- [2] B. C. Kuo, Digital Control Systems. Oxford: Oxford University Press, 1992, 751 p.
- [3] G. Arslan, "Digital Signal Processing", signal.ece.utexas.edu. [Online]. Available: <http://signal.ece.utexas.edu/arslan/courses/dsp/index.html>. [Accessed: Feb. 21, 2007].
- [4] I. Selesnick, "Digital Signal Processing", eeweb.poly.edu. [Online]. Available: <http://eeweb.poly.edu/iselesni/EL713/zoom/quant.pdf>. [Accessed: Nov. 19, 2005].
- [5] K. M. Moudgalya, Digital Control. NJ: Wiley, 2007, 544 p.
- [6] R. S. H. Istepanian, J. F. Whidborne, Digital Controller Implementation and Fragility : A Modern Perspective. NY: Springer, 2001, 278 p.
- [7] G. E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. B. Moler Computer Methods for Mathematical Computations. NJ: Englewood Cliffs, 1977, 259 p.
- [8] C. Moler, "Numerical Computing with MATLAB", MathWorks Inc. [Online]. Available: <http://www.mathworks.com/moler/chapters.html>. [Accessed: Aug. 24, 2004].