Апроксимаційна форма замикального співвідношення

Андрій Музичак, Юрій Турковський

Кафедра електропостачання промислових підприємств, міст і сільського господарства, Національний університет "Львівська політехніка", УКРАЇНА, м. Львів, вул. С. Бандери, 12, E-mail: mAndriy@polynet.lviv.ua

Abstract – Modern analysis tool of modes engineering networks is the theory of hydraulic circuits. To determine the flux-distribution is applied formal methods, which are based on Kirchhoff's laws. Accepted hydraulics Darcy–Weisbach equation to determine the pressure loss (closing relation) is not applicable, since the definition of hydraulic friction coefficient used hundreds of dependencies. Therefore, the theory of hydraulic circuits use approximating dependencies.

The paper analyzes the various approximation dependencies. The best form of dependence was determined by the method of least squares. The accuracy of the approximation assessed relative performance: the coefficient of variation and the maximum relative error.

Shown that the quadratic form closing relation is acceptable in structural optimization problems, but its accuracy is not enough to improve problems modes.

Proved that the closing relation should be submitted in the form of a polynomial of the third degree. To continue, depending on the third quadrant in dependent introduced signum function.

Ключові слова – гідравлічне коло, замикальне співвідношення, критерій апроксимації, коефіцієнт варіації.

I. Вступ

Одним з сучасних інструментів аналізу інженерних мереж (тепло-, водо-, газопостачання тощо) є теорія гідравлічних кіл (ТГК) [1].

Рівняння стану мережі в матрично-векторній формі

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{x} = \vec{G}, \\ \mathbf{B}\vec{y} = 0, \\ \vec{y} = \rho g \vec{H} - \Delta\vec{p}_m, \end{cases} \tag{1}$$

де $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ – перша та друга матриці інциденцій; $\vec{x}$, $\vec{y}$ – вектори витрат середовища та перепадів тиску віток; $\vec{G}$ – вектор витрат середовища вузлів; $\vec{H}$, $\overrightarrow{\Delta p_m}$ – вектори діючих напорів та втрат тиску на тертя віток.

Лінійні рівняння системи (1) доповнює нелінійне замикальне співвідношення [2]

$$\Delta p_m(x) = s x^{\beta}, \tag{2}$$

де s – гідравлічний опір; $\beta \geq 1$ – показник степеня, зазвичай, приймають рівним 2 [1].

В гідравліці втрати тиску визначають за формулою Дарсі-Вейсбаха через швидкісний напір

$$\Delta p_m = \frac{x^2}{2\rho f_{вн}^2}\left(\lambda \frac{l}{d_{вн}} + \xi_м\right) \tag{3}$$

де ρ – густина середовища; $f_{вн}$ – площа перерізу трубопроводу, обчислена за внутрішнім діаметром; λ – безрозмірний коефіцієнт гідравлічного тертя; $d_{вн}$ – внутрішній діаметр труби; l – довжина трубопроводу; $\xi_м$ – коефіцієнт місцевого опору.

Коефіцієнт гідравлічного тертя λ є складною функцією витрат (швидкості протікання) середовища і залежить від режиму його протікання. Для визначення коефіцієнту λ запропоновано кілька сотень залежностей [3]. Таке розмаїття не дозволяє записати замикальне співвідношення в універсальній формі.

Необхідно визначити форму замикального співвідношення, що адекватно відтворюватиме напірно-витратні характеристики трубопроводів довільного матеріалу та придатну для використання в рамках ТГК.

II. Виклад основного матеріалу

Оцінимо можливість представлення втрат тиску (3) одночленною апроксимаційною залежністю (2) в задачах удосконалення режимів.

За методом найменших квадратів критерієм вибору компонентів $p_1, p_2, \ldots, p_n$. параметричного вектора $\vec{p}$ апроксимуючої функції є

$$R = \sum_{i=1}^{m}\left(f(x_i) - F\left(x_i, \vec{p}\right)\right)^2 \Rightarrow \min, \tag{4}$$

де $f(x_i)$ – дійсні значення функції в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $F\left(x_i, \vec{p}\right)$ – значення апроксимуючої функції у відповідних точках.

Точність апроксимації оцінюють за залишковою дисперсією, однак зручніше користуватися відносними характеристиками, такими як коефіцієнт варіації

$$k_v = \frac{\sqrt{D}}{\overline{X}} 100\% \tag{5}$$

та максимальна відносна похибка

$$\delta f_{макс} = \max \frac{f(x_i) - F\left(x_i, \vec{p}\right)}{f(x_i)} 100\%, \tag{6}$$

де $D = \sum_{i=1}^{m}\left(f(x_i) - F\left(x_i, \vec{p}\right)\right)^2 \big/ m$ – залишкова дисперсія; $\overline{X} = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \big/ m$ – середнє значення.

Результати розрахунку показують, що залежно від матеріалу та діаметру трубопроводів коефіцієнт варіації змінюється в межах 0,8-14%, а відносна максимальна похибка – в межах 17-45%.

Можна зробити висновок, що використання квадратичної залежності прийнятне в задачах структурної оптимізації, однак не забезпечує належної точності в задачах удосконалення режимів.

Одночленна залежність була прийнята на етапі раннього розвитку електронних обчислювальних машин, зараз обмежень з їх боку практично нема. Це дозволяє у розрахунках використовувати не лише одночленні, а й багаточленні залежності

$$\Delta p_m(x) = \gamma\left(s_1 x + s_2 x^2 + \ldots + s_n x^n\right), \tag{7}$$

де $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – коефіцієнти апроксимації; γ – питомий об'єм середовища.

У порівнянні з (2) в залежності (7) виокремлено γ, оскільки це параметр середовища а не трубопроводу.

Необхідно обґрунтувати оптимальний вигляд поліному (7) для апроксимації напірно-витратних характеристик трубопроводів довільного виконання.

Зауважимо, що значні відхилення відносної похибки спостерігаються в зоні малих швидкостей (рис. 1).

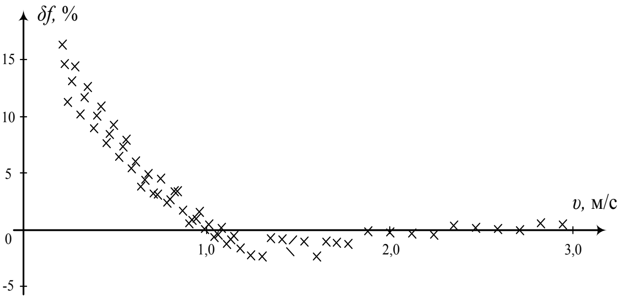

Рис. 1. Відносна похибка апроксимації напірно-витратної характкеристики стального трубопроводу

У таких випадках рекомендується приписати значенням функції різні вагові коефіцієнти та проводити апроксимацію залежності методом зважених найменших квадратів [4].

$$R = \sum_{i=1}^{m} w_i^2 \left(f(x_i) - F\left(x_i, \vec{p}\right) \right)^2 \Rightarrow \min \qquad (8)$$

де w_i – вагові коефіцієнти, що характеризують відносне значення кожного $f(x_i)$.

Вагові коефіцієнти необхідно приймати рівними оберненим значенням залишкової дисперсії. Однак ці дисперсії невідомі, тому вагові коефіцієнти часто обчислюють за значеннями функції [4].

Зауважимо, що поліномами вище п'ятого-шостого степеня рідко користуються, оскільки за великих степенів може виникнути «втрата значності». Тому обмежимось поліномами від другого до п'ятого степеня включно (функція 1 – функція 4). Також відобразимо квадратичну залежність – функція 0).

Аналіз показав, що похибка апроксимації практично не залежить від діаметру трубопроводу, тому можна перейти до усереднених значень. Результати розрахунку коефіцієнту варіації графічно наведено на рис. 2, а відносної максимальної похибки – на рис. 3.

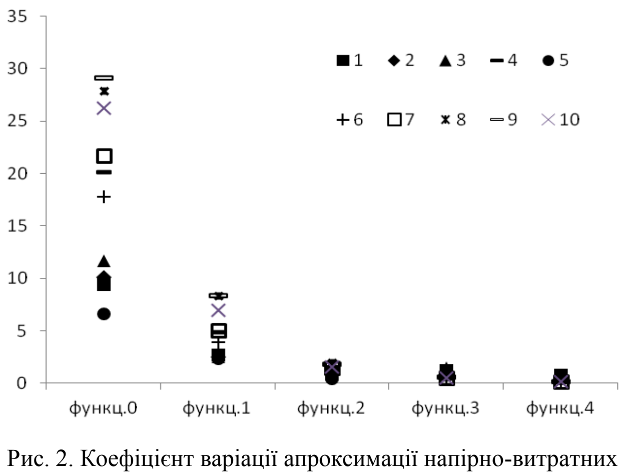

Рис. 2. Коефіцієнт варіації апроксимації напірно-витратних характеристик труб з різного матеріалу

На рисунках відображені такі труби: 1 – стальні водогазопровідні труби (ГОСТ 3262-75), 2 – стальні електрозварні (ГОСТ 10704-91), 3 – чавунні труби (ГОСТ 9583-75), 4 – залізобетонні віброгідропресовані труби (ГОСТ 12586.0-83), 5 – залізобетонні труби зі стальним осердям (ГОСТ 26819-86), 6 – стальні електрозварні труби з внутрішнім цементно-піщаним покриттям (ГОСТ 26819-86), 7 – чавунні труби з внутрішнім цементно-піщаним покриттям (ГОСТ 9583-75), 8 – пластмасові труби (МРТУ 6-05-917-67), 9 – поліетиленові труби (ГОСТ 18599-2001), 10 – склопластикові труби (ТУ 2296-002-9657-9200-2007).

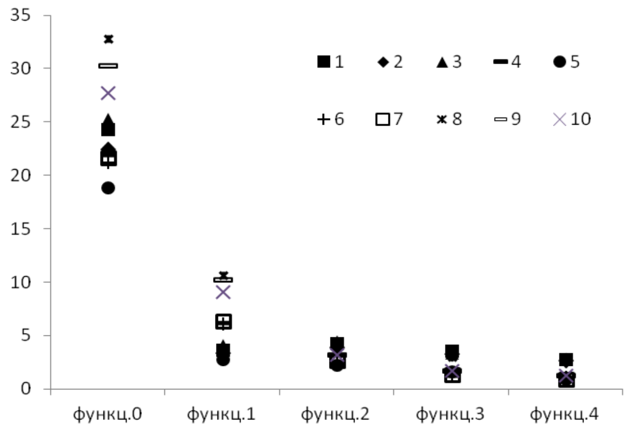

Рис. 3. Відносна максимальна похибка апроксимації напірно-витратних характеристик труб з різного матеріалу

З рис. 2 і рис. 3 можна зробити висновок про практичну рівноцінність поліномів третього, четвертого та п'ятого степенів. Поліном другого степеня не завжди забезпечує належну точність апроксимації, особливо для полімерних труб, які набувають усе більшого поширення.

Тому в задачах удосконалення режимів необхідно застосовувати кубічний поліном, тобто у рівнянні (7) обмежуватись третім членом (функція 2).

Напірно-витратна характеристика трубопроводу в третьому квадранті симетрична відносно характеристики в першому квадранті. Тому замикальне співвідношення необхідно записувати у формі

$$\Delta p_m(x) = \gamma\left(s_1 x + s_2 x^2 + s_3 x^3\right)\mathrm{sgn}(x) \qquad (9)$$

де sgn(x) – функція знаку, рівна 0 для x=0, 1 для x>0 та –1 для x<0.

Висновок

У роботі проаналізовано точність відтворення напірно-витратних характеристик трубопроводів різноманітними функціями. Показано, що необхідно застосовувати поліном третього степеня. Обґрунтовано форму замикального співвідношення.

References

[1] A.P. Merenkov, V.Ja. Hasilev Teorija gidravliches-kih cepej [The theory of hydraulic circuits]. Moscow: Nauka Publ., 1985.

[2] A. G. Evdokimov, Ed., Potokoraspredelenie v inzhenernyh setjah [Flow distribution in engineering networks]. Moscow: Strojizdat Publ., 1979.

[3] A.D. Al'tshul' Gidravlicheskie soprotivlenija [Hydraulic resistances]. Moscow: Nedra Publ., 1970.

[4] G.A.F. Seber. Linear regression analysis. New York: John Wiley and sons Publ., 1977.