

# Визначення напружено-деформованого стану пористої гумової плити в умовах нелінійного деформування

Сергій Гребенюк, Василь Юречко

Кафедра математичного аналізу,  
Запорізький національний університет,  
УКРАЇНА, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66,  
E-mail: iurichko@i.ua

*Abstract – There was created an approach for the numerical analysis of stress-strain state of the porous plate in non-linear strained conditions. Porous body stress tensor is based on the general Hooke's law and includes the dependence from the porous material elasticity, metric tensor components, approximation of the first, second and the third strain tensor invariants. For viscoelastic deformation modeling there're used integral relations based on Boltzmann-Volterra genetic theory. There was made a calculation of porous plate allowing the relaxation only of the porous rubber shift module in terms of viscoelastic deformation using the relaxation core. As a result, there were received the components of deformation stress state i.e. time distribution of normal stresses and motion dependence on both time and stress.*

Ключові слова – пориста гума, метод скінченних елементів, ядро релаксації, в'язкопружність.

## I. Вступ

Математичне моделювання об'єктів і процесів на сучасному етапі розвитку науки і техніки є дуже важливим. Особливу роль грає моделювання технічних конструкцій, які в процесі експлуатації зазнають механічного навантаження, у зв'язку з цим виникає необхідність дослідження напружено-деформованого стану (НДС). Зростаюча складність таких конструкцій передбачає вдосконалення математичних моделей, за для того, щоб враховувати різноманітні неоднорідності матеріалів, зокрема наявність пористості. Це зумовлено широким впровадженням пористих матеріалів (ПМ) у різні галузі науки і техніки. Одним зі стимулюючих факторів цього є те, що при створенні ПМ можливо впливати на властивості отриманого матеріалу варіюючи його пористість, розміри та форми пор. Серед технічних конструкцій виділяються амортизаційні еластомерні конструкції, які працюють в умовах в'язкопружного та геометрично нелінійного деформування, однією з яких є пориста гумова плита (ПГП). ПГП – це прилад, що служить для поглинання (амортизації) стискаючих зусиль.

Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою, тому велике значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінченних елементів (МСЕ).

В роботах [1-3] розроблено методи чисельного моделювання та аналізу НДС пористих середовищ і конструкцій з ПМ в умовах геометрично нелінійного та в'язкопружного деформування.

## II. Постановка задачі

Розв'язується статична задача пружності в тривимірній постановці для пористої гумової плити (рис. 1),  $a$  – довжина,  $b$  – ширина,  $h$  – товщина,  $Q$  – розподілене навантаження.

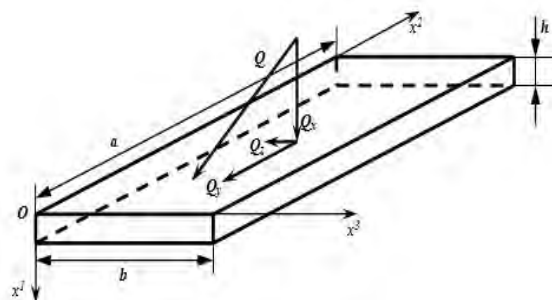


Рис. 1. Розрахункова схема пористої гумової плити

ПГП використовують для амортизації акумуляторної батареї тепловозів. На поверхні плити діє рівномірно розподілене поверхневе навантаження, які обумовлені вагою акумуляторної батареї та силами інерції, які викликані рухом тепловоза. Внаслідок чого, вектор навантаження  $Q$  необхідно представляти у вигляді трьох взаємно перпендикулярних векторів:  $Q_x$  – вектор нормального навантаження,  $Q_y$  і  $Q_z$  – вектори дотичного навантаження. Виходячи з умов експлуатації, пропорційні співвідношення між цими величинами можуть змінюватись. Нижня грань плити жорстко защемлена. Бічні грані плити вільні від навантаження і защемлень.

## III. Урахування пористості матеріалу

Для отримання пружних сталей ПГ використовувалися метод самоузгодження та варіаційний метод Хашина – Штрікмана, які виражають залежність модулю об'ємного стиску  $K$  та модулю зсуву  $G$  ПГ від пористості  $P$  [4]. У рамках методу самоузгодження для пор сферичної форми:

$$\frac{K}{K_0} = 1 - \frac{1-\rho}{1-\alpha_0\rho}; \quad \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{1-\rho}{1-\beta_0\rho}, \quad (1)$$

де  $\alpha_0 = \frac{1+\nu_0}{3(1-\nu_0)}$ ;  $\beta_0 = \frac{2}{15} \frac{4-5\nu_0}{1-\nu_0}$ ;  $\rho = 1-P$ ;  $K_0, G_0$  –

модулі об'ємного стиску та зсуву,  $\nu_0$  – коефіцієнт Пуассона матриці матеріалу.

Для випадкового просторового розподілення пор:

$$\frac{K}{K_0} = \left(1 + \frac{1-\rho}{\rho} p\right)^{-1};$$

$$\frac{G}{G_0} = \left(1 + \frac{1-\rho}{\rho} q\right)^{-1}, \quad (2)$$

де для пор голкоподібної форми:

$$p = \frac{5-4\nu_0}{3(1-2\nu_0)}; \quad q = \frac{8}{15}(5-3\nu_0), \quad (3)$$

а для пор дискової форми:

$$p = \frac{4}{3} \frac{1-\nu_0^2}{1-2\nu_0} \frac{1}{\pi l};$$

$$q = \frac{8}{15} \frac{(1-\nu_0)(5-\nu_0)}{2-\nu_0} \frac{1}{\pi l}, \quad (4)$$

де  $l = t/d$ ,  $t$  – товщина;  $d$  – діаметр пори.

Варіаційний метод Хашина-Штрікмана:

$$\frac{K}{K_0} = \rho \left( 1 + (1-\rho) \frac{3K_0}{4G_0} \right)^{-1};$$

$$\frac{G}{G_0} = \left( 1 + \frac{2}{3} (1-\rho) \left( \frac{10G_0}{9K_0 - G_0} \right) \right)^{-1}. \quad (5)$$

#### IV. Геометрично нелінійне та в'язкопружне деформування ПГП

Геометрична нелінійність та реологічні складові параметрів НДС ПГП моделюються введенням вектора додаткового навантаження, який будується розв'язанням традиційних рівнянь моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) на основі варіації повної потенційної енергії системи.

Геометрична нелінійність враховується послідовним розв'язанням ряду лінійних задач з перерахуванням на кожному кроці матриці жорсткості всієї конструкції. При цьому, матриця жорсткості включає початкові зусилля; навантаженням є східчаста функція  $Q_n$ , що змінюється на величину  $\Delta Q_n$  на кожному кроці навантаження таким чином, щоб задача залишалася лінійною; на кожному кроці за навантаженням розглядається нове положення вузлових точок деформованої конструкції. У цьому випадку тензор скінчених деформацій представляється, як сума лінійної та нелінійної частини [5]:

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} (C_j^{m'} u_{m',i} + C_i^{m'} u_{m',j}), \quad \varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2} u_{m',i} u_{m',j}. \quad (6)$$

Тут  $C_i^{m'}$  і  $C_j^{m'}$  – коефіцієнти матриці перетворення координат при переході від однієї системи координат до іншої,  $u_{m'}$  – компоненти вектора переміщення.

Тензор напружень для пористого тіла в геометрично нелінійній постановці визначається на основі узагальненого закону Гука [6]. Запишемо у вигляді суми лінійної і нелінійної складових:

$$\sigma^{ij} = \sigma_{(n)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij}, \quad (7)$$

де лінійна і нелінійна складова тензора напружень має вигляд:

$$\sigma_{(n)}^{ij} = 2G \left( g^{ki} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + K J_1^{(n)} g^{ij},$$

$$\sigma_{(h)}^{ij} = 2G \left( g^{ki} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(h)} - \frac{1}{3} J_1^{(h)} g^{ij} \right) +$$

$$K g^{ij} \left( J_1^{(h)} + 2J_2 + 4J_3 - \frac{1}{2} J_1^2 - 2J_2^2 - 8J_3^2 - 2J_1 J_2 - 4J_1 J_3 - 8J_2 J_3 \right). \quad (8)$$

У формулах (7):  $g^{ij}$  – компоненти метричного тензору,  $J_1, J_2, J_3$ , – узагальнені перший, другий і третій інваріанти тензора деформацій.

Варіація повної потенційної енергії системи [5]:

$$\delta \Pi = \delta W - \delta A. \quad (9)$$

Тут  $\delta A$  – варіація роботи розподілених об'ємних  $P^i$  і поверхневих  $F^i$  сил:

$$\delta A = \iiint_V P^i \delta u_i dv + \iint_S F^i \delta u_i ds,$$

$\delta W$  – варіація внутрішньої енергії пружної деформації:

$$\delta W = \iiint_V \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv.$$

Підставимо компоненти тензора напружень (7) в вираз (9):

$$\delta \Pi = \iiint_V (\sigma_{(n)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij}) \delta (\varepsilon_{ij}^{(n)} + \varepsilon_{ij}^{(h)}) dV - \delta A. \quad (10)$$

Аналізуючи вираз (10) виділимо лінійні і нелінійні складові варіації енергії пружної деформації. Лінійні складові є основою формування матриці жорсткості  $M$  скінченного елемента і мають наступний вигляд:

$$\iiint_V \sigma_{(n)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} dV = M^{ph} u_p \delta u_h. \quad (11)$$

Нелінійні складові виразу (10) запишуться у вигляді:

$$\iiint_V (\sigma_{(n)}^{ij} + \sigma_{(h)}^{ij}) \delta \varepsilon_{ij}^{(h)} dV +$$

$$+ \iiint_V \sigma_{(h)}^{ij} \delta \varepsilon_{ij}^{(n)} dV = N^{ph} u_p \delta u_h. \quad (12)$$

Припускаючи, що на тіло діє лише розподілене поверхневе навантаження, яке можна звести до зосереджених сил у кожному вузлі та використовуючи співвідношення (11) і (12), варіація потенційної енергії набуває вигляду:

$$(M^{ph} u_p + N^{ph} u_p - F^h) \delta u_h = 0. \quad (13)$$

В'язкопружні властивості ПГ описуються визначальними рівняннями спадкового типу, в яких зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій має залежність від часу. В'язкопружне деформування ПГБ моделюється за допомогою спадкової теорії Больцмана-Вольтерра:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = C_{(M)}^{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) -$$

$$- \int_0^t (C_{(M)}^{ijkl} - C_{(T)}^{ijkl}) e^{-(t-\tau)} \varepsilon_{kl}(\tau) d\tau,$$

де  $C_{(M)}^{ijkl}$  і  $C_{(T)}^{ijkl}$  – тензори миттєвих та тривалих модулів пружності ПГ відповідно.

Тензор напружень для в'язкопружного пористого тіла, у припущенні релаксації лише модуля зсуву  $G$ , визначається на основі узагальненого закону Гука наступним чином [7]:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t) = 2G_{(M)} \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1^{(n)}(t) \right) +$$

$$+ K g^{ij} J_1^{(n)}(t) - \int_0^t (G_{(M)} - G_{(T)}) e^{-(t-\tau)} \times$$

$$\times \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)}(\tau) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1^{(n)}(\tau) \right), \quad (14)$$

де  $G_{(M)}$  та  $G_{(T)}$  – миттєвий та тривалий модулі зсуву ПГ відповідно.

При розв'язанні задачі в'язкопружності МСЕ у виразі (14) переходимо до скінченно-різницевої форми та враховуючи, що переміщення  $u(t)$  і деформації  $\varepsilon(t)$  змінюються лінійно всередині кожного інтервалу часу, інтеграл у виразі (14) знаходиться аналітично [7].

Вважаючи, що лінійна складова тензора напружень дорівнює:

$$\sigma_{(n)}^{ij} = 2G_{(n)} \left( g^{ki} g^{lj} \varepsilon_{kl}^{(n)} - \frac{1}{3} J_1^{(n)} g^{ij} \right) + K J_1^{(n)} g^{ij},$$

в'язкопружна складова тензора напружень дорівнює:

$$\tilde{\sigma}_{(n)}^{ij}(t_n) = - \left( G_{(n)} - G_{(n)} \right) \sum_{m=0}^{n-1} \left( e^{J_{m+1} - t_m} - 1 \right) \times \\ \times \left( g^{ik} g^{jl} \varepsilon_{kl}^{(n)}(t_m) - \frac{1}{3} g^{ij} J_1^{(n)}(t_m) \right),$$

вираз (14) запишеться у вигляді суми лінійної і нелінійної складових:

$$\tilde{\sigma}^{ij}(t_n) = \sigma_{(n)}^{ij} + \tilde{\sigma}_{(n)}^{ij}(t_n). \quad (15)$$

Лінійна складова тензора напружень характеризує пружне деформування ПГ, тому у виразах (8) і (15) вони співпадають.

Будемо вважати, що в умовах в'язкопружного деформування ПГ нелінійна складова тензора скінченних деформацій у виразі (6) дорівнює нулю, тому вираз (6) набуде вигляду:  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_j^m u_{m,i} + C_i^m u_{m,j})$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (C_j^m u_{m,i} + C_i^m u_{m,j})$ . У цьому випадку вираз (10) запишеться:

$$\delta \tilde{\Pi} = \iiint_V (\sigma_{(n)}^{ij} + \tilde{\sigma}_{(n)}^{ij}(t_n)) \delta \varepsilon_{ij} dV - \delta A.$$

Нелінійні складові варіації енергії в'язкопружної деформації запишуться у вигляді:

$$\iiint_V \tilde{\sigma}_{(n)}^{ij}(t_n) \delta \varepsilon_{ij} dV = N^{ph}(t_n) u_p(t_n) \delta u_h. \quad (16)$$

Загальний вид основного рівняння варіації потенційної енергії в умовах геометрично нелінійного деформування ПГ та в умовах в'язкопружного деформування ПГ має однаковий вигляд (13).

Стандартний МСЕ у формі методу переміщень не дозволяє враховувати жорсткі зміщення скінченного елемента і іншу негативну властивість матриці жорсткості, пов'язану з появою фіктивних зсувних деформацій – «ефект хибного зсуву». Крім того, для еластомерних матеріалів, більшість з яких є слабкостискальними, традиційний МСЕ не дозволяє отримувати адекватні результати. Щоб усунути перераховані недоліки скористаємося МССЕ [8], яка полягає у введенні потрійної апроксимації: полів переміщень, компонентів деформацій та функції зміни об'єму. Виведення співвідношень матриці жорсткості для ПМ у повному обсязі представлено в роботі [8].

Оскільки варіація переміщень у виразі (13) не дорівнює нулю, то нулю має дорівнювати вираз в дужках, що представляє собою лінеаризовану систему розв'язуючих рівнянь МССЕ:

$$M \bar{u}^{(i)} = \bar{Q} - \bar{N}^{(i-1)}, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

де  $M = M^{ph}$ ,  $\bar{u}^{(i)} = u_p^{(i)}$  – вектор переміщень на  $i$ -тій ітерації,  $\bar{Q} = F^h$  – вектор розподілених поверхневих навантажень,  $\bar{N}^{(i-1)} = N^{ph} u_p^{(i-1)}$  – вектор додаткового навантаження, обумовлений або геометричною нелінійністю деформування ПГ, або реологічними властивостями ПГ.

Розв'язок системи (17) будується на основі модифікованого методу Ньютона – Канторовича для розв'язання геометрично нелінійної задачі та задачі в'язкопружності [5].

## V. Результати розрахунків

Даний підхід розрахунку ПГП в умовах геометрично нелінійного та в'язкопружного деформування реалізований в рамках програмного комплексу «МІРЕЛА+» [9].

Вихідні дані: марка гуми – 310,  $a=1,352$  м,  $b=0,63$  м,  $h=0,08$  м,  $G_{(M)}=1,40 \times 10^6$  Па,  $G_{(T)}=0,90 \times 10^6$  Па,  $\nu_0=0,49$ ,  $Q=16700$  Па,  $P=50\%$ , сітка дискретизації  $5 \times 12 \times 9$ .

Параметри НДС ПГП представлені на рисунках 2 – 5, у яких позначено: 1 – формула (1), 2 – формули (2)-(3), 3 – формули (2)-(4), 4 – формула (5).

Залежність переміщень  $u_i(t)$  від часу в умовах в'язкопружного деформування представлена на рис. 2.

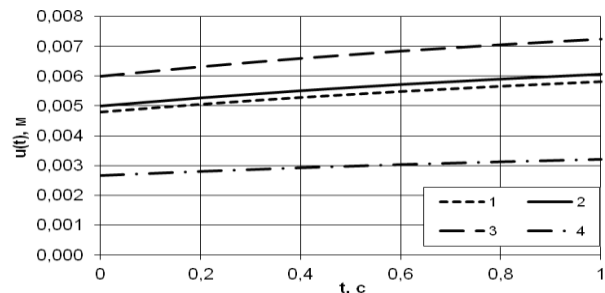


Рис. 2 Залежність переміщень від часу

Залежність переміщень  $u_i$  від пористості  $P$  в умовах геометрично нелінійного деформування представлена на рис. 3.

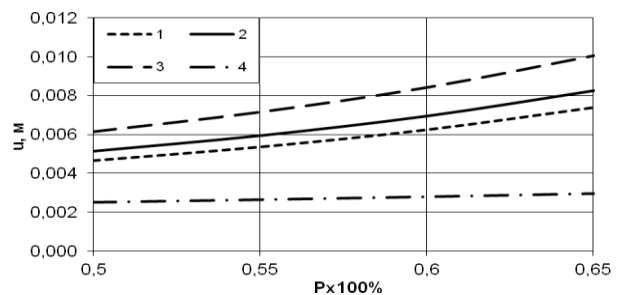


Рис. 3 Залежність переміщень від пористості в умовах геометрично нелінійного деформування

Залежність нормальних напружень  $\sigma^{II}(t)$  від часу в умовах в'язкопружного деформування представлена на рис. 4.

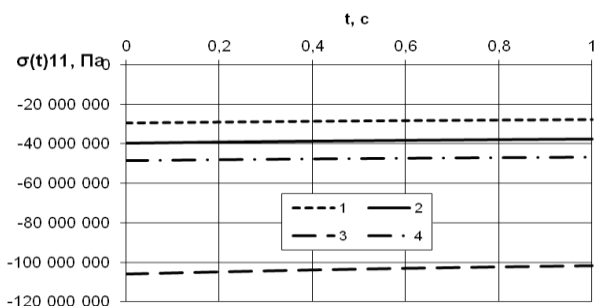


Рис. 4 Залежність нормальних напружень від часу

Розподілення нормальних напружень  $\sigma^{11}$  по товщині плити в умовах геометрично нелінійного деформування представлено на рис. 5.

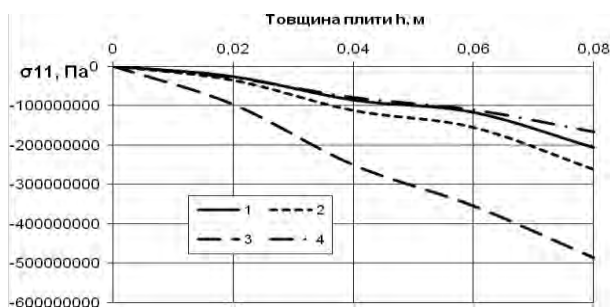


Рис. 5 Розподілення нормальних напружень по товщині плити в умовах геометрично нелінійного деформування

## ВИСНОВОК

Як можна помітити з отриманих результатів, урахування геометрично нелінійного та в'язкопружного деформування значно впливає на параметри напружено-деформованого стану, так переміщення зросли на 12-15% – в умовах геометрично нелінійного та на 13-17% в умовах в'язкопружного деформування. Нормальні напруження в умовах в'язкопружного деформування релаксаційні властивості проявляють слабо.

## References

[1] O. R. Dornjak, "Chislennoe reshenie kraevoj zadachi v'язkoprugogo deformirovanija ortotropnogo kapilljarno-poristogo materiala pri pressovanii" ["The numerical solution of the boundary value problem of the viscoelastic deformation of orthotropic capillary-porous material for extrusion"]. Vestnik VGU, Serija: Fizika, Matematika – Herald of the Voronezh State University, Series: Physics, Mathematics, no. 2, pp. 138-146, 2005.

[2] A. I. Golovanov and L. U. Sultanov, "Raschet bol'shih uprugoplasticheskih deformacij trehmernyh tel MKE" ["Calculation of elastic-plastic deformation of large three-dimensional bodies FEM"]. Matematicheskoe modelirovanie sistem i processov – Mathematical modeling of systems and processes, no 12, pp. 4-11, 2004.

[3] I. E. Shipovskij, "Chislennoe issledovanie naprjazhenno-deformirovanogo sostojanija massiva gornoj porody pri vzryvnom razrushenii" ["Numerical study of the stress-strain state of rock with explosive destruction"]. Dinamicheskie sistemy – Dynamical systems, no 16. – pp. 90-98, 2000.

[4] M. S. Koval'chenko, "Mehaniicheskie svojstva izotropnyh poristyh materialov" ["Mechanical properties of isotropic porous materials"]. Poroshkovaja metallurgija – Powder metallurgy, no 5/6. – pp. 105-127, 2002.

[5] V. V. Kirichevskij, Metod konechnyh jelementov v mehanike jelastomerov [The Finite Element Method in mechanics of elastomers]. Kiev : Naukova dumka Publ., 2002.

[6] S. M. Grebenjuk and V. Z. Jurjehko, "Viznachennja naprjazhenno-deformovanogo stanu konstrukcij iz poristih materialiv v umovah nelinejnogo deformuvannja" ["Determination of stress-strain state structures of porous materials in the nonlinear deformation"]. Problemi obchisljuval'noj mehaniki i micnosti konstrukcij – Problems computational mechanics and strength of structures, vol. 20, pp. 130-136, 2012.

[7] S. M. Grebenjuk and V. Z. Jurjehko, "Viznachennja naprjazhenno-deformovanogo stanu porozhnistogo cilindra iz poristogo materialu v umovah v'язkopruzhnogo deformuvannja" ["Determination of the stress-strain state of a hollow cylinder of porous material in viscoelastic deformation"]. Trudy ynstituta prykladnoj matematyky y mehaniky Nacyonal'noj akademyy nauk Ukrainy – Proceedings Institute for Applied Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, vol. 23, pp. 53-60, 2011.

[8] S. M. Grebenjuk and V. Z. Jurjehko, "Viznachennja naprjazhenno-deformovanogo stanu konstrukcij iz poristih materialiv" ["Determination of stress-strain state structures of porous materials"]. Problemi obchisljuval'noj mehaniki i micnosti konstrukcij – Problems computational mechanics and strength of structures, vol. 15, pp. 60-69, 2011.

[9] V. V. Kirichevskij, et al., Metod konechnyh jelementov v vychislitel'nom komplekse «MIRELA+» [The finite element method in calculable complex "MIRELA +"]. Kiev : Nauk. Dumka Publ., 2005.