

Визначення напружено-деформованого стану гумового буфера на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента

Сергій Гребенюк, Ганна Бова

Кафедра математичного аналізу,
Запорізький національний університет,
УКРАЇНА, м. Запоріжжя, вул. Жуковського 66,
E-mail: bova-anna@mail.ru

Abstract – This work is devoted to elaboration and numerical realization of method of research of the stress-strain state of the rubber buffer taking into account weak compressibility on the basis of the precise finite element moment scheme. To determine the stress-strain state of the rubber buffer in conditions of linear deformation the three-dimensional finite element method has been used. For increasing the accuracy of numerical results the precise finite element moment scheme has been applied. This scheme is a modification of moment scheme and envisages the receipt of expressions for deformations on the base of supplement of approximating initial polynomials of finite elements to a complete. The undertaken research shows that calculation of rubber constructions taking into account weakly compressibility of materials allows getting the adequate results using the cubic approximation of displacements.

Ключові слова – еластомери, слабка стисливість, моментна схема скінченного елемента, кубічна апроксимація.

I. Вступ

Успіхи в різних сферах сучасної техніки та науки багато в чому зобов'язані поширенню галузі застосування як традиційних матеріалів (металів, пластмас), так і нових матеріалів, серед яких можна виділити еластомери (гуми, поліуретани).

В реальних умовах експлуатації еластомерні конструкції (ЕК) зазнають механічного навантаження, у зв'язку з чим виникає необхідність дослідження напружено-деформованого стану (НДС).

Зростаюча складність таких конструкцій передбачає вдосконалення математичних моделей задля того, щоб враховувати такі специфічні властивості еластомерів як слабка стисливість та поєднання високої механічної міцності з високою еластичністю.

Завдяки цим властивостям вони широко застосовуються в авіабудуванні, будівництві, гірничій промисловості, сільськогосподарській техніці в якості компенсаторів збірки, буферів, амортизаторів складної геометричної форми, мембран, зносостійких покриттів, пружних прокладок, віброізоляторів.

Аналітичний розрахунок для більшості конструкцій є дуже складною, а інколи і неможливою процедурою, тому великого значення набуває використання чисельних методів, зокрема методу скінчених елементів (МСЕ).

Дослідженню поведінки еластомерних елементів конструкцій за допомогою експериментальних, аналітичних, емпіричних методів присвячені роботи [1, 2].

Розвиток і особливості використання МСЕ та його модифікації в механіці слабкостисливих еластомерів розглянуто в роботах [3, 4].

Аналіз існуючих методів дослідження НДС еластомерів показує, що на даний момент існує недостатня кількість надійних методів розрахунку ЕК з урахуванням слабкої стисливості. Серед найважливіших питань стосовно цієї проблеми можна виділити наступні: теоретичний характер більшості методів; розрахунок об'єктів простої геометричної форми; враховується гіпотеза про нестисливість еластомера; розрахунок, як правило, проводиться в двовимірній постановці.

Зроблені висновки підтверджують необхідність проведення дослідження в обраному напрямку для отримання розв'язання поставленої задачі.

II. Постановка задачі

Розв'язується статична задача пружності в тривимірній постановці для циліндричного гумового буфера (ГБ) з круглим отвором, в якому d – діаметр буфера, d_0 – діаметр отвору, L – висота буфера, t – висота виточки, h – відстань від нижньої основи буфера до виточки, Q – розподілене навантаження (рис. 1).

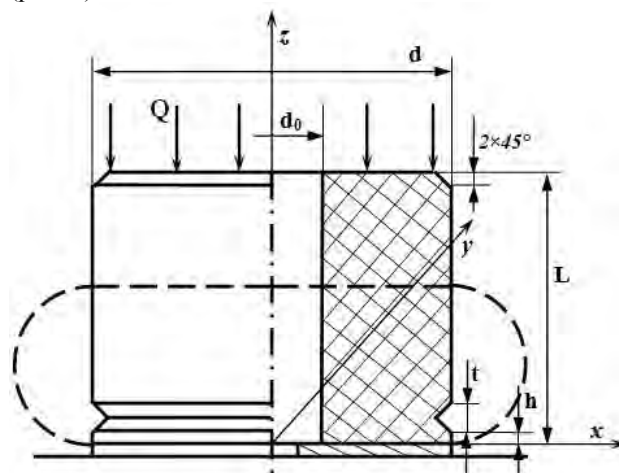


Рис. 1 Циліндричний гумовий буфер з круглим отвором

Такий ГБ використовують для амортизації кабіни ліфта, встановлюючи його в прямику ліфтової шахти (ідентифікаційний номер MOS09121152198-1, ліфтовий пристрій марки "SCHINDLER EUROLIFT"). ГБ знаходиться під осьовим навантаженням, знизу до нього привулканізована металева пластина, що спирається на абсолютно жорстку основу. Бічна грань вільна від навантажень та защемлень. Граничні умови задачі мають наступний вигляд:

$$\bar{u}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=h} = -Q,$$

де \bar{u} – вектор переміщень, σ_{zz} – нормальне напруження.

Розв'язок задачі будується на основі варіаційного принципу з використанням співвідношень Коші, як закон стану використовується закон Гука з лінійним тензором деформацій.

III. Підвищення точності розрахунків на основі методу скінченних елементів

На сьогодні МСЕ є найбільш розповсюдженим та ефективним методом розв'язання задач механіки та математичної фізики. Даний метод дозволяє отримувати розв'язки для найрізноманітніших процесів і найскладніших з геометричної точки зору областей.

Точність отримуваних розв'язків залежить від ряду факторів. Зокрема, наскільки точно апроксимується границя області скінченними елементами (СЕ) і наскільки точно задаються початкові і крайові умови на ній. Також суттєво впливає на точність вид апроксимуючої функції, наскільки якісно вона описує досліджуваний процес або явище.

Найбільш простим і широко застосовуваним способом підвищення точності є згущення сітки розбиття на скінченному елементі. Також велике значення має вигляд самого СЕ.

Ще одним способом отримання більш точних розв'язків є застосування напіваналітичного МСЕ, згідно якому в одному з напрямків поведінка функції, яку шукаємо, вважається відомою, що дозволяє задати його в аналітичному вигляді та не проводити дискретизацію на СЕ в цьому напрямку.

В роботі [5] розглянуто інший спосіб підвищення точності, а саме використання спеціальних базисних функцій Бернштейна. Також актуальним є застосування поліномів Ерміта, які були досліджені в роботі [6].

Існує клас ортогональних багаточленів, який можна розглядати як розклад деяких функцій в узагальнені ряди Фур'є. Цей клас містить в собі ряд поліномів, серед яких поліноми Якобі, Гегенбауера, Лежандра, Лаггера, Ерміта. Всі вони є одновимірними функціями та їх застосування в МСЕ для апроксимації полів змінних може мати істотні переваги, завдяки загальним властивостям, характерним ортогональним багаточленам [7].

Стандартний МСЕ у формі методу переміщень не дозволяє враховувати жорсткі зміщення СЕ та іншу негативну властивість матриці жорсткості (МЖ), пов'язану з появою фіктивних зсувних деформацій, – "ефект хибного зсуву". Крім того, для еластомерних матеріалів, більшість з яких є слабкостисливими, традиційний МСЕ не дозволяє отримувати адекватні результати. Одним зі шляхів вирішення зазначених труднощів є застосування моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [8], яка полягає у введенні потрійної апроксимації компонент вектору переміщень, компонент тензору деформацій та функції зміни об'єму.

Але безпосереднє застосування МССЕ для отримання МЖ на основі заданих інтерполяційних поліномів в ряді випадків призводить до відкидання значної кількості членів розкладу деформацій, особливо для СЕ з високим ступенем апроксимуючих поліномів.

Вирішити цю проблему можна за допомогою уточненої моментної схеми скінченного елемента (УМССЕ), яка по суті є модифікацією МССЕ [9]. Ця методика передбачає отримання виразів для деформацій на базі доповнення вихідних апро-

ксимуючих поліномів СЕ до повного кубічного поліному з подальшим виключенням "зайвих" коефіцієнтів при додаткових доданках.

Використання УМССЕ дозволяє зменшити кількість членів розкладу деформацій, що відкидаються, не порушуючи принципи МССЕ, забезпечуючи при цьому більш високу точність та ефективність процесу розв'язання широкого класу задач механіки деформованого твердого тіла.

IV. Побудова моделі напружено-деформованого стану еластомерів на основі уточненої моментної схеми скінченного елемента

Лінійна апроксимація переміщень має вигляд:

$$\bar{u}_i = \sum_{pqr} \omega_i^{(pqr)} \frac{x_1^p}{p!} \frac{x_1^q}{q!} \frac{x_1^r}{r!} = \omega^{000} + \omega_i^{100} x_1 + \omega_i^{010} x_2 + \omega_i^{001} x_3 + \omega_i^{110} x_1 x_2 + \omega_i^{101} x_1 x_3 + \omega_i^{011} x_2 x_3 + \omega_i^{111} x_1 x_2 x_3, \quad (1)$$

де \bar{u}_i – компоненти вектору переміщень за напрямом осі i базисної системи координат; $\omega_i^{(pqr)}$ – коефіцієнти розкладу переміщень; l, m, n – максимальні степені апроксимуючих поліномів відносно осей місцевої системи координат x_1, x_2, x_3 відповідно ($p = \overline{0, l}; q = \overline{0, m}; r = \overline{0, n}$).

Приведемо (1) до повного кубічного поліному, при цьому через $V_i^{(\dots)}$ позначимо додаткові коефіцієнти:

$$u_i = \bar{u}_i + \Delta u_i, \quad (2)$$

$$\Delta u_i = \frac{1}{2} \left(V_i^{200} x_1^2 + V_i^{020} x_2^2 + V_i^{002} x_3^2 + V_i^{210} x_1^2 x_2 + V_i^{201} x_1^2 x_3 + V_i^{120} x_1 x_2^2 + V_i^{102} x_1 x_3^2 + V_i^{021} x_2^2 x_3 + V_i^{012} x_2 x_3^2 \right) + \frac{1}{6} \left(V_i^{300} x_1^3 + V_i^{030} x_2^3 + V_i^{003} x_3^3 \right)$$

Для СЕ в формі прямокутного паралелепіпеду всі компоненти деформацій, отримані на основі (2), представляються у вигляді повних квадратичних поліномів:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = e_{ij}^{000} + e_{ij}^{100} x_1 + e_{ij}^{010} x_2 + e_{ij}^{001} x_3 + \frac{1}{2} e_{ij}^{200} x_1^2 + e_{ij}^{110} x_1 x_2 + \frac{1}{2} e_{ij}^{020} x_2^2 + e_{ij}^{101} x_1 x_3 + e_{ij}^{011} x_2 x_3 + \frac{1}{2} e_{ij}^{002} x_3^2,$$

де всі моменти деформацій \bar{e}_{ij} задовольняють умовам МССЕ.

Визначимо ті компоненти, які містять $V_i^{(\dots)}$:

$$\begin{aligned} e_{11}^{100} &= V_1^{200}, e_{11}^{110} = V_1^{210}, e_{11}^{101} = V_1^{201}, \\ e_{11}^{020} &= V_1^{120}, e_{11}^{002} = V_1^{102}, e_{11}^{200} = V_1^{300}, \\ e_{22}^{010} &= V_2^{020}, e_{22}^{200} = V_2^{210}, e_{22}^{110} = V_2^{120}, \\ e_{22}^{011} &= V_2^{021}, e_{22}^{002} = V_2^{012}, e_{22}^{020} = V_2^{030}, \\ e_{33}^{001} &= V_3^{002}, e_{33}^{200} = V_3^{201}, e_{33}^{101} = V_3^{102}, \\ e_{33}^{020} &= V_3^{021}, e_{33}^{011} = V_3^{012}, e_{33}^{002} = V_3^{003}, \end{aligned}$$

$$e_{12}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{110} + V_2^{200}), e_{12}^{010} = \frac{1}{2}(V_1^{020} + \omega_2^{110}),$$

$$e_{12}^{101} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_2^{201}), e_{12}^{011} = \frac{1}{2}(V_1^{021} + \omega_2^{111}),$$

$$e_{12}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + V_2^{102}), e_{12}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{210} + V_2^{300}),$$

$$e_{12}^{110} = \frac{1}{2}(V_1^{120} + V_2^{210}), e_{12}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{030} + V_2^{120}),$$

$$e_{13}^{100} = \frac{1}{2}(\omega_1^{101} + V_3^{200}), e_{13}^{001} = \frac{1}{2}(V_1^{002} + \omega_3^{101}),$$

$$e_{13}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_1^{111} + V_3^{210}), e_{13}^{011} = \frac{1}{2}(V_1^{012} + \omega_3^{111}),$$

$$e_{13}^{020} = \frac{1}{2}(V_1^{021} + V_3^{120}), e_{13}^{200} = \frac{1}{2}(V_1^{201} + V_3^{300}),$$

$$e_{13}^{101} = \frac{1}{2}(V_1^{102} + V_3^{201}), e_{13}^{002} = \frac{1}{2}(V_1^{003} + V_3^{102}),$$

$$e_{23}^{010} = \frac{1}{2}(\omega_2^{011} + V_3^{020}), e_{23}^{001} = \frac{1}{2}(V_2^{002} + \omega_3^{011}),$$

$$e_{23}^{110} = \frac{1}{2}(\omega_2^{111} + V_3^{120}), e_{23}^{101} = \frac{1}{2}(V_2^{102} + \omega_3^{111}),$$

$$e_{23}^{200} = \frac{1}{2}(V_2^{201} + V_3^{210}), e_{23}^{011} = \frac{1}{2}(V_2^{012} + V_3^{021}),$$

$$e_{23}^{020} = \frac{1}{2}(V_2^{021} + V_3^{030}), e_{23}^{002} = \frac{1}{2}(V_2^{003} + V_3^{012}).$$

Уточнення МССЕ зводиться до мінімізації тих коефіцієнтів розкладу деформацій, які згідно МССЕ повинні відкидатися. А саме, з моментів деформацій, які представлені через переміщення та мають «зайві» коефіцієнти, складається сума квадратів. Шляхом її мінімізації отримуємо систему рівнянь, розв'язавши яку, визначимо додаткові коефіцієнти:

$$V_1^{200} = V_1^{210} = V_1^{201} = V_1^{120} = V_1^{102} = 0;$$

$$V_1^{300} = V_2^{020} = V_2^{021} = V_2^{012} = V_2^{030} = 0;$$

$$V_3^{002} = V_3^{201} = V_3^{102} = V_3^{012} = V_2^{210} = 0;$$

$$V_1^{030} = V_2^{120} = V_3^{003} = V_3^{021} = V_2^{300} = 0;$$

$$V_3^{300} = V_1^{003} = V_3^{030} = V_2^{003} = 0; \quad (3)$$

$$V_1^{021} = V_3^{120} = -\omega_2^{111}/3; V_1^{020} = -\omega_2^{110},$$

$$V_1^{012} = V_2^{102} = -\omega_3^{111}/3; V_2^{200} = -\omega_1^{110},$$

$$V_2^{201} = V_3^{210} = -\omega_1^{111}/3; V_3^{020} = -\omega_2^{011},$$

$$V_3^{200} = -\omega_1^{101}; V_1^{002} = -\omega_3^{101}; V_2^{002} = -\omega_3^{011},$$

Таким чином, виходячи з формул (2) та (3), допоміжний закон розподілення переміщень тривимірного СЕ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_1^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \\ &- \frac{1}{2}(\omega_2^{110} x_2^2 + \omega_3^{101} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_2^{111} x_3 + \omega_3^{111} x_2 x_3^2); \\ u_2 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_2^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \\ &- \frac{1}{2}(\omega_1^{110} x_1^2 + \omega_3^{011} x_3^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_3 + \omega_3^{111} x_1 x_3^2); \\ u_3 &= \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{r=0}^1 \omega_3^{(pqr)} x_1^p x_2^q x_3^r - \\ &- \frac{1}{2}(\omega_1^{101} x_1^2 + \omega_2^{011} x_2^2) - \frac{1}{6}(\omega_1^{111} x_1^2 x_2 + \omega_2^{111} x_1 x_2^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Отже, УМССЕ надає можливість отримати клас СЕ з покращеними властивостями. Запропонований підхід залишається вірним і для більш високої міри поліноміальної апроксимації переміщень.

V. Результати розрахунків

Даний підхід розрахунку ГБ був реалізований в рамках програмного комплексу "МІРЕЛА+" [10].

Вихідні дані: $d=0,125$ м, $d_0=0,035$ м, $L=0,1$ м, $t=0,005$ м, $h=0,00375$ м, $Q=10000$ Н, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,4999$, сітка дискретизації $7 \times 10 \times 13$.

На рис. 2 представлено розподілення нормальних напружень σ^{11} в ГБ, марка гуми 51-1714.

Розподілення переміщень u_1 по верхній основі ГБ за товщиною буфера $b=(d-d_0)/2=0,045$ м для різних марок гуми представлено на рис. 3.

На рис. 4 представлено розподілення нормальних напружень по верхній основі за товщиною b ГБ.

Розподілення дотичних напружень по верхній основі за товщиною b ГБ представлено на рис. 5.

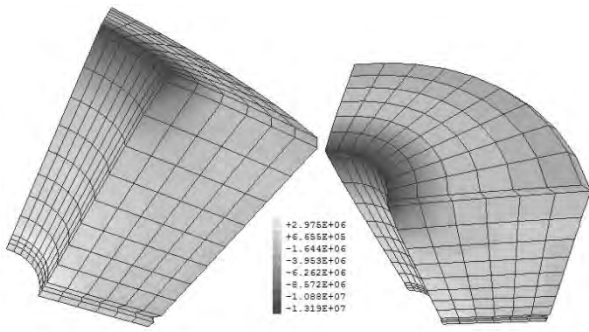


Рис. 2. Розподілення нормальних напружень σ_{11}

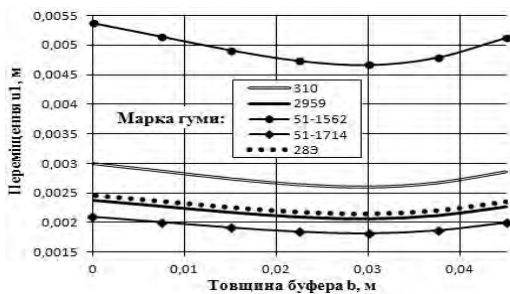


Рис. 3. Розподілення радіальних переміщень за товщиною буфера

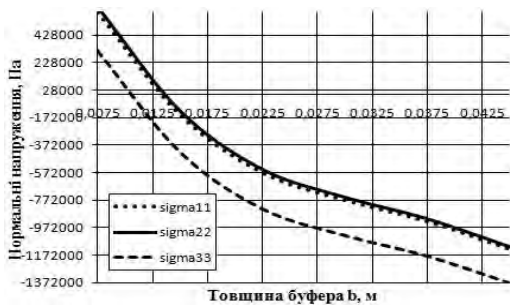


Рис. 4. Розподілення нормальних напружень за товщиною буфера

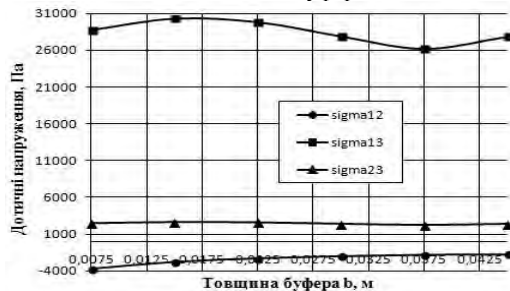


Рис. 4. Розподілення дотичних напружень за товщиною буфера

ВИСНОВОК

Використання запропонованої уточненої моментної схеми скінченного елемента дозволяє розв'язувати задачі лінійної теорії пружності для еластомерних конструкцій складної геометричної форми з урахуванням слабкої стисливості матеріалу.

References

- [1] V. I Dyrda, et al., Analiticheskie i chislennye metody rascheta rezinovyh izdelij [Analytical and numerical methods of calculation of rubber wares]. Dnepropetrovsk-Zaporozh'e : Zaporozhskij nacional'nyj universitet Publ., 2012.
- [2] V. I Dyrda and E. F. Chizhik, Rezinovye detali v mashinostroenii [Rubber details are in an engineer]. Dnipropetrovsk : Poligrafist Publ., 2000.
- [3] V. V Kirichevskij and A. S. Saharov., Nelinejnye zadachi termomehaniki konstrukcij iz slaboszhihmaemyh jelastomerov [Nonlinear problems of thermomechanics of constructions from weakly compressible elastomers]. Kiev : Budivel'nik Publ., 1992.
- [4] S. I. Dyimnikov, et al., Prikladnye metody rascheta izdelij iz vysokoelastichnyh materialov [Applied methods of calculation of wares from highly elastic materials]. Riga : Zinatne Publ., 1980.
- [5] A. E. Bogdanovich, "Trehmernyj variacionnyj analiz konstrukcij iz kompozitov, ispol'zujushhij approksimacii polinomami Bernshtejna" ["Three-dimensional variational analysis of composite structures using the approximation of Bernstein polynomials"], *Mehanika kompozitnyh materialov – Mechanics of Composite Materials*, vol. 37, no. 5/6, pp. 803-824, 2006.
- [6] M. V. Marchuk and M. M. Hom'jak, "Ermitovi splajni jak bazisni funkcii metodu skinchennyh elementiv dlja pobudovi tracktorij napruzhen" ["The splines of Hermite as the basis functions of finite element method for the construction of the stress trajectories"], *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polja – Mathematical methods and physical-mechanical fields*, vol. 52, no. 1, pp. 138-149, 2006.
- [7] Ju. I. Nemchinov, Raschet prostranstvennyh konstrukcij: (Metod konechnykh jelementov). [The calculation of spatial structures: (Finite Element Method)]. Kiev : Budivel'nik Publ., 1980.
- [8] V. V. Kirichevskij, Metod konechnykh jelementov v mehanike jelastomerov [The Finite Element Method in mechanics of elastomers]. Kiev : Naukova dumka Publ., 2002.
- [9] S. N. Grebenjuk and A. A. Bova, "Povyshenie tochnosti momentnoj shemy konechnogo jelementa dlja slaboszhihmaemyh materialov" ["Increasing the accuracy of the finite element moment scheme for weakly compressible materials"], *Sovremennye problemy i puti ih reshenija v nauke, transporte, proizvodstve i obrazovanii – Modern problems and their solutions in the science, transportation, manufacturing and education*, vol. 22, pp. 55-64, 2009.
- [10] V. V. Kirichevskij, et al., Metod konechnykh jelementov v vychislitel'nom komplekse «MIRELA+» [The finite element method in calculable complex "MIRELA +"]. Kiev : Nauk. Dumka Publ., 2005.