Уточнення рівнянь динаміки маятника Фурути

Юхим Роєнко, Роман Волянський, Олександр Садовой

Кафедра електротехніки та електромеханіки,
Дніпродзержинський державний технічний університет,
УКРАЇНА, м. Дніпродзержинськ, вул. Дніпробудівська, 2,
E-mail: efim.mail@gmail.com

Abstract –The Furuta pendulum provides a compact and impressive device for control demonstrations and draws the attention of the control community as a device for the development of nonlinear control laws. Despite the popularity of the device, there are very few papers which employ the correct dynamics. In this paper, potential and kinetic energy and then the full dynamics of the Furuta pendulum has been found using methods a Lagrangian formulation, and the form of friction corresponding to the real object has been derived.

Ключові слова – маятник Фурути, сухе тертя, в'язке тертя, потенційна енергія, кінетична енергія, математична модель, лагранжиан, рівняння Ейлера-Лагранжа.

I. Вступ

Одним із завдань сучасної теорії управління є підтримка вертикального положення антропоморфних технічних пристроїв. Вирішення цього завдання знаходять застосування у робототехніці, авіації, електротранспорті та космонавтиці. Однак, внаслідок особливостей конструкції цих пристроїв, створення їх математичної моделі ускладнено. Тому аналіз динамічних та статичних характеристик робототехнічних, авіаційних та інших пристроїв зручно здійснювати за допомогою їх прототипів.

Одним з таких прототипів є обертовий перевернутий маятник [1,2], який був вперше розроблений К. Фурутою. В основі математичного опису маятника лежить нелінійна взаємодія гравітаційних, коріолісових і доцентрових сил.

Незважаючи на велику увагу до маятника Фурути, авторам не відомі публікацій, які відображають результати дослідження динаміки маятника без урахування системи управління, що ускладнює аналіз причин, які визначають його рух. Більше того, при моделюванні замкнутих систем управління приймається ряд спрощень, що спотворюють сприйняття реального об'єкта.

Багато авторів [2], демонструючи лінійні і нелінійні закони управління маятником, розглядають тільки інерцію обертання у вертикальній осі, нехтуючи горизонтальною.

Автори робіт [3,4,5] для спрощення математичної моделі маятника Фурути вводять координатну площину, поєднану з площиною маятника і вважають, що моменти інерції ланок щодо вертикальної і горизонтальної осі рівні між собою. Автори публікацій [4,6] описують процес опору суглобів тільки в'язким тертям, нехтуючи в'язким.

Тому робота, яка присвячена уточненню динаміки маятника Фурути, є актуальною.

II. Постановка завдань дослідження

Метою даної роботи є складання опису динаміки механічної частини маятника Фурути в тривимірній системі координат з урахуванням сухого і в'язкого тертя.

III. Матеріали дослідження

Маятник Фурути, зовнішній вигляд якого наведено на Рис. 1, складається з двох шарнірно пов'язаних між собою частин: руки, що обертається у горизонтальній площині і важіля, який обертається у вертикальній площині.

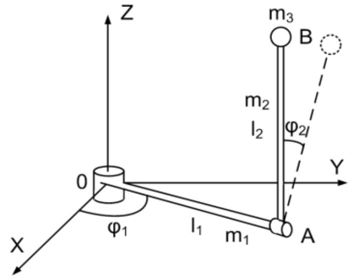

Рис. 1. Параметри маятника Фурути

На Рис. 1 прийняті наступні позначення: φ_1, φ_2 - кути повороту в горизонтальній і вертикальній площинах відповідно, l_1, l_2 - довжини елементів маятника, m_1, m_2 - їх маси.

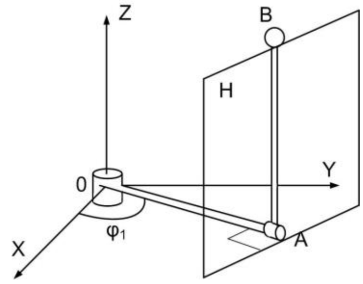

Рис. 2. Маятник Фурути

Руху кожного елементу механічної системи відповідає певне значення кінетичної енергії. Так, кінетична енергія плеча ОА, що обертається в горизонтальній площині, буде:

$$T_1 = \frac{1}{2}\frac{m_1 l_1^2}{3}\dot{\varphi}_1^2, \tag{1}$$

Рух важіля АВ відбувається в площині Н, для якої плече ОА є нормаллю (Рис. 2). Враховуючи, що площина Н обертається навколо осі z зі швидкістю $\dot{\varphi}_1$, сумарне переміщення, а, отже, і кінетична енергія важіля, визначається його рухом в площині Н і рухом самої площини:

$$T_2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 l_1^2}{3}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\varphi}_2^2. \tag{2}$$

Рух вантажу відбувається аналогічно руху важіля, причому одночасно змінюються всі три його координати. Лінійні координати миттєвого положення точки B (Рис. 1.) пов'язані з її кутовими координатами наступними співвідношеннями:

$$\begin{cases} x_B = l_1\cos\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\sin\varphi_1; \\ y_B = l_1\sin\varphi_1 - l_2\sin\varphi_2\cos\varphi_1; \\ z_B = l_2 - l_2\cos\varphi_2. \end{cases} \quad (3)$$

Диференціювання виразів (3) дозволяє визначити компоненти вектора швидкості точки B:

$$\begin{cases} \dot{x}_B = -\dot{\varphi}_1 l_1\sin\varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2\cos\varphi_2\sin\varphi_1 - \\ -\dot{\varphi}_1 l_2\sin\varphi_2\cos\varphi_1; \\ \dot{y}_B = \dot{\varphi}_1 l_1\cos\varphi_1 + \dot{\varphi}_2 l_2\cos\varphi_2\cos\varphi_1 - \\ -\dot{\varphi}_1 l_2\sin\varphi_2\sin\varphi_1; \\ \dot{z}_B = \dot{\varphi}_2 l_2\sin\varphi_2. \end{cases} \quad (4)$$

Отже кінетична енергія вантажу на вершині важіля приме вигляд:

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_1^2\sin^2\varphi_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 m_3 l_1 l_2 \times \\ &\times\sin^2\varphi_1\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_3 l_2^2\cos^2\varphi_2 \times \\ &\times\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_2^2\sin^2\varphi_2\cos^2\varphi_1 + \\ &+\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_1^2\cos^2\varphi_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 l_2 m_3 l_1 \times \\ &\times\cos^2\varphi_1\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_3 l_2^2\cos^2\varphi_2 \times \\ &\times\cos^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_2^2\sin^2\varphi_2\sin^2\varphi_1 + \\ &+\frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_3 l_2^2\sin^2\varphi_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Сумарна кінетична енергія важіля Фурути визначається сумою кінетичних енергій кожної ланки системи:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{6}\dot{\varphi}_1^2 m_1 l_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_2 l_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\varphi}_2^2 m_2 l_2^2 + \\ &+\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_1^2\sin^2\varphi_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 m_3 l_1 l_2\sin^2\varphi_1 \times \\ &\times\cos\varphi_2 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_3 l_2^2\cos^2\varphi_2\sin^2\varphi_1 + \\ &+\frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_2^2\sin^2\varphi_2\cos^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_1^2 \times \\ &\times\cos^2\varphi_1 + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 m_3 l_1 l_2\cos^2\varphi_1\cos\varphi_2 + \\ &+\frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_3 l_2^2\cos^2\varphi_2\cos^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_1^2 m_3 l_2^2 \times \\ &\times\sin^2\varphi_2\sin^2\varphi_1 + \frac{1}{2}\dot{\varphi}_2^2 m_3 l_2^2\sin^2\varphi_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Потенційна енергія маятника Фурути визначається положенням його елементів у полі сили тяжіння.

Плече OA рухається в горизонтальній площині на умовно-нульовій висоті, тому його потенційна енергія дорівнює нулю:

$$P_1 = 0. \quad (7)$$

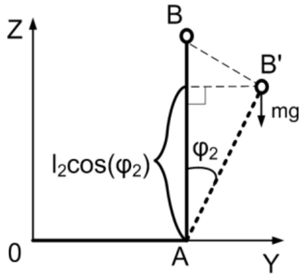

Рис. 3. Потенційна енергія

Для важіля і вантажу на його вершині потенційна енергія може бути представлена у вигляді:

$$P_2 = \frac{1}{2}m_2 g l_2\sin\varphi_2; \quad (8)$$

$$P_3 = m_3 g l_2\sin\varphi_2, \quad (9)$$

де g – сила вільного падіння.

Загальна потенційна енергія маятника Фурути визначається сумою потенційних енергій кожної ланки:

$$P = \frac{1}{2}m_2 g l_2\sin\varphi_2 + m_3 g l_2\sin\varphi_2. \quad (10)$$

Ланки маятника Фурути з'єднуються між собою підшипниками, в яких виникають сили сухого і в'язкого тертя. У відомій статті [6] ці сили описуються розривною нелінійністю

$$M_T = \alpha\, sign(\dot{\varphi}), \quad (11)$$

яка зводиться до функції згладжування

$$M_T(\dot{\varphi}) = K_f\left(1 - \frac{2}{e^{2k\dot{\varphi}} + 1}\right) + C_0\dot{\varphi}, \quad (12)$$

що зображена на Рис. 4.

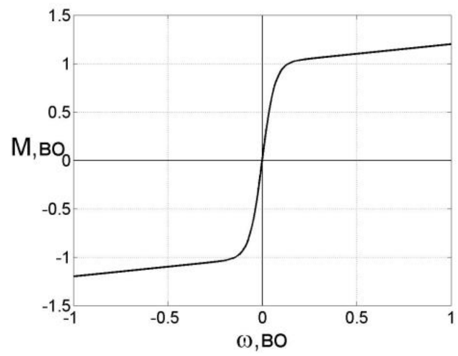

Рис. 4. Функція згладжування

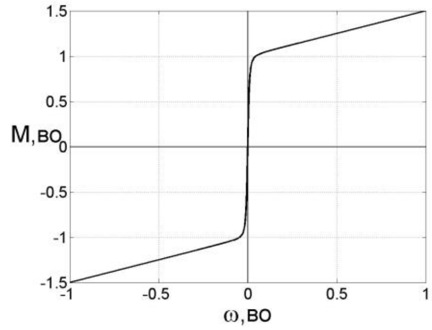

Рис. 5. Сили тертя в суглобі маятника

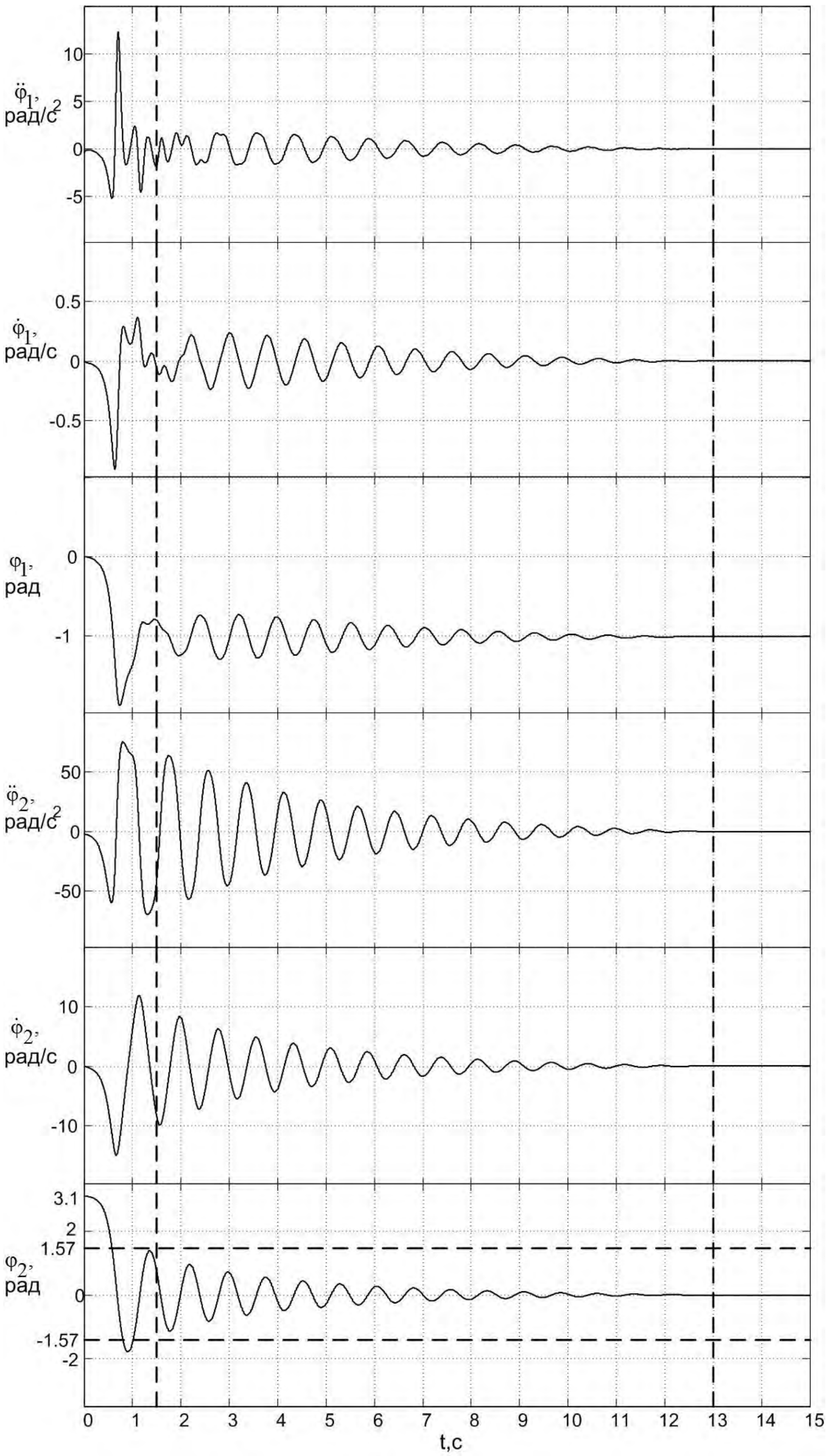

Рис. 6. Перехідні процеси маятника Фурути

Такий підхід не враховує силу сухого тертя і тому є некоректним.

Сили тертя в реальній механічній передачі можна апроксимувати наступною залежністю [7]:

$$M_T(\dot{\varphi}) = \frac{R*\dot{\varphi}}{\left(\left(R*\dot{\varphi}\alpha^{-1}\right)^2+1\right)^{0.5}} + C_0\dot{\varphi}, \qquad (13)$$

де R^* – тангенс кута нахилу апроксимуючої прямої; $\dot{\varphi}$ – кутова швидкість руки і важіля відповідно; α – ваговий коефіцієнт. Реалізація залежності (13) зображена на Рис. 5.Рівняння динаміки маятника Фурути отримаємо на підставі рівнянь Ейлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = M_{ДВ} - M_T; \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -M_T; \end{cases} \qquad (14)$$

Підстановка повної кінетичної (6) і потенційної (10) енергії та моменту тертя (13) у рівняння Ейлера-Лагранжа (14), дозволяє отримати наступні вирази:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1\left(\frac{1}{3}m_1l_1^2 + m_2l_1^2 + m_3l_1^2 + m_3l_2^2 \times \right. \\ \left. \times\sin^2\varphi_2\right) + m_3l_1l_2\left(\dot{\varphi}_2^2\sin\varphi_2 + \right. \\ \left. +\ddot{\varphi}_2\cos\varphi_2\right) + \dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2m_3l_2^2\sin 2\varphi_2 + \\ +M_T = M_{ДВ}; \\ \ddot{\varphi}_2\left(\frac{1}{3}m_2l_2^2 + m_3l_2^2\right) + \ddot{\varphi}_1m_3l_1l_2 \times \\ \times\cos\varphi_2 - \frac{1}{2}l_2g\sin\varphi_2\left(m_2+2m_3\right) - \\ -\dot{\varphi}_1^2m_3l_2^2\frac{\sin 2\varphi_2}{2} + M_T = 0; \end{cases} \qquad (15)$$

Аналіз системи (15) показує, що динаміка важіля не залежить від кута повороту руки.

Результати математичного моделювання механічної системи, яка описується рівняннями (15), показані на Рис. 6. При моделюванні прийняті наступні параметри: l_1=0,245 м; l_2=0,172 м; m_1=0,215 кг; m_2=0,208 кг; m_3=0,09 кг.

Досліджувався випадок, коли маятник перебуває в нестійкому положенні з початковим відхиленням $\varphi_2 = 3{,}1$ рад. У момент часу t=0c. важіль починає рухатися з нульовими початковими значеннями швидкості і прискорення. Наявність сил тертя в механічній передачі обумовлює закінчення руху важіля в стійкому нижньому положенні. Всі траєкторії руху можна розбити на 3 етапи:

1. Етап нелінійних коливань. Починається при початкових кутах відхиленнях важіля більше ніж $\pi/2$ і закінчується при досягненні амплітуди коливань значень, менших за $\pi/2$. Наявність цього етапу пояснюється зворотно-обертальним рухом руки, викликаним рухом важіля.
2. Етап коливань, наближених до гармонійних. Починається при амплітудах коливання важіля, менших за $\pi/2$, і закінчується зниженням амплітуди цих коливань до нуля. На цьому етапі траєкторії руху руки і важіля наближаються до гармонійних і визначаються характером руху маятника.
3. Етап спокою. Характеризується стабілізацією важіля в нижньому стійкому положенні і відсутністю будь-якого руху.

Тривалість перших двох етапів залежить від параметрів маятника та сил тертя, що діють у його суглобах.

Висновок

У даній роботі отримана математична модель динаміки маятника Фурути у тривимірній системі координат. Використання цієї моделі дозволило визначити характер руху маятника при великих та малих відхиленнях важіля. Встановлено, що на цей рух впливає лише швидкість та прискорення руки і не впливає її положення.

References

[1] K.Furuta, M. Yamakita, and S Kobayashi, “Swing–up control of inverted pendulum usin pseudostate feedback”, Journal of System and Control Engineering, vol.206,no.6, pp.263–269, 1992.

[2] K. Furuta and M. Iwase, “Swing–up time analysis of pendulum”, Bulleting of Polish Academy of Science: Techical Science, vol.52, no.3, pp.153–163, 2004.

[3] J. Akesson and K.J. Astrom, “Safe manual control of the Furuta pendulum”, in Proceedings of the IEEE International conference on Control Applications (CCA’01), pp.890–895, September 2001.

[4] M.B. Arnolds, Technical Report Traineeship University of Eindhoven, 2003, DCT report 2OO3.lOO

[5] Y. Baba, M. Izutsu, Y. Pan, and K. Furuta, “Design of control method to rotate pendulum,” in Proceedings of the SICE-ICASE International Joint Conference, pp. 2381–2385, Korea, October 2006.

[6] B. Cazzolato, Z. Prime “On the dynamics of the Furuta pendulum” Journal of Control Science and Engineering, Australia 2011.

[7] Zinchenko V.I. “Issledovanie dvizhenija rel'sovyh ekipazhej po krivolinejnym uchastkam puti” [Investigation of motion railway vehicles on curved sections of road] dis./ V.I.Zinchenko, kandidat tehnicheskih nauk 05.22.07 – Dnepropetrovsk, 1977.- 154s.