УДК 636.085.55:66.021.2

И.С.КАЦ, д-р физ.-мат.наук, профессор, Б.В.ЕГОРОВ, д-р техн. наук, профессор, А.В.МАКАРИНСКАЯ, канд. техн. наук, доцент
Одесская национальная академия пищевых технологий, г.Одесса

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА ПРЕМИКСОВ И КОМБИКОРМОВ

В статье приведена статистическая оценка эффективности технологических процессов производства премиксов и комбикормов согласно закону распределения вероятностей. Рассмотрены варианты распределения плотности вероятности случайной величины при анализе ключевого компонента кормовой смеси в заданном сегменте.

Ключевые слова: *ключевой компонент, случайная величина, плотность распределения, выборка, комбикорм.*

In clause statistical processing of quality of work of the process equipment is resulted by manufacture of mixed fodders and premix according to the law of distribution of probabilities. Variants of distribution of density of probability of a random variable are considered at the analysis of a key component of a fodder mix in the set segment.

Key words: *a key component, a random variable, density of distribution, sample, mixed fodder, premix.*

1. Постановка задачи.

Как отмечалось в работе [1] для оценки эффективности функционирования технологических процессов при производстве комбикормов и премиксов желательно действовать следующим образом. Выбирают один из компонентов, входящий в состав комбикорма (премикса). Его называют ключевым или индикаторным компонентом. Изучают концентрацию этого компонента в смеси на выходе из смесителя. Для этого через равные промежутки времени (час, сутки) отбирают пробы рассыпного комбикорма (премикса). Их будем называть большими. Из каждой большой пробы берут меньшие пробы, производят лабораторный анализ каждой из этих проб и концентрации ключевого компонента в этих пробах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют выборкой. Это конкретные числа. Находят так называемую среднюю выборочную $\bar{x}$ по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n) \qquad (1)$$

и выборочное среднее квадратичное отклонение *s* по формуле

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ \ldots \ + (x_n - \bar{x})^2)} \qquad (2)$$

Так поступают с каждой большой пробой. Собственно, числа $\bar{x}$ и s характеризуют в какой-то мере концентрацию ключевого компонента в большой пробе.

Пусть в соответствии с рецептом эта концентрация должна равняться c. При идеальной работе всех агрегатов, участвующих в производственном процессе, и идеальной работе лаборанта $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а следовательно и $\bar{x}$, должны равняться *c* и потому s должно равняться нулю. На практике так не бывает.

Обычно выборочные средние для больших проб группируются около c. Однако, может случиться, что выборочная средняя одной или нескольких из больших проб значительно отличается от c. Мы называем это выбросом. В этом случае важно понять, возникло ли это отличие из-за сбоя в работе оборудования или из-за случайных факторов, воздействующих на производственный процесс. Из всех таких выбросов важно изучить первый по времени. Поэтому нас интересует выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а также $\bar{x}$ и s, именно для соответствующей большой пробы, которую будем называть сомнительной.

Поясним, какую математическую задачу мы будем решать в настоящей работе. Исходя из того, для какого вида животных предназначен комбикорм и соответствующих рекомендаций зоотехнической науки о кормлении животных, мы можем допустить, чтобы концентрация ключевого компонента была отличной от c, но не большей, чем некоторое число b ($b > c$), и не меньшей, чем некоторое число a ($a < c$). Таким образом, мы допускаем, чтобы концентрация принадлежала сегменту $[a, b]$, которому принадлежит c.

Наша цель выяснить по результатам выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взятой из анализируемой большой пробы, может ли концентрация ключевого компонента в данной пробе все же принадлежать сегменту $[a, b]$.

2. Решение задачи.

Число x_j будем рассматривать как конкретное значение некоторой случайной величины X_j, полученное в опыте, состоящем во взятии j-ой малой пробы из сомнительной большой пробы ($j = 1, 2, \ldots , n$).

Все X_j подчинены одинаковому закону распределения вероятностей, которое по многим причинам следует считать нормальным.

Математическое ожидание каждой случайной величины X_j - это истинная концентрация ключевого компонента в сомнительной большой пробе. Ясно, что $\bar{x}$ это конкретное значение случайной величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ \ldots \ + X_n), \qquad (3)$$

а s - это конкретное значение случайной величины

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}((X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \ \ldots \ + (X_n - \bar{X})^2)}, \qquad (4)$$

полученных в опыте, состоящем в получении выборки (сравним с равенствами (1) и (2)). Заметим, что математическое ожидание случайной величины $\bar{X}$ совпадает с математическим ожиданием каждой случайной величины X_j.

Решение поставленной задачи опирается на фундаментальный результат, согласно которому случайная величина

$$t = \frac{\overline{X} - m}{S}, \tag{5}$$

где m - это неизвестное, но вполне определенное математическое ожидание случайных величин X_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и $\overline{X}$ (а значит и истинная концентрация ключевого компонента в анализируемой пробе), подчиняется распределению Стьюдента со степенью свободы n-1 (см., например, [2], § 29.4).

Плотность вероятностей этого распределения

$$s_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{(n-1)\pi}}\left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{6}$$

где Γ - так называемая гамма-фукнция Эйлера.

Одной из первообразных функции $s_{n-1}(x)$ является

$$S_{n-1}(x) = \int_{-\infty}^{x} s_{n-1}(u)du = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{(n-1)\pi}}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}du. \tag{7}$$

Таблица значений этой функции приведена в Приложении. Она заимствована из монографии [3].

Как и плотность вероятности любой непрерывной случайной величины $s_{n-1}(x)$ обладает следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_{n-1}(x)dx = 1. \tag{8}$$

Кроме того, для любого положительного числа ε <1 найдутся такие числа p_ε и q_ε, что

$$\int_{-\infty}^{q_\varepsilon} s_{n-1}(x)dx = \varepsilon, \qquad \int_{p_\varepsilon}^{+\infty} s_{n-1}(x)dx = \varepsilon \tag{9}$$

причем эти числа определяются однозначно равенствами (9), т.к. $s_{n-1}(x) > 0$ при любом x. Заметим, что $q_\varepsilon = -p_\varepsilon$, поскольку функция $s_{n-1}(x)$ четна.

Дальнейший план работы таков. Выбираем малое положительное число ε - уровень значимости, например, ε **=0,05** или ε **=0,01**. Выдвигаем гипотезу о математическом ожидании m случайной величины $\overline{X}$, а затем с помощью вышеизложенного выясним, согласуется ли гипотеза с результатом выборки.

Принимаемая гипотеза состоит в том, что m принадлежит сегменту $[a, b]$. Рассмотрим два случая: $\overline{x} > b$ и $\overline{x} < a$.

<u>*Первый случай*</u>, $\overline{x} > b$. Так как $s_{n-1}(x)$ - плотность вероятности случайной величины $\frac{\overline{X}-m}{S}$, то

$$P\left(\frac{\overline{X}-m}{S} \geq \frac{\overline{x}-m}{s}\right) = \int_{\frac{\overline{x}-m}{s}}^{+\infty} s_{n-1}(u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} s_{n-1}(u)du - \int_{-\infty}^{\frac{\overline{x}-m}{s}} s_{n-1}(u)du = 1 - S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-m}{s}\right) \tag{10}$$

(см. равенства (8) и (7)).[*)]

Так как функция $S_{n-1}(x)$, определенная равенством (7), строго возрастает, то наибольшее значение выражение $1 - S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-m}{s}\right)$ достигнет (при условии соблюдения гипотезы), если взять $m = b$. Оно примет тогда значение $1 - S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-b}{s}\right)$, численная величина которого может быть найдена с помощью упомянутой ранее таблицы. Если окажется, все же, что это значение меньше, чем ε, то, сравнивая первый интеграл в (10) со вторым интегралом в строке (9), убедимся, что $\frac{\overline{x}-m}{s} > p_\varepsilon$. Однако, p_ε - это нижняя граница (критическая точка) так называемой правосторонней критической области, соответствующей уровню значимости ε, а $\frac{\overline{x}-b}{s}$ - это конкретное значение, которое приняла случайная величина $\frac{X-b}{S}$ в опыте, состоящем во взятии выборки из анализируемой большой пробы. Значит, в этом опыте произошло событие, вероятность которого меньше ε (см. (10)). Из-за малости ε мы его считаем практически невозможным и принятая гипотеза отвергается. Это говорит о том, что выброс нельзя объяснить только случайными воздействиями.

<u>*Второй случай*</u>, $\overline{x} < a$. Воспользуемся тем, что (см. (7))

$$P\left(\frac{\overline{X}-m}{S} \leq \frac{\overline{x}-m}{s}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{\overline{x}-m}{s}} s_{n-1}(u)du = S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-m}{s}\right). \tag{11}$$

Найденная вероятность примет наибольшее значение, если, не нарушая гипотезы, положить $m=a$. Она примет значение $S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-a}{s}\right)$. Если окажется, что оно, все же, меньше ε, то, сравнивая интеграл в (11) с первым интегралом в (9), приходим к выводу, что $\frac{\overline{x}-m}{s} < q_\varepsilon$. Но q_ε это верхняя граница (критическая точка) левосторонней критической области соответствующей уровню значимости ε. Повторив рассуждения, проведенные при анализе ситуации, возникшей в первом случае, приходим к выводу, что должна быть отброшена гипотеза, согласно которой концентрация ключевого компонента находится в допустимых пределах (от a до b).

3. <u>Резюме.</u>

Производя статистическую оценку эффективности функционирования технологических процессов в производственных условиях можно поступать

[*)] Запись $P\left(\frac{\overline{X}-m}{S} \geq \frac{\overline{x}-m}{s}\right)$ означает вероятность события заключающегося в том, что случайная величина $\frac{X-m}{S}$ принимает значение, большее, чем число $\frac{\overline{x}-m}{s}$, или равное ему.

следующим образом. Дана выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По формулам (1) и (2) вычисляют $\overline{x}$ и s. Выбирают уровень значимости ε. Берут обычно $\varepsilon = 0{,}05$ или $\varepsilon = 0{,}01$.

Если $\overline{x} > b$, то вычисляют $\dfrac{\overline{x}-b}{s}$. Затем используют таблицу для вычисления значения $1-S_{n-1}\left(\dfrac{\overline{x}-b}{s}\right)$. Если окажется, что полученное число меньше, чем ε, то гипотеза отбрасывается.

Если $\overline{x} < a$, то вычисляют $\dfrac{\overline{x}-a}{s}$. Затем с помощью таблицы вычисляют $S_{n-1}\left(\dfrac{\overline{x}-a}{s}\right)$. Если окажется, что $S_{n-1}\left(\dfrac{\overline{x}-a}{s}\right) < \varepsilon$, то гипотеза отбрасывается.

Если гипотеза не отбрасывается, то это еще не означает, что она справедлива.

Вопрос о выборе ε весьма сложен. Его нельзя решить математическими методами. Отметим только, что с увеличением ε возрастают шансы отбросить гипотезу при ее справедливости.

Приложение

Таблица значений функции $S_{n-1}(x)$.

$$S_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}du$$

x \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
0,1	532	535	537	537	538	538	538	539	539	539
0,2	563	570	573	574	575	576	576	577	577	577
0,3	593	604	608	610	612	613	614	614	614	615
0,4	621	636	642	645	647	648	650	650	651	651
0,5	648	667	674	678	681	683	684	685	686	686
0,6	672	695	705	710	713	715	716	717	718	719
0,7	694	722	733	739	742	745	747	748	749	750
0,8	715	746	759	766	770	773	775	777	778	779
0,9	733	768	783	790	795	799	801	803	804	805
1,0	750	789	804	813	818	822	825	827	828	830
1,1	765	807	824	834	839	843	846	848	850	851
1,2	779	824	842	852	858	862	865	868	870	871
1,3	791	838	858	868	875	879	883	885	887	889
1,4	803	852	872	883	890	894	898	900	902	904
1,5	813	864	885	896	903	908	911	914	916	918
1,6	822	875	896	908	915	920	923	926	928	930
1,7	831	884	906	918	925	930	934	936	938	940
1,8	839	893	915	927	934	939	943	945	947	949
1,9	846	901	923	935	942	947	950	953	955	957
2,0	852	908	930	942	949	954	957	960	962	963
2,2	864	921	942	954	960	965	968	970	972	974
2,4	874	931	952	963	969	973	976	978	980	981
2,6	883	938	960	970	976	980	982	984	986	987
2,8	891	946	966	976	981	984	987	988	990	991
3,0	898	952	971	980	985	988	990	992	992	993
3,2	904	957	975	984	988	991	992	994	995	995
3,4	909	962	979	986	990	993	994	995	996	997
3,6	914	965	982	989	992	994	996	996	997	998
3,8	918	969	984	990	994	996	997	997	998	998
4,0	922	971	986	992	995	996	997	998	998	999
4,2	926	974	988	993	996	997	998	998	999	999
4,4	929	976	989	994	996	998	998	999	999	999
4,6	932	978	990	995	997	998	999	999	999	1,000
4,8	935	980	991	996	998	998	999	999	1,000	
5,0	937	981	992	996	998	999	999	1,000		
5,2	940	982	993	997	998	999	999			
5,4	942	984	994	997	998	999	1,000			
5,6	944	985	994	998	999	999				
5,8	946	986	995	998	999	999				
6,0	947	987	995	998	999	1,000				

x \ n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	∞
0,0	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,50000
0,1	539	539	539	539	539	539	539	539	539	53983
0,2	577	578	578	578	578	578	578	578	578	57926
0,3	615	615	616	616	616	616	616	616	616	61791
0,4	652	652	652	652	653	653	653	653	653	65542
0,5	686	687	687	688	688	688	688	688	689	69146
0,6	720	720	721	721	721	722	722	722	722	72575
0,7	751	751	752	752	753	753	753	754	754	75804
0,8	780	780	781	782	782	782	783	783	783	78814
0,9	806	807	808	808	809	809	810	810	810	81594
1,0	831	832	832	833	833	834	834	835	835	84134
1,1	853	854	854	855	856	856	857	857	858	86433
1,2	872	873	874	875	876	876	877	877	.878	88493
1,3	890	891	892	893	893	894	894	895	895	90320
1,4	906	907	908	908	909	910	910	911	911	91924
1,5	919	920	921	922	923	924	924	924	925	93319
1,6	931	932	933	934	935	935	936	936	937	94520
1,7	941	943	944	945	945	946	946	947	947	95543
1,8	950	952	952	953	954	955	955	956	956	96407
1,9	958	959	960	961	962	962	963	963	964	97128
2,0	965	967	967	967	968	969	969	970	970	97725
2,2	975	976	977	977	978	979	979	979	980	98610
2,4	982	983	984	985	985	986	986	986	987	99180
2,6	988	988	989	990	990	990	991	991	991	99534
2,8	991	992	992	993	993	994	994	994	994	99744
3,0	994	994	995	995	996	996	996	996	996	99865
3,2	996	996	996	997	997	997	997	998	998	99931
3,4	997	997	998	998	998	998	998	998	998	99966
3,6	998	998	998	999	999	999	999	999	999	99984
3,8	998	999	999	999	999	999	999	999	999	99993
4,0	999	999	999	999	999	1,000	1,000	1,000	1,000	99997
4,2	999	999	1,000	1,000	1,000					99999
4,4	1,000	1,000								99999
4,6										
4,8										
5,0										
5,2										
5,4										
5,6										
5,8										
6,0										

Если x < 0, то следует воспользоваться формулой $S_{n-1}(x) = 1 - S_{n-1}(-x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоров Б.В., Макаринская А.В, Кац И.С. Математические основы оценки стабильности технологических процессов производства премиксов и комбикормов// Зернові продукти і комбікорми, 2008. - № 2 (30). – С. 35-40.*
2. *Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. - 648 с.*
3. *Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Физ.-мат. ГИЗ, 1961. - 406 с.*

Поступила 10.2008

Адрес для переписки:
ул. Канатная 112, г. Одесса, 65039