УДК 537.958:621.372.8

В.М. Фітьо, В.В. Ромах, Я.В. Бобицький
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра фотоніки

АНАЛІЗ ПЛАНАРНИХ ХВИЛЕВОДІВ МЕТОДОМ ЗБУРЕННЯ

Використано метод визначення сталих поширення планарних хвилеводів за наявності збурення діелектричної проникності. Метод ґрунтується на представленні поля збуреного хвилеводу у вигляді лінійної комбінації полів незбуреного хвилеводу з деякими коефіцієнтами. Проведено розрахунки для хвилеводів, які не впливають на випромінювання (пасивні), поглинають чи підсилюють його (активні). Ця теорія є наближеною, коли враховуються лише направлені моди, проте може бути точною, коли немає взаємодії між модами.

Ключові слова: підсилення, направлена мода, діелектрична проникність, планарний хвилевід, стала поширення.

V.M. Fitio, V.V. Romakh, Ya.V. Bobitski
Lviv Polytechnic National University
Department of Photonics

ANALYSIS OF PLANAR WAVEGUIDES BY PERTURBATION METHOD

One of the important tasks today in the field of communications and information technologies is the ability to provide high-speed data transmission using fiber-optic communication lines. The presence of existing homo- and heterostructures in semiconductor lasers cannot implement this task due to the fact that at high-frequency modulation these structures generate a large number of modes, i.e., wavelengths. As an alternative, distributed feedback lasers (DFB lasers) are used which active medium is similar to a waveguide that includes a periodic structure, namely a grating. A waveguide indicates that active layer has greater refractive index than layers surround it. In a grating which is formed at layer interface of structure, Bragg reflection occurs providing single-mode generation in spite of spatial failure due to a standing wave in active medium.

As to the theory of distributed feedback lasers, it is well developed and studied when first order Bragg conditions are carried out. Instead, there is another situation for higher order Bragg conditions (second, third). In particular, the theory for analysis of waveguide lasers to satisfy second order conditions is described, but it is only applied to active waveguides with surface relief gratings; in addition, representation of the fields in active waveguide is not quite complete. Also, the fields are not sufficiently presented for waveguides with bulk gratings resulting radiation is expected only from waveguide top, but at small angles to the axes *x* (i.e., almost perpendicular to a waveguide) and *z* (beam generated is propagating in a substrate) it is not provided by the theory. The theory of propagation of plane only reflective wave in periodic medium with gain and without it is worked out, and generation conditions at implementation

of second and higher order Bragg conditions are obtained. But there is no possible to use this theory directly for waveguide DFB lasers because it is not clear how fields and waveguide mode constants of planar waveguides are calculated.

Therefore, the aim of this work is a usage of method to find propagation constants of waveguide modes at perturbation presence which is determined by change of waveguide permittivity during pumping. This method is based on fact that field of unperturbed waveguide is represented as linear combination of unperturbed waveguide fields with coefficients which depends on coordinate along which waveguide modes propagate. As a result, systems of second order differential equations are obtained. In this paper, both passive (permittivity ε(x) is a real function) and active (ε(x) becomes imaginary values) waveguides without grating in a structure are considered. Using both the perturbation method and approach based on Fourier transform, symmetric and asymmetric waveguides are analyzed, and propagation constants of guided modes are found. Good coincidence of results obtained by these methods is observed. Difference is only in last digits of propagation constants; it appears due to rounding. Theory used is approximate because only guided modes are taken into account, but it can be accurate when there is no interaction between modes of unperturbed waveguide.

Key words: gain, guided mode, permittivity, planar waveguide, propagation constant.

Вступ. Одним із важливих завдань сьогодення у сфері комунікацій та інформаційних технологій є можливість забезпечення високої швидкості передавання даних з використанням волоконно-оптичних ліній зв’язку (ВОЛЗ). Наявність існуючих гомо- та гетероструктур у напівпровідникових лазерах не дає змоги реалізувати цю задачу у зв’язку з тим, що за високочастотної модуляції такі структури генерують велику кількість мод, тобто довжин хвиль. Як альтернативу використовують лазери з розподіленим зворотним зв’язком (РЗЗ-лазери), активне середовище яких нагадує хвилевід, в який входить періодична структура, а саме ґратка [1]. Хвилевід вказує на те, що активний шар має більший показник заломлення, ніж навколишні шари. Через малу товщину активного шару генерується обмежена кількість направлених мод. Вони добре локалізовані завдяки великій різниці показників заломлення, тим самим зменшуються розподілені втрати в лазері. В ґратці, яка формується на границі розділу шарів структури, виникає бреггівське відбивання, що забезпечує одночастотний режим генерації, незважаючи на просторовий провал через стоячу хвилю в активному середовищі.

Щодо теорії лазерів з розподіленим зворотним зв’язком, то вона достатньо розвинута та вивчена, коли виконуються умови Брегга першого порядку [1–3], натомість для умов Брегга вищих порядків (другого, третього) ситуація інша. Зокрема, описано теорію для аналізу хвилеводних лазерів за виконання умов другого порядку [4], але вона стосується лише активних хвилеводів з рельєфними поверхневими ґратками; крім цього, представлення полів у активному хвилеводі не є досить повним. Також поля недостатньо представлені для хвилеводів з об’ємними ґратками [5, 6], внаслідок чого передбачається випромінювання лише з торця хвилеводу, а під малими кутами до осей x (тобто майже по нормалі до хвилеводу) та z (генерований пучок поширюється в підкладці) воно теорією не передбачено.

Розроблена теорія поширення плоскої суто відбивної хвилі в періодичному середовищі як з підсиленням, так і без нього, та отримано умови генерації у разі виконання умов Брегга другого та вищих порядків [7–9]. Але прямо використати цю теорію для хвилеводних лазерів з розподіленим зворотним зв’язком неможливо, оскільки не зрозуміло, як визначаються поля та сталі хвилеводних мод планарних активних хвилеводів.

Тому метою цієї роботи є використання методу визначення сталих поширення мод за наявності збурення, яке визначається зміною діелектричної проникності хвилеводу в процесі накачування. В цій роботі досліджуються як пасивні (діелектрична проникність ε(x) є дійсною величиною), так і активні (ε(x) набуває уявних значень) хвилеводи без наявності ґратки у структурі та порівнюються результати, отримані цим методом та методом на основі перетворення Фур’є [10].

Аналіз хвилеводних мод методом збурення. Хвильове рівняння для планарного хвилеводу у випадку напряму напруженості електричного поля вздовж осі y (вектор напруженості електричного поля лежить в площині, яка паралельна до плоскої межі розділу діелектриків з різними показниками заломлення, так звана ТЕ поляризація) має вигляд [3]:

$$\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial z^2}+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon(x,z)E(x,z)=0\,, \quad (1)$$

де $\varepsilon(x, z)$ – діелектрична проникність середовища хвилеводу, яка залежить лише від x, коли у хвилеводі відсутня ґратка. Якщо хвилеводна мода поширюється вздовж осі z, то розв'язок шукають у такому вигляді:

$$E(x,z)=E(x)\exp(-i\beta z)\,, \quad (2)$$

де β – стала поширення хвилеводної моди, $E(x)$ – напруженість електричного поля, що залежить від координати x. Після підстановки (2) в (1) отримуємо:

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2}+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varepsilon(x)E(x)=\beta^2 E(x)\,. \quad (3)$$

Для хвилеводних мод маємо задачу на власні числа, тобто квадрат сталих поширення β_j^2, та відповідні власні функції $E_j(x)$ [3]. Залежно від товщини хвилеводного шару d та діелектричної проникності $\varepsilon(x)$ можемо мати різну кількість сталих поширення хвилеводних мод, які є дискретними і задовольняють таку умову:

$$\frac{2\pi}{\lambda}n_2<\beta_j<\frac{2\pi}{\lambda}n_1\,,$$

причому $n_0 \le n_2 < n_1$, де n_0, n_1 і n_2 – показники заломлення захисного шару, плівки та підкладки відповідно; або ж хвилевід є градієнтним і тоді діелектрична проникність залежатиме від координати x за певною функціональною залежністю.

В лівій частині рівняння (3) маємо ермітовий оператор ($\varepsilon(x)$ – дійсну функцію), тому сталі поширення є дійсними, а власні функції $E_j(x)$ абсолютно інтегровані в просторі L_2, а також ортогональні. Для аналізу можна здійснити нормування функцій $E_j(x)$, тим самим будуть виконуватися умови:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_j(x)E_m^*(x)\,dx=\delta_{j,m}\,, \quad (4)$$

де * означає комплексне спряження, $\delta_{j,m}$ – символ Кронекера.

Якщо $\varepsilon(x)$ – симетрична функція, то розв'язки $E_j(x)$ будуть або симетричними $E_j(x) = E_j(-x)$, або антисиметричними $E_j(x) = -E_j(-x)$ функціями. Якщо хвилевід несиметричний, то умова щодо розподілів полів $E_j(x)$ порушується, але завжди виконується умова (4).

Розглянемо планарний хвилевід, діелектрична проникність якого описується виразом:

$$\varepsilon(x)=\varepsilon_0(x)+\varepsilon_1(x)\,, \quad (5)$$

де $\varepsilon_0(x)$ і $\varepsilon_1(x)$ – стала і змінна компоненти діелектричної проникності, причому $\varepsilon_1(x)$ може бути уявною величиною. Крім цього, справедливою є умова: $|\varepsilon_1(x)| << \varepsilon_0(x)$. Нехай у випадку, коли $\varepsilon(x) = \varepsilon_0(x)$, відомі всі сталі поширення β_m хвилеводних мод, а також відповідні поля $E_m(x)$, які ортонормовані та задовольняють хвильове рівняння (3).

Якщо діелектрична проникність задовольняє вираз (5), то розв'язок хвильового рівняння (1) можна подати у вигляді лінійної комбінації розв'язків рівняння (3) так:

$$E(x)=\sum_{m=0}^{M-1}E_m(x)A_m(z)\exp(-i\beta_m z)\,, \quad (6)$$

де $A_m(z)$ – амплітуда відповідних хвилеводних мод, M – кількість хвилеводних мод.

Підставивши (6) в (1), отримаємо:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\left\{\frac{\partial^2 E_m(x)}{\partial x^2}A_m(z)\exp(-i\beta_m z)+E_m(x)\frac{\partial^2 A_m(z)}{\partial z^2}\exp(-i\beta_m z)-\right.$$
$$-2i\beta_m E_m(x)\frac{\partial A_m(z)}{\partial z}\exp(-i\beta_m z)-\beta_m^2 E_m(x)A_m(z)\exp(-i\beta_m z)+ \tag{7}$$
$$\left.+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\varepsilon_0(x)E_m(x)A_m(z)\exp(-i\beta_m z)+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\varepsilon_1(x)E_m(x)A_m(z)\exp(-i\beta_m z)\right\}=0.$$

Сума першого, четвертого та п’ятого доданків у фігурних дужках дорівнює нулю, оскільки вони задовольняють хвильове рівняння (3). Як наслідок, маємо рівняння, в якому замінимо часткові похідні на повні:

$$\sum_{m=0}^{M-1}\left\{E_m(x)\frac{d^2A_m(z)}{dz^2}\exp(-i\beta_m z)-2i\beta_m E_m(x)\frac{dA_m(z)}{dz}\exp(-i\beta_m z)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\varepsilon_1(x)E_m(x)A_m(z)\exp(-i\beta_m z)\right\}=0.$$

Помножимо останнє рівняння на функцію розподілу поля, комплексно-спряжену до $E_m(x)$, а саме $E_p^*(x)$, та проінтегруємо його в межах від $x=-\infty$ до $x=\infty$. Враховуючи ортонормованість функцій $E_m(x)$ і $E_p(x)$, отримаємо:

$$\frac{d^2A_m(z)}{dz^2}\exp(-i\beta_m z)-2i\beta_m\frac{dA_m(z)}{dz}\exp(-i\beta_m z)+k^2\sum_{p=1}^{M-1}\kappa_{m,p}A_p(z)\exp(-i\beta_p z)=0, \tag{8}$$

де $k=2\pi/\lambda$, $\kappa_{m,p}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}E_m(x)\varepsilon_1(x)E_p^*(x)\,dx$.

В рівнянні (8) виконаємо заміну змінних:

$$A_m(z)=B_m(z)\exp(i\beta_m z),$$

яку підставимо в цю рівність, внаслідок чого отримаємо:

$$\frac{d^2B_m}{dz^2}+2i\beta_m\frac{dB_m}{dz}-\beta_m^2B_m+2\beta_m^2B_m-2i\beta_m\frac{dB_m}{dz}+k^2\sum_{p=1}^{M-1}\kappa_{m,p}B_p=0.$$

Після зведення подібних членів в останньому рівнянні остаточно матимемо:

$$\frac{d^2B_m}{dz^2}+\beta_m^2B_m+k^2\sum_{p=1}^{M-1}\kappa_{m,p}B_p=0. \tag{9}$$

Система рівнянь (9) враховує лише направлені моди, яким відповідає дискретний спектр сталих поширення, тому ця система рівнянь є наближеною, проте в певних випадках можна отримати точні розв’язки. Щоб отримати точну систему рівнянь, потрібно в рівності (6) додатково врахувати також моди хвилеводу, що витікають, які мають неперервний спектр.

Приклади знаходження сталих поширення. Проаналізуємо отриманий вираз згідно з формулою (9). Якщо $\varepsilon_1(x)$ є постійною величиною, то система рівнянь (9) розпадається на M незалежних рівнянь, які мають вигляд

$$\frac{d^2B_m}{dz^2}+\beta_m^2B_m+k^2\varepsilon_1B_m=0. \tag{10}$$

Відповідний розв’язок можна записати так:

$$B_m(x)=C_{1m}\exp(-i\beta_m' z)+C_{2m}\exp(i\beta_m' z), \tag{11}$$

де

$$\beta_m^{'}=\sqrt{\beta_m^2+k^2\varepsilon_1}. \tag{12}$$

Пряма перевірка підтверджує ці співвідношення, навіть коли ε_1 є уявною величиною, причому ці співвідношення точні. Нехай товщина активного шару $d = 10$ мкм, показники заломлення хвилеводної структури $n_1 = 1.5177$, $n_0 = n_2 = 1.515$, а структура освітлюється хвилею з довжиною $\lambda = 0.6201$ мкм. Тоді сталі поширення для такого хвилеводу дорівнюють: $\beta_0 = 15.375997$ мкм$^{-1}$, $\beta_1 = 15.369681$ мкм$^{-1}$, $\beta_2 = 15.359818$ мкм$^{-1}$.

Якщо $\varepsilon_1 = 0.1$, то сталі поширення, які розраховані методом на основі перетворення Фур'є [10], становлять: $\beta'_0 = 15.706308$ мкм$^{-1}$, $\beta'_1 = 15.700125$ мкм$^{-1}$, $\beta'_2 = 15.690469$ мкм$^{-1}$; сталі поширення, розраховані за формулою (12), відповідно: $\beta'_0 = 15.706308$ мкм$^{-1}$, $\beta'_1 = 15.700124$ мкм$^{-1}$, $\beta'_2 = 15.690468$ мкм$^{-1}$. Бачимо добре накладання сталих поширення, розрахованих обома методами, є лише різниця в останніх розрядах сталих поширення, що виникає за рахунок заокруглень.

Якщо $\varepsilon_1 = i0.1$, то сталі поширення, розраховані обома методами, відповідно дорівнюють: $\beta'_0 = 15.379619 + i0.333780$ мкм$^{-1}$, $\beta'_1 = 15.373308 + i0.333917$ мкм$^{-1}$, $\beta'_2 = 15.363451 + i0.334413$мкм$^{-1}$; $\beta'_0 = 15.379619 + i0.333780$ мкм$^{-1}$, $\beta'_1 = 15.373307 + i0.333916$ мкм$^{-1}$, $\beta'_2 = 15.363453 + i0.334414$мкм$^{-1}$. Спостерігаємо добрий збіг результатів, отриманих двома методами.

Якщо у нас є симетричний хвилевід, тобто, $\varepsilon_0(-x) = \varepsilon_0(x)$ і $\varepsilon_1(-x) = \varepsilon_1(x)$, то система рівнянь розпадається на дві підсистеми: система рівнянь, розв'язком яких є симетричні функції $E(x)$, та система рівнянь, яку задовольняють антисиметричні розв'язки.

У випадку несиметричного хвилеводу ситуація стає загальною і нові сталі поширення потрібно шукати на основі системи рівнянь (9), тобто знайти власні значення відповідної матриці **Q**, яка дорівнює:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \beta_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^2\kappa_{0,0} & k^2\kappa_{0,1} & k^2\kappa_{0,2} & k^2\kappa_{0,3} \\ k^2\kappa_{1,0} & k^2\kappa_{1,1} & k^2\kappa_{1,2} & k^2\kappa_{1,3} \\ k^2\kappa_{2,0} & k^2\kappa_{2,1} & k^2\kappa_{2,2} & k^2\kappa_{2,3} \\ k^2\kappa_{3,0} & k^2\kappa_{3,1} & k^2\kappa_{3,2} & k^2\kappa_{3,3} \end{pmatrix}, \tag{13}$$

де $\kappa_{m,p}$ в загальному випадку має вигляд

$$\kappa_{m,p} = \int_{-\infty}^{\infty} E_m(x)\varepsilon_1(x)E_p^*(x)dx.$$

Зазначимо, що $|\kappa_{m,p\neq m}| << |\kappa_{m,m}|$ і $|\varepsilon_1(x)| << 1$. Відповідно до цих умов, на основі рівняння (13) можна знайти наближені значення:

$$\beta'_m \approx \sqrt{\beta_m^2 + k^2\kappa_{m,m}}\,. \tag{14}$$

Якщо товщина плівки $d = 10$ мкм, довжина хвилі випромінювання $\lambda = 0.6197$ мкм, а показники заломлення структури $n_1 = 1.5177$, $n_0 = n_2 = 1.515$, то сталі поширення для незбуреного хвилеводу становлять: $\beta_0 = 15.385924$ мкм$^{-1}$, $\beta_1 = 15.379610$ мкм$^{-1}$, $\beta_2 = 15.369749$ мкм$^{-1}$.

Якщо $\varepsilon_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -d/2, \\ i0.001, & -d/2 \le x \le d/2, \\ 0, & x > d/2, \end{cases}$ то точні значення сталих поширення дорівнюють: $\beta'_0 = 15.385921 + i0.003292$ мкм$^{-1}$, $\beta'_1 = 15.379593 + i0.003129$ мкм$^{-1}$, $\beta'_2 = 15.369689 + i0.002736$мкм$^{-1}$. Сталі поширення, розраховані за виразом (14), відповідно дорівнюють: $\beta'_0 = 15.385924 + i0.003292$ мкм$^{-1}$, $\beta'_1 = 15.379614 + i0.003127$ мкм$^{-1}$, $\beta'_2 = 15.369749 + i0.002729$ мкм$^{-1}$. Бачимо, що у цьому випадку також задовільне накладання значень сталих поширення, розрахованих точним та наближеним методами. Зазначимо, що уявні частини діелектричної проникності співмірні з величиною 0.001 у разі виникнення генерації в суто відбивній ґратці [11].

Висновки. Розглянута теорія для аналізу активних планарних хвилеводів, здатних підсилювати введене випромінювання, методом збурення. Цим методом, а також методом на основі перетворення Фур'є знайдено сталі поширення для симетричних та несиметричних хвилеводів.

Порівняння результатів дає підстави стверджувати про невелику похибку в обчисленнях. За врахування лише хвилеводних мод метод є точним в окремих випадках, проте за невеликого збурення, наявного в практичних застосуваннях, його точність є задовільною для всіх випадків.

*1. Ярив А. Квантовая электроника, – Изд. второе, пер. с англ. – М.: Советское радио, 1980. 2. Такума Х. Физика полупроводниковых лазеров // Пер. с япон. – М.: Мир, 1989. 3. Ярив А., Юх П. Оптические волны в кристаллах // Пер. с англ. М.: Мир, 1987. 4. Kazarinov R.F., Henry C.H. Second-order distributed feedback lasers with mode selection provided by first-order radiation losses // IEEE J.Quant. Electron. – 1985. – QE-21, No 2. – P. 1144–1150. 5. Vasnetsov M.V., Bazhenov V.Yu ., Slussarenko S.S., Abbate G. Coupled-wave analysis of second-order Bragg diffraction. I.Reflection-type phase grating // J.Opt. Soc. Am. B. – 2009. – Vol. 26, No 4. – P. 684–690. 6. Vasnetsov M.V., Bazhenov V.Yu ., Slussarenko S.S., Abbate G. Coupled-wave analysis of second-order Bragg diffraction. II. Threshold conditions for distributed-feedback laser oscillations // J.Opt. Soc. Am. B. – 2009. – Vol. 26, No 11. – P. 1975–1983. 7. Fitio V., Smirnova T. Analysis of light wave diffraction and amplification by reflection grating operating in the second-order Bragg regime. 1. Approximate theory // J.Opt. Soc. Am. B. – 2012. – Vol. 29, No 4. – P. 691–697. 8. Fitio V., Smirnova T. Analysis of light wave diffraction and amplification by reflection grating operating in the second-order Bragg regime. 2. Reflectivity and spectral characteristics of a grating // J.Op t. Soc. Am. B. – 2012. – Vol. 29, No 5. – P. 944–949. 9. Fitio V.M., Bobitski Y.V. Reflection Grating Theory at Fulfillment of the Second and Third Orders Bragg Conditions // 10th International Conference on Laser and Fiber-Optical Networks Modeling LFNM*2010, 12–14 September 2010, Sevastopol, Ukraine. – P.149–151. 10. Фітьо В.М., Ромах В.В., Бобицький Я.В. Застосування перетворення Фур'є для пошуку локалізованих мод градієнтних планарних хвиле-водів // Радіофізика та електроніка. – 2013. – Т. 4(18), № 4. – С. 21–26. 11. Фітьо В.М., Бобицький Я.В. Оптична дифракція на періодичних структурах. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013.*