**УДК 528.1:519.281**

Й.В. ДЖУНЬ

Кафедра математичного моделювання, Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. акад. С. Дем'янчука, вул. Дем'янчука 4, Рівне, Україна, 33027, e-mail: iosif-june@rambler.ru.

# ПРО МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ, АДАПТОВАНИЙ ДО ЗАКОНУ ПОХИБОК ПІРСОНА-ДЖЕФФРІСА

**Вступ**. Класичний метод найменших квадратів (МНК) К. Ф. Гаусс створив, спираючись на гіпотезу нормальності похибок спостережень. Проте ця гіпотеза, як правило, стає неспроможною, якщо кількість багатократних вимірів $n$>500. У цьому випадку похибки описуються симетричним, трипараметричним розподілом Пірсона-Джеффріса, який, як і закон Гаусса, має діагональну інформаційну матрицю, і як показали численні дослідження, може бути названим універсальним законом розподілу похибок великих обсягів. **Метою** цього дослідження є розроблення еволюційних процедур МНК, адаптованого до закону похибок Пірсона-Джеффріса. **Методика** вирішення цієї проблеми ґрунтується на аналітичній теорії адаптованих до похибок спостережень вагових функцій, яку ми розробили. **Основним результатом** роботи є те, що ця теорія перетворює робастне оцінювання із евристичних спроб у справжню науку. **Наукова новизна дослідження**: вперше показано значення аналізу залишкових похибок з точки зору фішерівської теорії оцінок, що дає змогу окреслити зони сингулярності вагової функції під час застосування МНК. **Практична значущість:** розроблено метод діагностики результатів застосування МНК на основі аналізу статистичних кумулянт залишкових похибок і створено обґрунтовані еволюційні процедури для отримання ефективних МНК-оцінок, які фактично не змінюють класичних алгоритмів обробки даних.

*Ключові слова:* закон Гаусса; розподіл Пірсона-Джеффріса; метод максимальної правдоподібності; аналітична теорія вагових функцій

### Вступ

Відповідно до парадоксу Ельяс-Берга-Хампеля будь-яка гіпотеза про закон розподілу багатократних вимірів буде відхилена зі збільшенням кількості спостережень [El'jasberg P.E., 1983; Dzhun I. V., 2012; Hampel F. R. and others, 1986]. З дією цього парадоксу неодноразово стикались дослідники, які обробляли великі і надвеликі обсяги інформації [Dzhun I. V., 1991, 1992, 2012]. За таких обсягів спостережень явно не підтверджуються академічні уявлення про те, що їхні похибки повинні наближатись до закону Гаусса, як до своєї граничної форми. Реальною є зовсім інша ситуація: із збільшенням вимірювальної інформації похибки набувають, як правило, додатного ексцесу. У той самий час фундаментальні положення методу найменших квадратів (МНК), який і досі є головною процедурою математичного моделювання, Гаусс обґрунтував, спираючись на гіпотезу нормальності розподілу похибок спостережень. З огляду на вищесказане, виникає проблема адаптації процедур МНК до обробки спостережень великих обсягів, похибки яких не є гауссовими.

### Мета

Розробити еволюційні схеми МНК, адаптовані до дійсних розподілів похибок спостережень великих обсягів.

### Методика

Вирішення означеної проблеми ґрунтується на використанні розробленої аналітичної теорії вагових функцій, яка докладно розглянута у роботі [Dzhun I. V., 2013]. Згідно з висновками цієї роботи негауссів характер розподілу похибок означає те, що спостереження мають істотно різну вагу. Однакову вагу мають лише ті спостереження, які підпорядковуються закону нормального розподілу. Якщо ексцес похибок $\varepsilon \neq 0$ і їх асиметрія $A \neq 0$, то їх обернена дисперсія не є вже достатньою характеристикою ваг спостережень. Повною і вичерпною характеристикою системи негауссових спостережень може бути тільки їх вагова функція, що залежить від значень статистичних комулянт $A$ і $\varepsilon$, які є мірами відхилення реальних похибок від закону Гаусса.

Адаптацію МНК до закону похибок Пірсона–Джеффріса легко здійснити, не порушуючи звичних процедур класичного МНК і вносячи лише незначні зміни в його програмне забезпечення. Фактично ця адаптаційна процедура може бути реалізована у три етапи.

На першому етапі застосовують класичний МНК і обчислюють мінімізовані залишкові похибки $x_i$ для кожного *i*-го рівняння похибок. Потім обчислюють асиметрію $A$ і ексцес $\varepsilon$ похибок $x_i$, визначають стандартні похибки цих статистик. Будують для них 90 % довірчі інтервали за методикою, розглянутою у [Dzhun I. V., 2013].

Якщо довірчі інтервали для $A$ і $\varepsilon$ накривають нуль, то обмежуються застосуванням класичного МНК, рішення вважається кінцевим і подальші обчислення припиняють.

У разі, коли довірчий інтервал для $A$ не накриває нуль або інтервал для $\varepsilon$ потрапляє у від'ємну зону для ексцесів, то, згідно з висновками у роботі Dzhun I.V., 2013, це свідчитиме про некоректно проведений експеримент, оскільки оцінювання виконується у недопустимих областях.

Адаптацію МНК до закону похибок Пірсона-Джеффріса здійснюють лише під час виконання таких умов:

– довірчий інтервал для $A$ накриває нуль;

– увесь довірчий інтервал для $\varepsilon$ знаходиться в додатній області. Згідно з висновками роботи [Dzhun' I.V., 2013], це буде означати, що експеримент виконаний коректно і похибки належать до області несингулярних вагових функцій, які за таких умов задовільно апроксимуються розподілом Пірсона-Джеффріса [Jeffreys H., 1983]:

$$f(x)=\frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{2\pi(m-0{,}5)}\Gamma(m+0{,}5)}\times$$

$$\times\frac{1}{\sigma}\left[1+\frac{0{,}5m^2}{(m-0{,}5)^3}\left(\frac{x-\lambda}{\sigma}\right)^2\right]^{-m},$$

де $\lambda,\sigma,m$ – параметри розподілу, ефективні оцінки якого знаходимо методом максимальної правдоподібності із розв'язку такої системи рівнянь [Dzhun' I.V., 1992]:

$$-\frac{\partial lnL}{\partial\lambda}=\frac{m}{M\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}R_i^{-1}(x_i-\lambda)=0\,; \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial lnL}{\partial\sigma}=\frac{n}{\sigma}-\frac{m}{M\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}R_i^{-1}(x_i-\lambda)^2=0\,; \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial lnL}{\partial m}=n\cdot\psi_0-\sum_{i=1}^{n}\ln R_i+\sum_{i=1}^{n}M_1\times$$
$$\times R_i^{-1}\left(\frac{x_i-\lambda}{\sigma}\right)^2=0, \qquad (3)$$

де

$$R=1+(x-a)^2\cdot\sigma^{-2}\cdot 0{,}5\cdot M^{-1};$$
$$M=(m-0{,}5)^3m^{-2};$$
$$M_1=0{,}5m^2(m+1)(m-0{,}5)^{-4};$$
$$\psi_0=\psi(m+1)-\psi(m+0{,}5)-\left[2(m-0{,}5)\right]^{-1};$$

$\psi(m)$ – псі-функція.

Система (1)–(3) розв'язується методом послідовних наближень. У першому наближення приймають: $\lambda=\sum x_i/n$; $\sigma^2=0{,}933\mu_2$; $m=4$ [Dzhun' I. V., 1992].

Розв'язавши рівняння (1)–(3) і отримавши ефективні оцінки параметрів $\sigma$ і $m$ ваги похибок $p(x_i)$ для закону Пірсона-Джеффріса, за формулою, отриманою в роботі [Dzhun I.V., 2013], припускаючи як і Гаусс, що в спостереженнях відсутні систематичні похибки:

$$p(x_i)=\left[\left(\frac{m-0{,}5}{m}\right)^3\sigma^2+\frac{x_i^{\,2}}{2m}\right]^{-1}, \qquad (4)$$

де $m$ і $\sigma$ – параметри розподілу Пірсона-Джеффріса

Третій етап: кожне рівняння похибок $x_i$ нормують, помноживши його на значення $\sqrt{p(x_i)}$, обчислені за формулою (4), і отримують МНК-оцінки шуканих поправок $l_j$, j=1,2,…, *k*, за умови $\sum x^2_i\ p(x_i)$ = min:

$$l_j=D_{l_j}\big/D, \qquad (5)$$

де $D$ – детермінант системи нормальних рівнянь; $D_{l_i}$ – визначник відповідної невідомої. Дисперсії поправок $l_j$ знаходимо з формул:

$$\sigma^2_{l_j}=\sigma_0^2\frac{A_{jj}}{D}\,;\ \ \sigma_0^2=\frac{\sum x^2p(x)}{n-k}, \qquad (6)$$

де $A_{jj}$ – мінори діагональних елементів системи нормальних рівнянь.

У менш відповідальних випадках $p(x_i)$ можна отримати набагато простіше без розв'язання системи (1)–(3), а методом моментів, у вигляді [Dzhun' I. V., 2013]:

$$p(x)=\frac{5\varepsilon+6}{2\sigma^2\beta_2+\varepsilon {x_i}^2},$$

де $\beta_2=\varepsilon+3$.

Ми розглянули МНК, адаптований до розподілу похибок Пірсона–Джеффріса, за допомогою аналітичної теорії вагової функції.

Ми запропонували таке застосування МНК в геодезії, в якому важливі і вибір моделі, і врахування великих похибок.

Така адаптація стає необхідною за великих обсягів спостережень, особливо, з огляду на те, що експериментальна наука вступає в еру великих вибірок. Наприклад, кількість локацій ШСЗ-лазером за час його руху від горизонту до горизонту становить до $10^3$, сучасні високоточні гравіметричні вимірювання галілеївського прискорення становлять до $10^5$ вимірів на добу, астрономічні каталоги отримують на основі вимірювань координат $10^6-10^7$ зірок; в ядерній фізиці реєструється $10^6-10^8$ подій за один експеримент. За такої величезної кількості спостережень класичні ймовірнісні закони Гаусса, Бернуллі, положення теореми Гаусса–Маркова втрачають свою адекватність.

Візьмемо для ілюстрації ряд регулярних спостережень широти у Гринвічі [Hulme H. R., Syms L. S., 1939]. Похибки цього ряду мають ексцес $\varepsilon=+6\pm0{,}07$, його обсяг – $n$=4982, за 9.1 % похибок – $|x_i|>3\delta$. Чи розумно у цьому випадку вибраковувати 445 спостережень, підлаштовувати похибки під неіснуючий ідеал, чи керуватись положеннями теореми Гаусса–Маркова, коли насправді ваги спостережень цього розподілу відрізняються більше ніж у 20 разів? Чи не краще прийняти новий ідеал – закон Пірсона-Джеффріса, що вирішує проблему, зберігаючи усі спостереження, а аномальним надає належні ваги, відповідно до вагової функції?

Зазначимо, що за багатократних спостережень $n$<500 класичні уявлення про похибки, як і теорема Гаусса–Маркова, ще не дуже суперечать дійсності і це створює ілюзію бездоганності класичних методів. Але за великої кількості спостережень стає очевидною обмеженість класичних процедур, зокрема і положень теореми Гаусса–Маркова

Зазначимо, що А.А. Марков, як і інші корифеї його доби, вірили у те, що розподіли незалежних випадкових похибок за постійних умов спостережень мають наближатись до нормального закону, як до деякої ідеальної граничної форми, що за допомогою математичних абстракцій можна відкривати "вічні" закони: закон Гаусса, закон великих чисел тощо. М. Клайн в оксфордському виданні своєї книги [Kline M., 1980] пише про те, як в наш час усвідомлена хибність подібних уявлень. Ця віра у неперехідні істини, які відкриваються за допомогою математики, яскраво висловлена у доповіді А.А. Маркова на святкуванні (!) в 1913 р. 200-річчя закону великих чисел. П.Ю. Ельясберг [El'jasberg P. E., 1983] переконливо показав, що цей закон діє лише за певних обсягів інформації – завжди є межа, після якої збільшення кількості спостережень не приводить до підвищення точності оцінок. Цю обставину відмічають й інші автори [Alimov I., 1988, Granovskaja V.A., 1990]. Поступово, з труднощами, геодезисти почали усвідомлювати нову ідею: кількість інформації – ось ключ до розуміння суті методів математичної обробки даних. За кількості спостережень $n$<25 використовуються методи мікростатистики, за 25<$n$<500 – класичні методи, а за $n$>500 починається область застосування некласичних процедур, що ґрунтуються на законі похибок Пірсона-Джеффріса. Отже, теорія тих чи інших методів обробки даних, включаючи класичний МНК, є коректною лише у межах певних обсягів вимірювальної інформації.

Є дві, ніколи не збіжні речі – це незбагненна реальність, з одного боку, а з іншого, – наше уявлення про неї – своєрідний, сповнений надій міф, який змінюється з часом і який ми конструюємо насамперед за допомогою математики. Та будь-яка теорія, яку ми творимо, якою б досконалою вона не була, існує лише для того, щоб у майбутньому бути підправленою або відкиненою під натиском нової інформації у точній відповідності із відомим висловом А. Франса [Frans A., 1957]: "…будь-яка теорія твориться і з'являється на світ тільки заради того, щоб постраждати від фактів, розсипатись на свої складові частини, розбухнути і в кінці кінців луснути, неначе повітряна кулька”. З огляду на сказане, жодних наукових істин чи законів немає – є лише тимчасові і наближені моделі, які постійно вдосконалюються або відмирають зі збільшенням інформації.

## Висновки:

1. Методи, розглянуті у цьому дослідженні, не належать до робастних процедур з тієї причини, що вагова функція, яку ми отримали, не має евристичного характеру. Вона обчислюється строго аналітично і цим перетворює робастне оцінювання у справжню науку, оскільки є чітко адаптованою до реального негауссового розподілу похибок. На відміну від робастних, такі методи доцільно означити як адаптовані ефективні процедури.

2. Область застосування розглянутих оцінок, адаптованих до закону похибок Пірсона-Джеффріса, $500<n<5000$. Верхню границю ми приблизно визначили в [Dzhun' I.V., 2012]. Особливості розподілів похибок за $n>5000$ поки що важко визначити. За попередніми дослідженнями за $n=20000$ спостерігаються симетричні розподіли з ексцесами порядку 20–23 з хвилеподібними функціями на хвостах.

3. Оцінки асиметрії і ексцесу, які обчислені для залишкових похибок в схемах МНК, є найважливішими статистиками, за допомогою яких оцінюється вплив ненормальності, бо гарантії нормальності не можна дати ніколи. Вони відіграють вирішальну роль під час оброблення спостережень і діагностики математичного моделювання, а також за врівноваження сіток, якщо кількість похибок $n>500$.

4. Розглянуті адаптовані МНК-процедури доцільно застосовувати під час оброблення геодезичних експериментів високого наукового і технічного рівня, які, як правило, відрізняються великими обсягами спостережень. Під час масових виробничих спостережень розглянута рафінована методика аналізу і використання залишкових похибок $x_i$ здебільшого не обов’язкова.

5. Із збільшенням кількості спостережень розподіли залишкових похибок $x_i$ зазвичай наближаються до закону Пірсона-Джеффріса і матимуть на порядок і навіть більше відмінні ваги. Тому значення розглянутої адаптаційної процедури МНК зростатиме разом із збільшенням обсягів спостережень у сучасних геодезичних експериментах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ


Алимов Ю.И. Методологические особенности оценивания результатов количественного химического анализа / Ю.И. Алимов, А.Б. Шаевич // Журнал аналитической химии. – 1988. – Т XLIII, №10. – С. 1893–1917.

Грановская В.А. Методы обработки экспериментальных данных при измерениях / В.А. Грановская, Т.Н. Сирай. – Л.: Энергия, 1990.

Джунь И.В. Об одном обобщении фундаментального принципа метода наименьших квадратов в связи с эволюцией представлений о законе ошибок наблюдений / Джунь Иосиф Владимирович // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2013. – №6. – С. 19–26.

Джунь И.В. Математическая обработка астрономической и космической информации при негауссовых ошибках наблюдений: автореф. дис… докт. физ.-мат. наук: 01.03.01 / И.В. Джунь. Главная астрономическая обсерватория НАН Украины. – К., 1992. – 46 с.

Новицкий П.В. Оценка погрешностей результатов измерений / П.В. Новицкий, И.А. Зограф. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 304 с.

Франс А. Книга Сюзанны. – Полное собрание сочинений. – М.: Гостехиздат, 1957. – Т.1. – С. 551–610.

Эльясберг П.Е. Измерительная информация: сколько её нужно? Как обрабатывать? – М.: Наука, 1983. – 208 с.

Dzhun I.V. About make use of Pearson`s Distvibution of Type VII for the Approximation of observation’s Errors in Astrometry // Measurement Techniques: Springer Science + Business Media. Inc. – 1992. – Vol. 35, №3. – P. 298–304.

Dzhun I.V. Pearson`s Distribution of type VII of the Errors of Satellite Laser Ranging Data.// Kinematics and Physics of Celestial Bodies. – New York: Allerton Press, Inc., 1991. – Vol.7, №3. – P. 74–84.

Dzhun I.V. Distribution of Errors in multiple large-volume observations // Measurement Techniques: Springer Sciene + Business Media. Inc. – 2012. – Vol. 55, №4. – P. 393–396.

Jeffreys H. Theory of Probabiliti. 3rd ed. – Oxford, Clarendon Press, 1983. – 459 p.

Hulme H. R., Syms L. S. T. The Law of Errors and the Combinations of Observations // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. – 1939. – 99, № 8. – P. 642–658.

Kline Morris. Mathematics. The Loss of Certainty. New York – Oxford: Oxford University Press, 1980. – 420 p.

Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions / F.R. Hampel, E.M. Ronchetti, P.J. Rousseeuw, W.A. Stahel // John Wiley & Sons, Inc. 1986 – 488 p.

И.В. ДЖУНЬ

Кафедра математического моделирования, Международный экономико-гуманитарный университет им. акад. С. Демьянчука, ул. Демьянчука 4, Ровно, Украина, 33027, e-mail: iosif-june@rambler.ru.

# О МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ, АДАПТИРОВАННОМ К ЗАКОНУ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПИРСОНА-ДЖЕФФРИСА

**Введение**. Классический метод наименьших квадратов (МНК) К. Ф. Гаусс создал, опираясь на гипотезу нормальности погрешностей наблюдений. Однако эта гипотеза, как правило, становится несостоятельной, если число многократных измерений $n > 500$. В этом случае погрешности описываются симметричным, трехпараметрическим распределением Пирсона-Джеффриса, который, как и закон Гаусса, имеет диагональную информационную матрицу, и как показали многочисленные исследования, может быть назван универсальным законом распределения погрешностей больших объемов. **Целью** данного исследования является разработка эволюционных процедур МНК, адаптированного к закону погрешностей Пирсона-Джеффриса. Методика решения этой проблемы основывается на аналитической теории весовой функции, адаптированной к результатам наблюдений, которая нами разработана. **Основным результатом** работы является то, что эта теория превращает робастное оценивание из эвристических попыток в действительную науку. **Научная новизна** исследования: впервые показано значение анализа остаточных погрешностей с точки зрения фишеровской теории оценок, что позволяет выявить зоны сингулярности весовой функции при применении МНК. **Практическая значимость:** разработан метод диагностики результатов применения МНК на основе анализа статистических кумулянт остаточных погрешностей и созданы обоснованные эволюционные процедуры для получения эффективных МНК-оценок, которые практически не изменяют классических алгоритмов обработки данных.

*Ключевые слова*: закон Гаусса; распределение Пирсона-Джеффриса; информационная матрица Фишера; аналитическая теория весовых функций.

I.V. DZHUN

Department of Mathematical Modelling, International University of Economics and Humanities named after Academician Stepan Demianchuk", 4, Demianchuk Str., Rivne, Ukraine, 33027, e-mail: iosif-june@rambler.ru.

# ABOUT THE LEAST-SQUARES METHOD, ADAPTED TO THE PEARSON-JEFFREYS LAW OF ERRORS

**Introduction**. K.F. Gausse creates the classical least-square method (LSM) based on the hypothesis of normality of the observation errors. However this hypothesis, as a rule, is uncapable, if the number of the numerous instrumentation is $n$>500. In this case the errors are described with the Pearson-Jeffreys symmetrical three-parametrical distribution, which as the Gausse law has the diagonal information matrix and one can name it as the universal distribution law of overall size errors in accordance with numerous research. **The aim** of this investigation is elaboration of evolutionary procedures of the modern update LSM adapted to the Pearson-Jeffreys law of errors. Methods of solving this problem is based on the analytic theory adapted to errors of observation weighting function that we have developed. **The basic result** of the work is that this theory transforms robust estimation from heuristic attempts into true science. **The scientific novelty of this investigation**: the meaning of the residual errors analysis was shown firstly from the Fisher's theory of estimation point of view and it allows to outline the weight functions zones of singularity when LSM using. **Practical importance:** the diagnostic technique of the results of LSM usage on the basis of analysis of statistical semi-invariant of residual errors was elaborated and well-grounded evolutional procedures for receiving of effective LSM estimations which do not change practically the data handling classical algorithms were created.

*Key words:* Gausse law; Pearson-Jeffreys distribution; Fisher's information matrix; analytical theory of weight functions.

REFERENCES

Alimov Ju., Shaevich A. B. *Metodologicheskie osobennosti ocenivanija rezul'tatov kolichestvennogo himicheskogo analiza* [Methodological features of estimation of quantitative chemical analysis]. *Zhurnal analiticheskoj himii. [Journal of Analytical Chemistry]. 1988, t. XLIII, no.10 p. 1893-1917.*

Granovskaja V. A., Siraj T. N. *Metodologicheskie osobennosti ocenivanija rezul'tatov kolichestvennogo himicheskogo analiza* [Processing methods of experimental data for measurements]. Leningrad, Energia Publ. 1990, p. 328.

Dzhun' I. V. *Ob odnom obobshhenii fundamental'nogo principa metoda naimen'shih kvadratov v svjazi s jevoljuciej predstavlenij o zakone oshibok nabljudenij* [A generalization of the fundamental principle of the method of least squares with the evolution of the laws of the observational errors]. Izvestija vuzov. Geodezija i ajerofotos#emka [Proceedings of the universities. Surveying and aerial photography]. 2013, № 6, p. 19–26.

Dzhun' I. V. *Matematicheskaja obrabotka astronomicheskoj i kosmicheskoj informatsii pri negaussovykh oshibkakh nabljudenij*. Avtoreferat Doct.Diss. [Mathematical Treatment of astronomical and space Information in non-Gaussian observation Errors. Author's abstract]. Kiev, 1992. 46 p.

Novickij P. V. *Otsenka pogreshnostej rezul'tatov izmereniyy* [Estimation of Errors of measurement Results]. Leningrad, Energoatomizdat Publ., 1991, 304 p.

Frans A. Kniga Sjuzanny. *Polnoe sobranie sochinenij* [Suzanne's book. Complete Works.]. Moscow: Gostehizdat, Publ. 1957, t.1, p. 551–610.

Jel'jasberg P.E. *Izmeritel'naja informatsija: skol'ko yeye nuzhno? Kak obrabatyvat'* ? [The measuring Information: how it should be? How to handle?]. Moscow, Nauka Publ., 1983. 208 p.

Dzhun' I. V. About make use of Pearson`s Distvibution of Type VII for the Approximation of observation's Errors in Astrometry. Measurement Techniques: Springer Science + Business Media. Inc. – 1992, vol. 35, № 3, pp.298–304.

Dzhun' I. V. Pearson`s Distribution of type VII of the Errors of Satellite Laser Ranging Data. Kinematics and Physics of Celestial Bodies,New York: Allerton Press, Inc., 1991, vol.7, №3, pp. 74–84.

Dzhun' I. V. Distribution of Errors in multiple large-volume observations. Measurement Techniques: Springer Sciene + Business Media. Inc., 2012, vol. 55, no.4, pp. 393–396.

Jeffreys H. Theory of Probabiliti. 3rd ed. Oxford, Clarendon Press, 1983, 459 p.

Hulme H. R., Syms L. S. T. The Law of Errors and the Combinations of Observations. Mon. Notic. Roy. Astron. Soc. 1939, 99, no. 8. – P. 642–658.

Kline Morris. Mathematics. The Loss of Certainty. New York. Oxford: Oxford University Press, 1980, 420 p.

Robust Statistics. The Approach Based on Influence Functions / F. R. Hampel, E. M. Ronchetti, P. J. Rousseeuw, W. A. Stahel. // John Wiley & Sons, Inc. 1986 – 488 p.

Надійшла 17.01.2014 р.