УДК 519.677: 519.17

В. Чекурін [1,2], М. Притула [3], О. Химко [4]
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
[2]Kujawy and Pomorze University in Bydgoszcz,
[3]ДК "Укртрансгаз",
[4]Національний університет "Львівська політехніка"

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ СТРУКТУРИ ГАЗОТРАНСПОРТНОЇ СИСТЕМИ

Запропоновано дворівневу модель структури газотранспортної системи, побудовану із використанням методів теорій множин і графів і зорієнтовану на створення програмного комплексу для автоматизації управління магістральними газопроводами.

Ключові слова: газотранспортна система, автоматизація управління, програмні комплекси, застосування теорії графів, модель конфігурації, граф конфігурації, структура даних.

A two-level model of the structure of a natural gas transmission system has been built with the use of methods of sets and graphs theories. The model is aimed for software intended for automation of control of the transmission system.

Key words: natural gas transmission system, control automation, software complexes, model of configuration, application of graphs theory, configuration graph, data structure.

Вступ

Для транспортування природного газу від місць його видобування до споживачів використовують газотранспортну систему (ГТС). Ця система є складним комплексом взаємозв'язаних магістральних газопроводів і підземних сховищ газу (ПСГ), оснащених компресорними станціями, трубами-перемичками, запірно-регулювальною арматурою, іншими технологічними елементами. Складові частини ГТС в сукупності утворюють цілісний інженерний об'єкт, конфігурація якого може змінюватися під час його використання, залежно від потреб постачальників і споживачів газу, умов експлуатації та технологічних вимог. Його можна зарахувати до класу нелінійних керованих динамічних систем з розподіленими параметрами, для яких характерні значні розміри та інерційність, дія розподілених і зосереджених керуючих впливів, високий ступінь невизначеності внутрішніх параметрів і зовнішніх чинників. Визначальними для функціонування системи є процеси перенесення маси, імпульсу та енергії газовими сумішами, силова та теплова взаємодія транспортованого газу з елементами ГТС, обмін масою, імпульсом і енергією з довкіллям.

Щоб ефективно керувати роботою такої глобальної системи, необхідна автоматизація технологічних процесів, роботи диспетчерської служби, служб технічного обслуговування і аварійно-ремонтної та інших підрозділів ГТС, критичних для її функціонування [1,2,3]. Цього можна досягти за допомогою комп'ютеризації роботи цих служб із використанням програмного-технічних комплексів. Робота такого комплексу ґрунтується на математичних моделях, у межах яких можна формулювати та досліджувати прямі й обернені задачі потокорозподілу в системі, прогнозувати наслідки управлінських дій, оптимізувати її конфігурацію та режими експлуатації за різними критеріями, оцінювати надійність системи та її залишковий ресурс тощо.

Важливою складовою математично-алгоритмічного забезпечення ГТС є модель її структури. Ця модель є основою для побудови моделі перенесення маси, імпульсу та енергії в системі, моделей її напружено-деформованого стану, міцності та надійності. Модель структури ГТС необхідна також для графічного відображення її конфігурації і технологічних, експлуатаційних та інших даних стосовно потреб різних груп користувачів програмного комплексу. Ця модель повинна задовольняти такі вимоги: а) відображати ГТС як гетерогенну систему з докладністю, достатньою для реалізації усіх функцій програмної системи із заданою точністю, б) враховувати змінність конфігурації ГТС під час її експлуатації, в) забезпечувати можливість створення адаптивного інтерфейсу користувача програмного комплексу, який можна налаштовувати відповідно до потреб різних груп користувачів.

Для моделювання структури ГТС використовують методи теорії графів [4]. Структуру ГТС, як взаємопов'язану систему її складових частин, подають у вигляді графа. Це дозволяє врахувати розмірну гетерогенність ГТС — наявність лінійних та вузлових елементів. Така модель є зручна для формування числових розрахункових моделей фізичних процесів в ГТС. Однак вона не відображає функціональної різнорідності елементів, представлених у моделі як вузловими, так і лінійними елементами. І вузлові і лінійні елементи ГТС можуть належати до різних категорій, які відрізняються технологічним призначенням, технічними характеристиками, умовами експлуатації тощо.

Такий підхід до моделювання структури ГТС істотно ускладнює програмну реалізацію функцій, відповідальних за врахування змін конфігурації ГТС під час її експлуатації, графічне відображення структури ГТС, вхідних даних, результатів розрахунків тощо, створення адаптивного інтерфейсу, який автоматично налаштовується відповідно до потреб різних груп користувачів. Наслідком цього є обмеженість функціональності програмної системи, побудованої на основі такого підходу.

До того ж часто буває, що для числового моделювання різних процесів в ГТС (перенесення маси, імпульсу та енергії, напружено-деформованого стану, оцінки міцності та надійності компонент і системи, загалом), а також для задач графічного відображення (структури ГТС, властивостей її компонент, вхідних даних і результатів розрахунку) необхідно використовувати моделі структури, які відображають конфігурацію ГТС з різною докладністю.

Запропоновано дворівневу модель структури ГТС, побудовану із використанням методів теорій множин і графів і зорієнтовану на створення програмно-технічних комплексів для автоматизації управління магістральними газопроводами. Модель конфігурації є верхнім рівнем моделі структури. На цьому рівні ГТС розглядається як система, що об'єднує різнорідні фізичні об'єкти — трубопроводи (лінійні елементи) та вузлові елементи різних категорій. Нижній рівень відображає лише топологію системи. Побудовані відображення, які встановлюють відповідності між об'єктами фізичної та топологічної моделей. Розглянуті структури даних для відображення в програмах фізичної і топологічної моделей.

Зауваження щодо позначень, прийнятих у статті. Щоб розрізняти об'єкти математичної моделі для позначення множин і послідовностей використовували великі рукописні літери, набрані шрифтом DECOR, їхні елементи позначали курсивним шрифтом *Times New Roman* (великими або малими літерами), звернення до елемента послідовності позначали нижнім індексом, а відображення між множинами позначали великими рукописними літерами гарнітури FRENCH SCRIPT MT (French Script MT).

Дворівнева модель структури ГТС

Розглядатимемо ГТС як систему, що об'єднує вузлові елементи різних категорій (входи, виходи, компресорні станції, розгалуження, крани тощо) та трубопроводи (лінійні елементи) різних типів (категорій). Лінійні елементи різних категорій можуть відрізнятися способом прокладання ділянки (підземна, наземна, вантовий перехід тощо), а також їхніми властивостями (діаметром труби, шорсткістю її внутрішньої поверхні, ступенем пошкодженості внутрішньої та/чи зовнішньої поверхні, станом захисної ізоляції тощо). Всі ці параметри можуть істотно впливати на процеси транспортування газу, а також на поведінку лінійних елементів за дії експлуатаційних навантажень і зовнішніх чинників, тому їх слід врахувати у структурній моделі.

Конфігурація ГТС може змінюватися впродовж циклу її життя. Кількості вузлових і лінійних елементів різних категорій та їхні параметри можуть змінюватися внаслідок відкривання/закривання кранів, введення в експлуатацію та виведення з неї об’єктів ГТС під час модернізації, планових ремонтів, аварійних ситуацій тощо. Для урахування змін конфігурації ГТС в її математичній моделі запропонована дворівнева модель структури ГТС. Перший рівень утворює модель конфігурації, яка є фізичною моделлю ГТС, натомість другий рівень — рівень топологічної моделі утворює граф конфігурації (рис. 1).

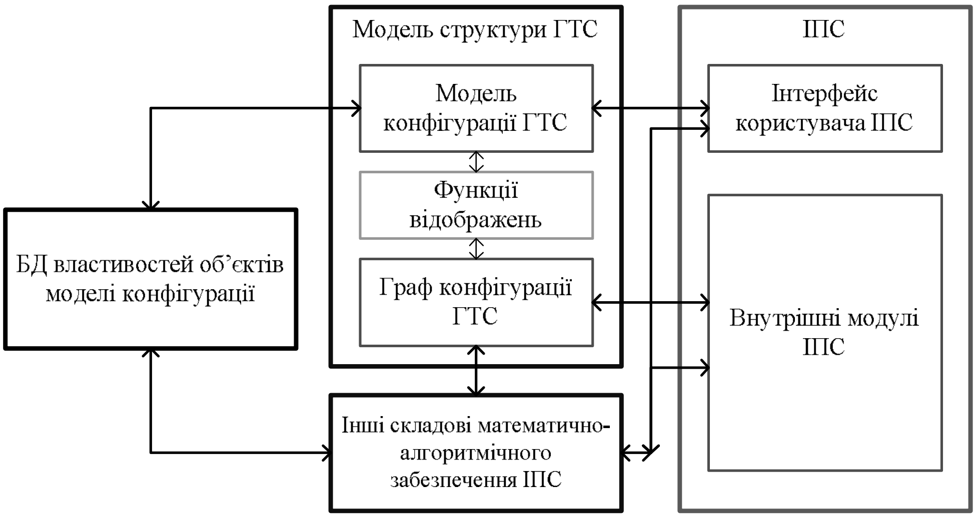

Рис. 1. Модель структури ГТС та інші складники математично-алгоритмічного забезпечення

Множину об’єктів моделі конфігурації ГТС утворює сукупність множин вузлових та лінійних елементів різних категорій (рис. 2). Технологічна схема конфігурації визначає фізичні з’єднання між лінійними і вузловими елементами ГТС, перетворюючи сукупності вузлових і лінійних елементів у зв’язну структуру.

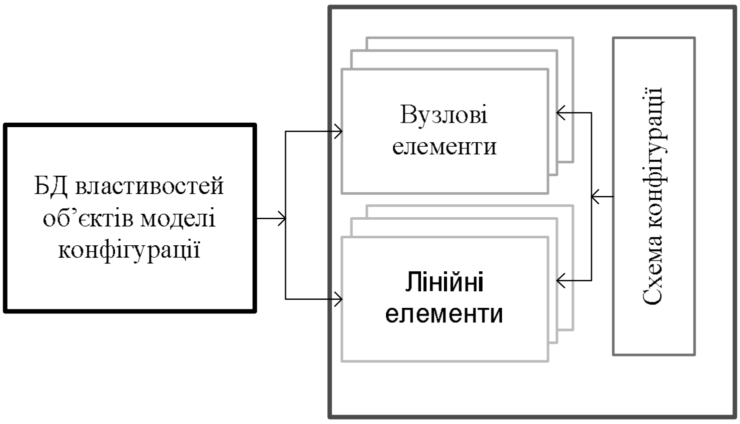

Рис. 2. Модель конфігурації ГТС

Граф конфігурації відображає топологію актуальної конфігурації ГТС. Множина його вершин формується із множини вузлових елементів, а множина ребер — із множини лінійних елементів моделі актуальної конфігурації ГТС.

Для встановлення відповідностей між об’єктами моделі конфігурації, з одного боку, вершинами і ребрами графа конфігурації, з іншого, призначений третій складник моделі структури ГТС — множина функцій відображення (рис. 1). Функції з цієї множини дозволяють: а) будувати графи конфігурації на основі моделі актуальної конфігурації, б) для будь-якого заданого графа конфігурації встановлювати відповідності між складниками цього графа і об’єктами моделі актуальної конфігурації.

Модель конфігурації ГТС і її граф

Розглянемо ГТС як тривимірну структуру взаємопов’язаних вузлових і лінійних елементів, яка сполучає множини входів $\mathsf{W} = \{W_1, W_2, \mathbf{K}, W_{n_\mathsf{W}}\}$ і виходів $\mathsf{O} = \{O_1, O_2, \mathbf{K}, O_{n_\mathsf{O}}\}$. Крім входів W і виходів O, які утворюють множину зовнішніх вузлових елементів ГТС, існують і внутрішні — компресорні станції, сховища газу, з’єднання трубопроводів тощо. Відповідно до цього поділятимемо вузли ГТС на різні категорії, залежно від їх технологічного призначення. Нехай n_N – кількість категорій вузлових елементів. Позначатимемо як n_K, де $K \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_\mathsf{N}\}$, множину вузлових елементів категорії K: $\mathsf{N}^K = \{N_1^K, N_2^K, \mathbf{K}, N_{n_K}^K\}$, де N_l^K, $l \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_K\}$ — l-тий вузловий елемент категорії K, n_K — кількість вузлових елементів категорії K. Множину категорій вузлових елементів позначатимемо C_N: $\mathsf{C}_\mathsf{N} = \{\mathsf{N}^1, \mathsf{N}^2, \mathbf{K}, \mathsf{N}^{n_\mathsf{N}}\}$. Для визначеності вважатимемо, що в множині категорій вузлових елементів C_N входам I відповідає номер $K = 1$: $\mathsf{W} = \mathsf{N}^1$, виходам — $K = n_\mathsf{N}$: $\mathsf{O} = \mathsf{N}^{n_\mathsf{N}}$ Множина усіх вузлових елементів N є сукупністю вузлових елементів різних категорій $\mathsf{N} = \bigcup_{K=1}^{n_\mathsf{N}} \mathsf{N}^K$.

Трубопроводи ГТС можуть відрізнятися способом прокладання (підземні, надземні, вантові переходи), а також за їхніми технічними характеристиками (діаметром, товщиною металу тіла труби, залишковим ресурсом шорсткістю внутрішньої поверхні тощо). Тому може бути доцільним поділити трубопроводи на різні категорії: $\mathsf{C}_\mathsf{T} = \{\mathsf{T}^1, \mathsf{T}^2, \mathbf{K}, \mathsf{T}^{n_\mathsf{T}}\}$ і нумерувати трубопроводи незалежно в межах кожної категорії: $\mathsf{T}^L = \{T_1^L, T_2^L, \mathbf{K}, T_{m_L}^L\}$, $L \in \{1, 2, \mathbf{K}, m_\mathsf{T}\}$. Тут n_T — кількість категорій трубопроводів, m_L — кількість трубопроводів категорії L. Тоді множина лінійних елементів ГТС визначається сукупністю множин лінійних елементів різних категорій $\mathsf{T} = \bigcup_{L=1}^{n_\mathsf{T}} \mathsf{T}^L$.

Сполучення вузлових і лінійних елементів ГТС визначає технологічна схема, яка відображає також категорії вузлових і лінійних елементів, їх номери в межах категорій та можливо іншу інформацію.

Отже, модель конфігурації ГТС відображає її з урахуванням гетерогенності як геометричної (наявність вузлових та лінійних елементів), так і технологічної (наявність категорій вузлових і лінійних елементів). Технологічну схему ГТС можна подати за допомогою графа $\mathsf{G} = (\mathsf{N}, \mathsf{T})$, множини вершин N і ребер T якого є структуровані сукупностями відповідних підмножин: $\mathsf{N} \leftrightarrow \mathsf{C}_\mathsf{N}$, $\mathsf{T} \leftrightarrow \mathsf{C}_\mathsf{T}$, таких, що $\mathsf{N} = \bigcup_{K=1}^{n_\mathsf{N}} \mathsf{N}^K$, $\mathsf{T} = \bigcup_{L=1}^{n_\mathsf{T}} \mathsf{T}^L$. а елементи кожної із множин N^K та T^L нумеруються незалежно: $\mathsf{N}^K = \{N_1^K, N_2^K, \mathbf{K}, N_{n_K}^K\}$, $\mathsf{T}^L = \{T_1^L, T_2^L, \mathbf{K}, T_{n_K}^L\}$. Потужності n_X та n_E множин N^K та T^L визначаються як $|\mathsf{N}| = n_\mathsf{X} = \sum_{K=1}^{n_\mathsf{N}} n_K$, $|\mathsf{T}| = n_\mathsf{T} = \sum_{L=1}^{n_\mathsf{T}} m_L$.

Топологічна модель, натомість, відображає лише геометричну гетерогенність ГТС. За цією моделлю представлятимемо ГТС у вигляді графа $G = (\mathsf{X}, \mathsf{E})$, де X та E — множини вершин та ребер графа. Множина X у цьому графі представляє усі вузлові елементи, а множина E — усі лінійні елементи моделі конфігурації і $|\mathsf{X}| = n_\mathsf{X}$, $|\mathsf{E}| = n_\mathsf{E}$

Щоб пов’язати між собою модель конфігурації та топологічну модель ГТС необхідно встановити відповідність $\mathsf{G} \to G$ між графами G та G. Для цього встановимо відповідності між множинами вузлових елементів N^K, $K \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_\mathsf{N}\}$ та множиною вершин X графа G, а також між множинами лінійних елементів T^L, $L \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_\mathsf{T}\}$ і множиною ребер графа G.

Вузлові елементи ГТС та вершини графа конфігурації

Нехай I – скінченна послідовність натуральних чисел довжиною $n_{\mathsf{X}} \equiv |\mathsf{X}| = |\mathsf{N}|$. Можна вибрати, зокрема, $\mathsf{I} = \{1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{X}}\}$. Оскільки потужності скінченних множин I та X є однакові, то між ним існують взаємно однозначні відповідності. Встановлюючи певну таку відповідність $\mathsf{X} \leftrightarrow \mathsf{I}$, здійснимо нумерацію вершин графа G. Це перетворює множину X у послідовність: $\mathsf{X} = \{X_l \ \forall l \in \mathsf{I}\}$.

Щоб відобразити множини входів W та виходів $\mathsf{0}$, на множину вершин X графа G, задамо послідовності I^{W} та I^{0} номерів вершин графа G, які відповідають входам I та виходам $\mathsf{0}$

$$\mathsf{I}^{\mathsf{W}} = \{l_1, l_2, \mathbf{K}, l_{n_{\mathsf{W}}}\},\ l_k \in \mathsf{I},\ k \in \{1, 2, \mathbf{K}\, n_{\mathsf{W}}\}. \tag{1}$$

$$\mathsf{I}^{\mathsf{0}} = \{l_1, l_2, \mathbf{K}, l_{n_{\mathsf{0}}}\},\ l_k \in \mathsf{I},\ k = 1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{0}}. \tag{2}$$

Послідовності (1), (2) визначають ін'єктивні відображення $\mathsf{N}_{\mathsf{W}} : \mathsf{W} \to \mathsf{X}$ та $\mathsf{N}_{\mathsf{0}} : \mathsf{0} \to \mathsf{X}$. Відображення N_{W} за номером $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{W}}\}$ входу $W_i \in \mathsf{W}$, а відображення N_{0} за номером виходу $k \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{0}}\}$ виходу $O_k \in \mathsf{0}$ визначають індекси (номер) $l_i, l_k \in \mathsf{I}$ відповідних їх вершин X_{l_i}, X_{l_k} у множині X вершин графа G:

$$l_i = \mathsf{N}_{\mathsf{W}}(i) \equiv \mathsf{I}_i^{\mathsf{W}},\ i \in 1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{W}},\ l_i \in \mathsf{I},\ \ l_k = \mathsf{N}_{\mathsf{0}}(k) \equiv \mathsf{I}_k^{\mathsf{0}},\ k \in 1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{0}},\ l_k \in \mathsf{I} \tag{3}$$

Оскільки за індексом $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{I}}\}$ однозначно визначається вхід $W_i \in \mathsf{W}$, а за індексом $l \in \{1, 2, \ldots, n_{\mathsf{X}}\}$ однозначно визначається вузол $X_l \in \mathsf{X}$ графа G, то відображання N_{W} встановлює відповідність між входами $W \in \mathsf{W}$ та вершинами графа, а відображення N_{0} — виходами $O \in \mathsf{0}$ та вершинами графа G

$$X = \mathsf{N}_{\mathsf{W}}(W),\ W \in \mathsf{W},\ X \in \mathsf{X},\ \ X = \mathsf{N}_{\mathsf{0}}(O),\ X \in \mathsf{X},\ O \in \mathsf{0}. \tag{4}$$

Відображення (4), діючи на множини W та $\mathsf{0}$, відповідно, визначають відповідні їм підмножини множини вершин X графа G:

$$\mathsf{N}_{\mathsf{W}}(\mathsf{W}) = \mathsf{X}^{\mathsf{W}} \equiv \{X_l \ \forall l \in \mathsf{I}^{\mathsf{W}}\}, \quad \mathsf{N}_{\mathsf{0}}(\mathsf{0}) = \mathsf{X}^{\mathsf{0}} \equiv \{X_l \ \forall l \in \mathsf{I}^{\mathsf{0}}\}. \tag{5}$$

Аналогічні послідовності введемо і для інших категорій вузлових елементів моделі конфігурації. У загальному випадку позначимо I^K послідовність номерів вершин графа G, які відповідають вузловим елементам категорії N^K моделі конфігурації:

$$\mathsf{I}^K = \{l_1, l_2, \mathbf{K}, l_{n_K}\},\ l_i \in \mathsf{I},\ i = 1, 2, \mathbf{K}, n_K,\ K = 1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{N}}. \tag{6}$$

Послідовність (6) визначає відображення N_K, яке за номером $i \in \{1, 2, \mathbf{K}, n_K\}$ вузлового елемента $N_i \in \mathsf{N}^K$ категорії K визначає індекс (номер) $l \in \mathsf{I}$ відповідної йому вершини X_l у множині X вершин графа G:

$$l = \mathsf{N}_K(i) \equiv \mathsf{I}_i^K,\ i = 1, 2, \mathbf{K}, n_K,\ K = 1, 2, \mathbf{K}, n_{\mathsf{N}},\ l \in \mathsf{I}, \tag{7}$$

а відтак — ставить у відповідність будь-якому вузловому елементові $N_i \in \mathsf{N}^K$ моделі конфігурації G вершину $X_l \in \mathsf{X}$ графа G

$$X = \mathsf{N}_K(N),\ N \in \mathsf{N}^K,\ X \in \mathsf{X}, \tag{8}$$

Відображення N_K, діючи на множину N^K, виділяє в множині вершин X графа G відповідну підмножину

$$\mathsf{N}_K(\mathsf{N}^K) = \mathsf{X}^K \equiv \{X_l \ \forall l \in \mathsf{I}^K\}, \tag{9}$$

Множина відображень $\mathsf{N} = \{\mathsf{N}_K, K = 1,2,\mathbf{L}, n_{\mathsf{N}}\}$ утворює відображення, яке будь-якому вузловому елементу $N_i \in \mathsf{N}^K$ певної категорії ставить у відповідність одну і тільки одну вершину $X_l \in \mathsf{X}$ топологічної моделі G:

$$X_\kappa = \mathsf{N}(N_i, K). \tag{10}$$

Кожне із відображень N_K є ін'єкцією із множини N_K вузлових елементів ГТС категорії K у множину X і, водночас, бієкцією між цією категорією та відповідною їй підмножиною X_K:

$$\mathsf{N}^K \xrightarrow{\mathsf{N}_K} \mathsf{X}, \quad \mathsf{N}^K \xleftrightarrow{\mathsf{N}_K} \mathsf{X}^K \subset \mathsf{X} \tag{12}$$

Тому для кожного N_K, $K = 1,2,\mathbf{K} n_{\mathsf{N}}$ існує обернене відображення N_K^{-1}, яке для будь-якого елемента $X \in \mathsf{X}_K = \mathsf{N}_K(N_K)$ повертає вузловий елемент ГТС $N \in \mathsf{N}_K$ із категорії K, і, діючи на підмножину X^K, повертає множину вузлових елементів відповідної категорії:

$$N_i = \mathsf{N}_K^{-1}(X_l), \ X_l \in \mathsf{X}^K, \ N_i \in \mathsf{N}^K, \ \ \mathsf{N}_K = \mathsf{N}_K^{-1}(\mathsf{X}^\mathsf{K}) \tag{13}$$

Відображення (13) реалізується шляхом визначення індексу i елемента зі значенням l у послідовності I^K:

$$\mathsf{N}_K^{-1}: \ X_l \to N_i \,| \ \ \mathsf{I}_i^K = l, \tag{14}$$

що здійснюється шляхом простого перебору і вимагає затрат часу, пропорційних n_K.

Оскільки підмножини $\mathsf{X}^K, K = 1,2,\mathbf{K}, n_{\mathsf{N}}$ взаємно не перетинаються: $\mathsf{X}^K \mathbf{I} \mathsf{X}^L = \varnothing \ \forall K, L \in \{1,2,\mathbf{K} n_{\mathsf{N}}\}, L \neq K$, а їх сукупність утворює множину X усіх вершин графа G: $\mathbf{U}_{K=1}^{n_{\mathsf{N}}} \mathsf{X}^K = \mathsf{X}$, то існує відображення N^{-1}, яке будь-якій вершині $X_l \in \mathsf{X}$ графа G ставить у відповідність один і тільки один вузол ГТС $N_i \in \mathsf{N}^K$ ї категорії K ,такий що $\mathsf{N}_K(N_i) = X_l$:

$$\mathsf{N}^{-1}(X_l) = N_i \in \mathsf{N}^K \tag{15}$$

Відображення N^{-1} найпростіше реалізувати алгоритмічно пошуком послідовності $\mathsf{I}^K, K = 1,2,\mathbf{K}, n_{\mathsf{N}}$, яка містить елемент зі значенням $l \in \mathsf{I}$, і визначення його індексу $i \in [1,2,\mathbf{K}, N_K]$ в цій послідовності

$$\mathsf{N}^{-1}: \ l \to (K, i) | \ \ K \in \{1,2,\mathbf{K}, n_{\mathsf{N}}\}, i \in \{1,2,\mathbf{K}, n_K\}, \ \mathsf{I}_i^K = l \in \mathsf{I} \tag{16}$$

Відтак за знайденим K однозначно визначається послідовність I^K, категорія вузлів N^K і відповідна їй підмножина $\mathsf{X}^K = \mathsf{N}_K(\mathsf{N}^K)$, а за знайденим i визначається вузловий елемент у цій категорії $N_i = \mathsf{N}_i^K$, чим встановлюється взаємно однозначна відповідність (15).

Цей алгоритм здійснюється простим перебором і вимагає затрат часу, пропорційних потужності n_{X} множини X.

Відображення N, разом із оберненим N^{-1}, встановлює взаємно-однозначну відповідність між структурованою на категорії C_{N} множиною вузлових елементів $\mathsf{N} \in \mathsf{G}$ моделі конфігурації та множиною вершин $\mathsf{X} \in G$ топологічної моделі, а відтак структурує множину X відповідно до структури множини $\mathsf{N} \in \mathsf{G}$ і встановлює взаємно-однозначну відповідність між категоріями вершин $\mathsf{C}_{\mathsf{X}} = \{\mathsf{X}^1, \mathsf{X}^2, \mathbf{K}, \mathsf{X}^{n_{\mathsf{N}}}\}$ і вузлових елементів: $\mathsf{C}_{\mathsf{X}} \xleftrightarrow{\mathsf{N}} \mathsf{C}_{\mathsf{N}}$

Лінійні елементи ГТС та ребра графа конфігурації

Будь-яке ребро $E \in \mathsf{E}$ графа G задається парою вершин $X_1, X_2 \in \mathsf{X}$, які воно стягує: $E = (X_1, X_2)$. Оскільки нумерація елементів множини X перетворює її у послідовність, то будь-яке ребро можна задати парою натуральних чисел $(i, j) = E_{ij} \subset \mathsf{E}$. Введемо послідовність пар натуральних чисел довжиною :

$$\mathsf{J}^{\mathsf{E}} = \left\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \mathbf{L}\,(i_\kappa, j_\kappa), \mathbf{K}, \left(i_{n_\mathsf{E}}, j_{n_\mathsf{E}}\right)\right\},\ i_k, j_k \in \mathsf{I}\,. \tag{17}$$

Обидва елементи i та j будь-якої пари $(i, j) \in \mathsf{J}^{\mathsf{E}}$ є номери відповідних вузлів: $i, j \in \mathsf{I}$, які вибрані так, що існує взаємно-однозначна відповідність

$$\mathsf{J}^{\mathsf{E}} \leftrightarrow \mathsf{E} \tag{18}$$

Відображення (18) можна встановити двома способами — за елементами послідовності J^{E} тоді множина E визначається як :

$$\mathsf{E} = \left\{E_{ij}\ \forall (i, j) \in \mathsf{J}^{\mathsf{E}}\right\}, \tag{19}$$

або за їхніми індексами, тоді

$$\mathsf{E} = \left\{E_\kappa\ \forall \kappa \in \mathsf{J}\right\} \tag{20}$$

Послідовність J^{E} встановлює однозначне відображення E між індексами $\kappa \in \mathsf{J} \equiv \left\{1, 2, \mathbf{K}, n_\mathsf{E}\right\}$ та відповідними елементами

$$\mathsf{E}:\ \kappa \to (i, j) = \mathsf{J}^{\mathsf{E}}_{\kappa}, \tag{21}$$

Якщо граф G не містить паралельних ребер, то відображення (21) є взаємно однозначне. У цьому випадку обернене до E однозначне відображення E^{-1} ставить у відповідність будь-якій парі $(i, j) \in \mathsf{J}^{\mathsf{E}}$ одне і тільки одне натуральне число $\kappa \in \mathsf{J}$:

$$\mathsf{E}^{-1}:\ (i, j) \to \kappa \,|\ J^{\mathsf{E}}_{\kappa} = (i, j) \in \mathsf{I} \times \mathsf{I} \tag{22}$$

Відображення (21) можна реалізувати програмно, наприклад, шляхом звернення до елемента масиву, який представляє послідовність J^{E}, за індексом цього елемента. Відображення (22) легко реалізувати алгоритмічно шляхом пошуку у послідовності J^{E} заданого елемента (i, j) і визначення його індексу κ в цій послідовності. Це можна виконати шляхом простого перебору, який вимагає затрат часу, пропорційних n_E.

За наявності паралельних ребер відображення (21) зберігає однозначність, натомість (22) повертає декілька значень:

$$\mathsf{E}^{-1}:\ (i, j) \to \left\{\kappa_l, l = 1, 2, \mathbf{K}, m_{(i,j)}\right\} |\ J^{\mathsf{E}}_{\kappa_l} = (i, j),\ l = 1, 2, \mathbf{K}, m_{(i,j)} \tag{23}$$

де $m_{(i,j)}$ — кількість ребер, які стягують вершини i та j.

Відображення E та E^{-1} дозволяють встановлювати відповідності між ребрами в одно- та дво-індексних позначення. За відсутності в графі G паралельних ребер:

$$E_k = E_{ij} \mid (i, j) = \mathsf{E}(\kappa),\quad E_{ij} = E_\kappa \mid \kappa = \mathsf{E}^{-1}(i, j) \tag{24}$$

Щоб пов'язати трубопроводи з ребрами графа конфігурації, введемо для кожної категорії T^K, $K = 1, 2, \mathbf{L}, m_K$ послідовність J^K, яка містить номери ребер графа G, що відповідають трубопроводам $T \in \mathsf{T}^K$:

$$\mathsf{J}^K = \left\{\kappa_1, \kappa_2, \mathbf{K}, \kappa_{m_K}\right\}\ \kappa_i \in \mathsf{J},\ i = 1, 2, \mathbf{K}, m_K\,. \tag{25}$$

Множини елементів різних послідовностей J^K взаємно не перетинаються; $\mathsf{J}^K\ \mathbf{I}\ \mathsf{J}^L = \varnothing,\ \forall K, L \in \left\{1, 2, \mathbf{K}\, n_\mathsf{T}\right\}$, а їх об'єднання утворюють множину усіх індексів ребер: $\mathop{\mathbf{U}}\limits_{K=1}^{n_\mathsf{T}} \mathsf{J}^K = \mathsf{J}$. Кожна із послідовностей J^K вводить відображення P_K, яке за номером $i \in \left\{1, 2, \mathbf{K}, m_K\right\}$

трубопроводу певної категорії $T_i \in \mathsf{T}^K$ визначає номер $\kappa \in \left[1,2,\mathbf{K},N_{\mathsf{E}}\right]$ відповідного йому ребра $E_\kappa \in \mathsf{E}$: $\kappa = \mathsf{P}_K(i)$. Оскільки за індексом i однозначно визначається трубопровід $T_i \in \mathsf{T}^K$, а за індексом κ однозначно визначається ребро E_κ, то відображення P_K встановлює відповідність

$$E_\kappa = \mathsf{P}_K(T_i),\ \ T_i \in \mathsf{T}^K, \tag{26}$$

а відтак визначає підмножину ребер $\mathsf{E}^K \subset \mathsf{E}$, відповідну множині трубопроводів T^K:

$$\mathsf{E}^K = \mathsf{P}_K\left(\mathsf{T}^K\right) = \left\{E_\kappa\ \forall\kappa \in\ \mathsf{J}^K\right\},\ \ K = 1,2,\mathbf{K},n_{\mathsf{T}} \tag{27}$$

Відображення P_K є бієкціями між множинами T^K та E^K, тому існують обернені відображення P_K^{-1}

$$\mathsf{P}_K^{-1}(E_\kappa) = T_i:\ T_i \in \mathsf{T}^K \wedge \mathsf{P}_K(i) = \kappa,\ \ K = 1,2,\mathbf{K},N^{\mathsf{T}} \tag{28}$$

Множина $\mathsf{P} = \left\{\mathsf{P}_K\ K = 1,2,\mathbf{K},n_{\mathsf{T}}\right\}$ утворює відображення, яке будь-якому лінійному елементу $T_i \in \mathsf{T}^K$, , $i \in \{1,2,\mathbf{K},n_K\}$ певної категорії $K \in \{1,2,\mathbf{K},n_{\mathsf{T}}\}$ ставить у відповідність одне і тільки одне ребро $E_\kappa \in \mathsf{E}$: $E_\kappa = \mathsf{P}(T_i,K)$

Множини E^K взаємно не перетинаються: $\mathsf{E}^K\ \mathbf{I}\ \mathsf{E}^L = \varnothing\ \forall K,L \in \{1,2,\mathbf{K},n_{\mathsf{T}}\}, K \neq L$ і в сукупності утворюють множину E: $\mathbf{U}_{K=1}^{n_{\mathsf{T}}}\mathsf{E}^K = \mathsf{E}$. Це забезпечує існування відображення P^{-1}, яке будь-якому ребру $E_\kappa \in \mathsf{E}$ графа конфігурації G ставить у відповідність пару (T_i,i), яка містить лінійний елемент $T_i \in \mathsf{T}^K$ певної категорії $K \in \{1,2,\mathbf{K},n_{\mathsf{T}}\}$ і номер трубопроводу $i \in \{1,2,\mathbf{K}\,m_K\}$ в цій категорії:

$$\mathsf{P}^{-1}(E_\kappa) = \left(T_i \,|\, \mathsf{P}_K(T_i) = E_\kappa, i \,|\ \mathsf{J}_i^K = \kappa\right). \tag{29}$$

Алгоритм реалізації відображення (29) включає пошук серед J^1, J^2, …, $\mathsf{J}^{n_{\mathsf{T}}}$, такої послідовності J^K, яка містить елемент зі значенням κ. Це легко здійснити послідовним перебору елементів цих послідовностей. Номер знайденого елемента $i = \mathsf{P}_K^{-1}(\kappa)$ в послідовності J^K є номером трубопроводу в категорії T^K, який відповідає ребру E_κ

Відображення P, разом із оберненим P^{-1}, встановлює взаємно-однозначну відповідність між структурованою за категоріями C_{T} множиною лінійних елементів $\mathsf{T} \in \mathsf{G}$ моделі конфігурації та множиною ребер $\mathsf{E} \in G$ топологічної моделі, а відтак структурує множину T відповідно до структури множини T і встановлює взаємно-однозначну відповідність між категоріями ребер $\mathsf{C}_{\mathsf{E}} = \left\{\mathsf{E}^1,\mathsf{E}^2,\mathbf{K},\mathsf{E}^{n_{\mathsf{E}}}\right\}$ і лінійних елементів: $\mathsf{C}_{\mathsf{E}} \xleftrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{C}_{\mathsf{T}}$.

Структури даних моделі

Граф G топологічної моделі цілком визначається послідовністю J^{E}. Для її відображення в пам’яті комп’ютера можна використати структуру

$$\mathsf{J}^{\mathsf{E}}(G):\ \textbf{array}\left[1..N_{\mathsf{E}}\right]\textbf{of record}\ i, j:\left[1..N_{\mathsf{X}}\right]\textbf{end record}$$

яка вимагає пам’яті порядку $O\left(2n_{\mathsf{E}}\right)$

Використовуючи $\mathsf{J}^{\mathsf{E}}(G)$, можемо розрахувати й інші структури для числового відображення графа G, зокрема матрицю суміжності $\mathsf{A}(G)$ та матрицю інциденцій $\mathsf{B}(G)$.

Обмежимося тут випадком неорієнтованого графа G, в якому відсутні паралельні ребра.

Елементи a_{ij} матриці суміжності визначаються у цьому випадку через елементи множини E ребер графа як [5]:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\ \forall i, j : \left(E_{ij} \in \mathsf{E} \vee E_{ji} \in \mathsf{E} \right) \\ 0\ \forall i, j : \left(E_{ij} \notin \mathsf{E} \wedge E_{ij} \notin \mathsf{E} \right) \end{cases} \tag{30}$$

Для представлення матриці суміжності в комп'ютері можна використати двовимірний масив даних

$$\mathsf{A}\,(G) : \mathbf{array}\left[1..N_{\mathsf{X}}, 1..N_{\mathsf{X}}\right] \mathbf{of}\ 0..1$$

який вимагає пам'яті порядку $O\left(n_{\mathsf{X}}{}^2\right)$.

Елементи цієї матриці легко обчислити, використовуючи структуру $\mathsf{J}^{\mathsf{E}}(G)$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1\ \forall (i, j) \in \mathsf{J}^{\mathsf{E}} \vee \forall (j, i) \in \mathsf{J}^{\mathsf{E}} \\ 0\ \forall (i, j) \notin \mathsf{J}^{\mathsf{E}} \wedge \forall (j, i) \notin \mathsf{J}^{\mathsf{E}} \end{cases} \tag{31}$$

Обчислення за формулою виконуються для кожної пари ij простим перебором і вимагають затрат часу порядку $O\left(n_{\mathsf{E}}\right)$.

Матриця інциденцій — прямокутна $n_{\mathsf{X}} \times n_{\mathsf{E}}$-матриця $\mathsf{B} = \left\{ b_{i\kappa} \in \{0,1\}, \forall i \in \mathsf{I}, \forall \kappa \in \mathsf{J} \right\}$, рядок $b_{i\kappa}$ визначає множину $\mathsf{E}^{(i)}$ ребер, інцидентних до вершини X_i [5]. Для представлення матриці B в комп'ютері можна використовувати двовимірний масив даних вигляду [5]

$$\mathsf{B}(G):\ \mathbf{array}\left[1..n_{\mathsf{X}}, 1..n_{\mathsf{E}}\right] \mathbf{of}\ 0..1,$$

який вимагає пам'яті порядку $O\left(n_{\mathsf{X}} n_{\mathsf{E}}\right)$

Щоб побудувати матрицю інциденцій $\mathsf{B}(G)$, враховуючи структуру $\mathsf{J}^{\mathsf{E}}(G)$, необхідно визначити множину $\mathsf{E}^{(i)}$ для кожної вершини $X_i \in \mathsf{X}$ графа G. Використовуючи відображення E^{-1}, обчислимо спочатку множину індексів цих ребер

$$\mathsf{J}^{(i)} = \left\{ \kappa = \mathsf{E}^{-1}(i, j)\ \ \forall j \in \mathsf{I}^{(i)} \right\}. \tag{32}$$

а відтак визначимо множини $\mathsf{E}^{(i)}$: $\mathsf{E}^{(i)} = \left\{ E_\kappa\ \forall \kappa \in \mathsf{J}^{(i)} \right\}$,

Використовуючи множини $\mathsf{J}^{(i)}$ або $\mathsf{E}^{(i)}$ легко побудувати матрицю інциденцій $\mathsf{B}(G)$ неорієнтованого графа:

$$b_{i\kappa} = \begin{cases} 1\ \forall i, \kappa \,|\, \left(i \in \mathsf{I}_{\mathsf{X}} \wedge \kappa \in \mathsf{J}^{(i)} \right) \\ 0\ \forall i, k \,|\, \left(i \in \mathsf{I}_{\mathsf{X}} \wedge \kappa \notin \mathsf{J}^{(i)} \right) \end{cases}, \text{ або }\ b_{i\kappa} = \begin{cases} 1\ \forall i, \kappa \,|\, \left(i \in \mathsf{I}_{\mathsf{X}} \wedge E_\kappa \in \mathsf{E}^{(i)} \right) \\ 0\ \forall i, k \,|\, \left(i \in \mathsf{I}_{\mathsf{X}} \wedge E_\kappa \notin \mathsf{E}^{(i)} \right) \end{cases} \tag{33}$$

Зазначимо, що матрицю інциденцій $B(G)$ також можна обчислити безпосередньо із послідовності J^{E} за допомогою відображення E:

$$b_{i\kappa} = \begin{cases} 1\ \ \forall i \in \mathsf{I} \vee \forall \kappa \in \mathsf{J} \,|\, \mathsf{J}^{\mathsf{E}}_{\kappa,2} = i \vee \mathsf{J}^{\mathsf{E}}_{\kappa,1} = i \\ 0\ \ \forall i \in \mathsf{I} \vee \forall \kappa \in \mathsf{J} \,|\, \mathsf{J}^{\mathsf{E}}_{\kappa,1} \neq i \wedge \mathsf{J}^{\mathsf{E}}_{\kappa,2} \neq i \end{cases} \tag{33}$$

Побудова матриці інциденцій за формулою (32) здійснюється за рядками цієї матриці: для кожної вершині $X_i \in \mathsf{X}$ спочатку будується множина $\mathsf{E}^{(i)}$ ребер інцидентних до цієї вершини, а відтак визначаються нульові і одиничні елементи у рядку, що відповідає цій вершині. Для цього використовується відображення E^{-1}, яке реалізується простим перебором послідовності J^{E}. Тож побудова $\mathsf{J}^{(i)}$ для одного вузла вимагає затрат часу порядку $O\left(n_{\mathsf{X}} n_{\mathsf{E}}\right)$, а побудова множин $\mathsf{J}^{(i)}$

для усіх вузлів — $O\left(n_X{}^2 n_E\right)$. Побудова матриці інциденцій за формулою (33) здійснюється, натомість, за стовпцями з використанням відображення E, яке реалізується за допомогою звернення до елементу масиву за його індексом. Це вимагає набагато менших затрат часу.

Висновки

Запропонована дворівнева модель структури ГТС зорієнтована на створення програмних комплексів для автоматизації управління газотранспортною системою. Складова вищого рівня — модель конфігурації — відображає конфігурацію ГТС як сукупність різнорідних за своєю фізичною природою і технологічним призначенням вузлових та лінійних елементів різних категорій. Модель другого рівня враховує лише геометричну (розмірну) гетерогенність ГТС і представляється у вигляді графа, який відображає топологію ГТС як сукупності вершин і ребер. Отже, у запропонованій моделі розрізняються об’єкти фізичної та топологічної моделей ГТС. Побудовані відображення, які встановлюють відповідності між об’єктами цих моделей та самими моделями. Такий підхід дасть змогу розмежувати в програмному середовищі області видимості змінних, які відповідають об’єктам фізичної та топологічної моделей. Змінні першого рівня можна зробити доступними лише на рівні інтерфейсу користувача, а змінні другого рівня — лише у внутрішніх модулях системи. Завдяки цьому користувач отримує широкі можливості для модифікації моделі конфігурації: додавання та видалення об’єктів фізичної моделі, незалежної нумерації об’єктів різних категорій, застосовування різних геометричних примітивів та кольорів для їхнього графічного відображення, простої трансформації схем з’єднання тощо. Об’єкти моделей структури першого і другого рівня можна представляти в комп’ютері за допомогою простих структур даних, які не вимагають значних об’ємів пам’яті, а відображення, які встановлюють відповідності між рівнями моделі, можна реалізувати за допомогою швидких алгоритмів, які ґрунтуються на простому переборі.

1. Химко М.П., Фролов В. А.., Павленко В.А., П’янило Я.Д., Притула Н.М. Розрахунок параметрів газотранспортних систем. // Наук.-виробн. журн. України “Нафтова и газова промисловість”. – 2006. – №3. – С. 33–37. 2. Чекурін В. Ф. До побудови програмної системи для моделювання та оптимізації процесів транспортування природного газу// Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2007. – №5. – С. 158–169. 3. Herran-Gonzalez A., De La Cruz J. M., De Andres-Toro B, and Risco-Martın J. L. Modeling and simulation of a gas distribution pipeline network// Applied Mathematical Modelling, 33(3):1584–1600,2009. 4. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. 5. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000.