УДК 621.391

Ю.В. Флейта
Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова,
М.М. Євсюк
Луцький національний технічний університет

СИНТЕЗ ЗАДАНОЇ КОРЕЛЯЦІЙНОЇ ФУНКЦІЇ НА ОСНОВІ КОМБІНОВАНОГО УЗАГАЛЬНЕНОГО ГАУССОВОГО ІМПУЛЬСУ

Розглянуто метод оптимального синтезу сигналів із великою відносною смугою або несинусоїдальних сигналів із заданими кореляційними функціями на основі комбінованого узагальненого гауссового імпульсу. Суть методу полягає у визначенні параметрів знайденої зваженої функції, на яку множиться узагальнений гауссів імпульс. Запропонований метод може бути застосований і до сигналів інших класів.

Method of optimal synthesis of signals with wide relative band or non-sinusoidal signals with preset correlation functions on the basis of combined generalized Gaussian impulse is considered. The essence of the method lies in determination of the parameters of the found main function by which combined generalized Gaussian impulse is multiplied. The offered method may be applied to the signals of other classes.

Постановка завдання

Загальноприйнятим способом прийому імпульсу або кодової послідовності відомого виду є визначення взаємної кореляційної функції прийнятого і еталонного сигналів. Тому задача синтезу сигналів із заданими кореляційними функціями є актуальною [1–6]. Відомі з літератури методи синтезу сигналів із заданими кореляційними функціями можна поділити на оптимальні та неоптимальні, або емпіричні. Оптимальні методи полягають у визначенні екстремумів відповідних функціоналів, що описують критерії якості. Суть емпіричних методів полягає у розгляді певного класу сигналів, визначення для них кореляційних функцій і наступному вибору найкращої кореляційної функції у розглянутому класі. Недоліком розглянутих в літературі оптимальних методів синтезу кореляційних функцій є неоднозначність розв'язання задачі синтезу. Синтез кореляційної функції зводиться до визначення відповідного спектра потужності, за яким потім потрібно знайти один із сигналів, що має такий самий спектр потужності. Щодо сигналів з великою відносною смугою або несинусоїдальних сигналів в літературі розглядалися неоптимальні методи синтезу [6], а оптимальний синтез таких сигналів із заданими кореляційними функціями до цього часу не розглядався.

Мета роботи – розроблення оптимального методу синтезу сигналів з великою відносною смугою з заданими кореляційними функціями на основі комбінованого узагальненого гауссового імпульсу, що приводить до однозначного розв'язку задачі синтезу.

Синтез заданої кореляційної функції

Комбінованим узагальненим гауссовим імпульсом називатимемо функцію

$$x(t) = \sum_i \varphi(\beta_i) s(t, \beta_i), \tag{1}$$

де $s(t, \beta_i)$ – узагальнений гауссів імпульс з параметром β_i; $\varphi(\beta_i)$ – зважена функція $(-1 \le \beta \le 1)$.

Узагальненим гауссовим імпульсом називається сигнал, спектр якого знаходиться за виразом

$$F(\omega) = \exp\{-\lambda[|\omega|^{\alpha} - j\omega B(\omega, \alpha, \beta)]\} \text{ [7]}, \tag{2}$$

де дійсні параметри змінюються у межах: $0<\alpha\leq 2$, $|\beta|\leq 1$, $\alpha>0$ і

$$B(\omega,\alpha,\beta)=\begin{cases}|\omega|^{\alpha-1}\beta\, tg\left(\dfrac{\lambda\pi}{2}\right), & \alpha\neq 1,\\ -\beta\dfrac{2}{\pi}\ln|\omega|, & \alpha=1.\end{cases}$$

Якщо параметр β_i приймає неперервне значення на інтервалі (-1, 1), то вираз (1) може бути представлений у вигляді інтеграла по β замість суми по i, тобто

$$x(t)=\int_{-1}^{1}\varphi(\beta)\, s(t,\beta)\, d\beta. \tag{3}$$

Для комбінованого узагальненого гауссового імпульсу (3) кореляційна функція визначається так:

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,x(t-\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\, s(t,\xi)\,\varphi(\theta)\, s(t-\tau,\theta)\,d\theta\, d\xi\, dt\ . \tag{4}$$

Визначивши перетворення Фур'є для обох частин виразу (4), отримаємо

$$R(\omega)=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,F(\omega,\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1}\varphi(\theta)\,F^{*}(\omega,\theta)\,d\theta,\quad \text{де}\quad R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\ . \tag{5}$$

Нехай $R(\omega)=[a(\omega)+jb(\omega)]\cdot[a(\omega)-jb(\omega)]$. Тоді є рівності

$$K(\omega)=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)F(\omega,\xi)d\xi,\qquad K^{*}(\omega)=\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)F^{*}(\omega,\xi)d\xi,$$

де $K(\omega)=a(\omega)+jb(\omega)$. (6)

Отже, отримаємо у математичну постановку задачі синтезу: знайти зважену функцію $\varphi(\beta)$ за заданої функції $R(\omega)$ (або $R(\tau)$) таку, щоб вона відповідала рівнянню (6) (або (4)).

Розглянемо випадок, коли функція $K(\omega)$ задається в дискретному вигляді, тобто вираз (6) запишеться у вигляді

$$[K(\omega_k)]_{k=0}^{N-1}=\int_{-1}^{1}\varphi(\beta)\exp\left\{-\lambda\left[|\omega|^{\alpha}-j\omega|\omega|^{\alpha-1}tg\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)\beta\right]\right\}d\beta,\quad \alpha\neq 1,\alpha\neq 2. \tag{7}$$

Поставлену задачу можна розв'язувати, використовуючи метод розв'язку тригонометричної $(-L,L)$-проблеми моментів Маркова [8]. Нехай

$$\psi(\theta)=\varphi(\beta)\Big|_{\beta=\frac{\theta}{\pi}-1},\quad c_k(\omega)=aK(\omega_k)F^{-1}(\omega,-1), \tag{8}$$

де $[K(\omega_k)]_{k=0}^{N-1}$ – задана послідовність; a – постійне число. При цьому вираз (7) може бути записаний у вигляді $\quad c_k=a\int_{0}^{2\pi}\psi(\theta)e^{jk\theta}d\theta,\quad k=0,1,\ldots,N-1,$ (9)

де $\quad k=\dfrac{\lambda}{\pi}\omega_k\,|\omega_k|^{\alpha-1}tg(\dfrac{\pi}{2}\alpha);\qquad c_k=c_k(\omega);\qquad \omega_k=\begin{cases}\left[\dfrac{\pi k}{\lambda tg(\frac{\pi}{2}\alpha)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}, & \alpha<1,\\ \left[\dfrac{-\pi k}{\lambda tg(\frac{\pi}{2}\alpha)}\right]^{\frac{1}{\alpha}}, & \alpha>1\end{cases}.$

Вираз (9) є канонічним поданням для тригонометричної $(-L, L)$-проблеми моментів.

Припустимо, що послідовність c_k, $k = 0, 1, ..., N-1$ задається формулою

$$c_k = b\sum_{m=0}^{N-1} \gamma_m e^{j\frac{2\pi}{N}mk}, \quad k = 0,1,...,N-1, \quad \text{де } b \text{ – постійне число.} \tag{10}$$

Нехай
$$\Phi(z) = \exp[\int_0^{2\pi} \frac{e^{-jz}+z}{e^{-jz}-z} \cdot \psi(\theta)d\theta]. \tag{11}$$

Розкладаючи праву частину виразу (11) в ряд за степенем z, отримаємо

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \exp[\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta] + 2\sum_{m=1}^{\infty} z^m [\exp(\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta)\int_0^{2\pi} \psi(\theta)e^{jm\theta}d\theta] = \\ &= \exp[\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta] + 2\sum_{m=1}^{\infty} z^m [\exp(\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta)]\frac{c_m}{a}z^m.\end{aligned} \tag{12}$$

Неважко помітити, що для будь-якого z існує рівність

$$b\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k \frac{e^{-j\xi_k}+z}{e^{-j\xi_k}-z} = b\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k + 2\sum_{m=1}^{\infty} z^m \left(b\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k e^{j\xi_k m}\right) = b\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k + 2\sum_{m=1}^{\infty} c_m z^m, \text{ де } \xi_k = \frac{2\pi k}{N}. \tag{13}$$

Припустимо, що $a = \exp[\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta]$, $b = \exp[\int_0^{2\pi} \psi(\theta)d\theta](\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k)^{-1}$.

Тоді з виразів (11), (12) і (13) випливає:

$$\exp[\int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\theta}+z}{e^{-j\theta}-z}\psi(\theta)d\theta] = b\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k \frac{e^{-j\frac{2\pi k}{N}}+z}{e^{-j\frac{2\pi k}{N}}-z}. \tag{14}$$

Функція $\Phi(z) = b\sum_{k=0}^{N-1}\gamma_k \frac{e^{-j\frac{2\pi k}{N}}+z}{e^{-j\frac{2\pi k}{N}}-z}$ є суто уявною за $z = e^{-jt}$, тому що кожна складова є уявною функцією і має полюс $z = \exp(-j2\pi k/N$. Тому вона має таких N коренів $\exp(-jn_k)$, які перетинаються по одиничному колу з $\exp(-j2\pi k/N$: $\xi_0 < \eta_0 < \xi_1 < ... < \xi_{N-1} < \eta_{N-1} < \xi_0 + 2\pi.$

У такий спосіб вираз (14) можна записати у вигляді

$$\exp[\int_0^{2\pi} \frac{e^{-j\theta}+z}{e^{-j\theta}-z}\psi(\theta)d\theta] = c\prod_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-j\frac{\eta_k}{2}} - e^{j\frac{\eta_k}{2}}z}{e^{-j\frac{\xi_k}{2}} - e^{j\frac{\xi_k}{2}}z}, \tag{15}$$

де c – постійне число.

Як відомо [9], задана послідовність $[c_k]_{k=0}^{N-1}$ допускає представлення (9) у вигляді функції

$$\psi(\theta) = -sign\prod_{k=0}^{N-1} \sin\frac{\theta-\xi_k}{2}\sin\frac{\theta-\eta_k}{2}.$$

У результаті знаходимо зважену функцію $\varphi(\beta)$ у вигляді

$$\varphi(\beta) = -sign\prod_{k=0}^{N-1} \sin\frac{\pi(\beta+1)-\xi_k}{2}\sin\frac{\pi(\beta+1)-\eta_k}{2}, \quad |\beta| \le 1. \tag{16}$$

Зрозуміло, що у загальному випадку визначення зваженої функції становить практичну складність, тому що корені функції $\Phi(z)$ n_k часто важко визначити. У зв'язку з цим подамо $\varphi(\beta)$ у вигляді

$$\varphi(\beta) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1}\delta(\Delta\beta_{k-1} \le \beta < \Delta\beta_k), \quad \beta \ge 0, \tag{17}$$

де $\delta(\Delta\beta_{k-1} \le \beta < \Delta\beta_k) = \begin{cases} 1, & \beta \in [\Delta\beta_{k-1}, \Delta\beta_k) \\ 0, & \beta \notin [\Delta\beta_{k-1}, \Delta\beta_k) \end{cases}$; $\Delta\beta_0 = 0, \quad \Delta\beta_N = 1, \quad \varphi(\beta)$ – непарна функція.

Підставивши вираз (17) у (5), знаходимо

$$R(\omega) = \left[2e^{-\lambda|\omega|^\alpha} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \int_{\Delta\beta_{k-1}}^{\Delta\beta_k} \sin(\lambda\omega|\omega|^{\alpha-1} tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\beta d\beta \right]^2 =$$
$$= \{\frac{2e^{-\lambda|\omega|^\alpha}}{\lambda\omega|\omega|^{\alpha-1} tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} [\cos\left(\lambda\omega|\omega|^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_k\right) - \cos\left(\lambda\omega|\omega|^{\alpha-1} tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_{k-1}\right)]\}^2. \quad (18)$$

Із врахуванням парності функції $R(\omega)$ кореляційна функція (4) визначається як

$$R(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \{\frac{2e^{-\lambda\omega^\alpha}}{\lambda\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} [\cos(\lambda\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_k) - \cos\left(\lambda\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_{k-1}\right)]\}^2 \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (19)$$

Розглянемо тепер задачу знаходження параметрів $\Delta\beta_k$, $k = 0, 1, ..., n-1$, за яких кореляційна функція $R(\tau)$ (18) (або її спектр $R(\omega)$) оптимально наближається до заданої функції $R_0(\tau)$ (або її спектра $R_0(\omega)$).

Ця задача математично може бути сформульована так: знайти $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, ..., \Delta\beta_{N-1}$, за яких інтеграл

$$\varepsilon(\Delta\beta_1, ..., \Delta\beta_N) = \int_0^\infty [R_0(\tau) - R(\tau, \Delta\beta_1, ..., \Delta\beta_{N-1})]^2 d\tau, \quad (20)$$

або

$$\varepsilon(\Delta\beta_1, ..., \Delta\beta_N) = \int_0^\infty [R_0(\omega) - R(\omega, \Delta\beta_1, ..., \Delta\beta_{N-1})]^2 d\omega \quad (21)$$

повернеться до мінімуму.

Як відомо, розв’язання полягає у знаходженні розв’язку системи рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \Delta\beta_k} \varepsilon(\Delta\beta_1, ..., \Delta\beta_{N-1}) = 0 \\ k = 1, 2, ..., N-1. \end{cases} \quad (22)$$

Отже, переходимо до наступної процедури синтезу:

1. Відповідно до заданої кореляційної функції $R_0(\tau)$ або її спектра $R_0(\omega)$ із системи рівнянь (22) визначаються параметри $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, ..., \Delta\beta_{N-1}$.

2. Підстановкою знайдених параметрів $\Delta\beta_1, \Delta\beta_2, ..., \Delta\beta_{N-1}$ у рівняння (19) знаходиться синтезована кореляційна функція, що мінімально відрізняється від заданої.

Практичний приклад. Нехай $R_0(\omega)$ задана у вигляді:

$$R_0(\omega) = e^{-\omega^\alpha}, \quad \omega \ge 0. \quad (23)$$

Для випадку, коли $N = 2$, з врахуванням виразу (18) отримаємо співвідношення

$$R(\omega, \Delta\beta_1) = \{(\frac{2e^{-\omega^\alpha}}{\omega^\alpha tg(\frac{\pi\alpha}{2})}[1 + \cos(\omega^\alpha tg(\frac{\pi\alpha}{2})) - 2\cos(\omega^\alpha tg(\frac{\pi\alpha}{2})\Delta\beta_1)]\}^2, \quad \omega \ge 0. \quad (24)$$

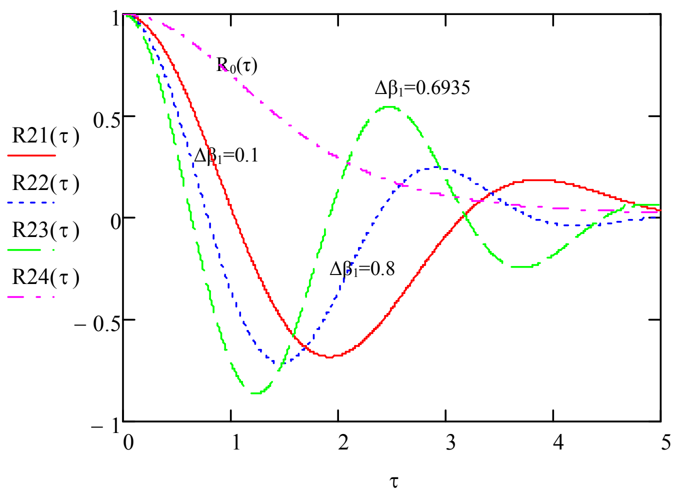
Підставляючи (23), (24) в (21) і диференціюючи по $\Delta\beta_1$, отримаємо

$$\int_0^\infty \{e^{-\omega^\alpha} - \left(\frac{2e^{-\omega^\alpha}}{\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \right)^2 [1+\cos\left(\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) - 2\cos\left(\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_1\right)]^2\}\times$$

$$\times\left[1+\cos\left(\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) - 2\cos\left(\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_1\right)\right]\frac{e^{-2\omega^\alpha}}{\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}\sin\left(\omega^\alpha tg\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Delta\beta_1\right)d\omega = 0. \qquad (25)$$

Розв’язуючи (25), визначаємо $\Delta\beta_1$ = 0.6935 для α = 1.5. Знайдене $\Delta\beta_1$ є мінімальним значенням, і відповідно підставляючи в (21), знаходимо кореляційну функцію, яка мінімально відрізняється від заданої функції.

На рисунку показані графіки заданої кореляційної функції $R_0(\tau)$ і кореляційних функцій для різних значень $\Delta\beta_1$, включаючи і знайдене.



Графіки кореляційних функцій

Висновок

Запропоновано метод оптимального синтезу сигналів із великою відносною смугою, або несинусоїдальних сигналів із заданими кореляційними функціями на основі комбінованого узагальненого гауссового імпульсу. На відміну від відомих методів синтезу заданих кореляційних функцій запропонований метод приводить до однозначного розв’язку задачі синтезу. Суть методу полягає у визначенні параметрів знайденої зваженої функції, на яку множиться узагальнений гауссовий імпульс для отримання сигналу з кореляційною функцією, що мінімально відрізняється від заданої. Запропонований метод може бути застосований і до сигналів інших класів.

1. Вакман Д.Е., Седлецкий Р.М. Вопросы синтеза радиолокационных сигналов. – М.: Сов. радио, 1973. – 312 с. 2. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. – М.: Сов. радио, 1971. – 568 с. 3. Френкс Л. Теория сигналов / Пер. с англ.; Под ред. Д.Е. Вакмана. – М.: Сов. радио, 1974. – 344 с. 4. Ван Трис Г. Теория обнаружения оценок и модуляции: В 3-х т / Пер. с англ.; Под ред. В.Т. Горяинова. – М.: Сов. радио, 1977. – Т.3. – 662 с. 5. Пахолков Г.А., Кашинов В.В., Пономаренко Б.В. Вариационный метод синтеза сигналов и фильтров. – М.: Радио и связь, 1981. – 232 с. 6. Хармут Х.Ф. Несинусоидальные волны в радиолокации и радиосвязи / Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1985. – 376 с. 7. Евсюк Н.Н. Спектральные и корреляционные свойства обобщенного гауссового импульса // Наукові записки УНДІЗ. – 2008. – №5(7). – С. 50–56. 8. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.