

Н.В. Захарченко, М.М. Гаджиев, Е.Н. Мартынова, А.Н. Рябуха  
Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УКРУПНЕННЫХ СИГНАЛОВ С НУЛЬ-ПЕРЕСЕЧЕНИЯМИ В АДАПТИВНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ РАБОТЕ ПО РЕАЛЬНЫМ БИНАРНЫМ КАНАЛАМ

© Захарченко Н.В., Гаджиев М.М., Мартынова Е.Н., Рябуха А.Н., 2009

**Теоретически доказано и экспериментально подтверждено увеличение функции правдоподобия при принятии решения при различении бинарных сигналов по нуль-пересечениям по сравнению с оценкой информационного параметра на единичном интервале.**

**The growth of possibility function of decision- making at the binary signals distinction on no- crossings in comparison with the estimation of informative parameter at the unit interval was theoretically proved and experimentally confirmed.**

Наличие помех в канале связи приводит к тому, что принятый сигнал лишь с некоторой вероятностью соответствует переданному сигналу. Поэтому при оценке надежности связи используется вероятностный критерий помехоустойчивости, который характеризуется зависимостью

$$P_{\text{э}} = f(h^2), \quad (1)$$

где  $h^2$  – превышение сигнала над помехой, равное отношению энергии сигнала  $E = P_c t_0$  к спектральной плотности помехи  $N_0 = \sigma_w^2 / \Delta F = 2\sigma_w^2 t_0$ ;  $P_{\text{э}}$  – вероятность ошибочного приема элементарного сигнала длительностью  $t_0$ , определяемого полосой  $\Delta F$  канала.

В случае использования двоичной системы с одинаковой энергией ( $E$ ) обоих сигналов (двоичный код с активным нулем) вероятность трансформации «1» в «0» и «0» в «1» [1] определяется

$$P_{01} = P_{10} = F\left(-\sqrt{\frac{E}{N_0}} \lambda\right), \quad (2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент различимости сигналов.

Учитывая, что коэффициент различимости равен [1]

$$\lambda = 1 - E \int_0^{t_0} U_1(t) \cdot U_0(t) dt, \quad (3)$$

то энергетическое расстояние между сигналами  $U_1(t)$  и  $U_0(t)$  при совмещении интервалов их существования

$$R_{U_1, U_0} = \int_0^{t_0} [U_1(t) - U_0(t)]^2 dt = 2\lambda E. \quad (4)$$

Из (4) следует, что  $\lambda$  является мерой расстояния между сигналами. При  $\lambda = 0$  правая часть (4) равна нулю, что соответствует совпадению сигналов (сигналы неразличимы). Максимальное значение  $\lambda = 2$  возможно при строго противоположных фазах сигналов, что соответствует максимуму различимости. Для такой бинарной системы выражение (2) принимает вид

$$P_{0,1} = P_{1,0} = F\left(-\sqrt{2E/N_0}\right),$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \ell \frac{-y^2}{2\sigma^2} dy. \quad (5)$$

$$F(-x) = 1 - \Phi(x);$$

$\Phi(x)$  – интеграл вероятности.

В [2] получено аналитическое выражение для закона распределения относительной величины смещений нуль-пересечения  $f(l)$  огибающей сигнала на выходе частотного дискриминатора бинарной системы, при воздействии гауссового шума

$$f(l) = \frac{4hn}{\sqrt{2\pi}} \ell^{-8h^2n^2l^2}, \quad (6)$$

где  $\ell = \frac{t_{CM}}{t_0}$  – относительное значение отклонения нуль-перехода.

Из (6) следует, что среднеквадратическое значение относительного отклонения нуль-пересечения  $\sigma_\ell$ :

$$\sigma_\ell = \frac{1}{4hn}, \quad (7)$$

где  $n = t_0 \cdot \Delta F$ .

Из последнего выражения следует, что даже при  $n=1$   $\sigma_\ell = \frac{1}{4h} = \frac{1}{4\sigma_{III}}$ , т. е. дисперсия смещения шума в 16 раз больше дисперсии колебания во времени нуль-пересечений. Следовательно, вероятность появления ошибки за счет смещения значащего момента воспроизведения (ЗМВ) за величину  $Q_C = 0,5 t_0$  ( $0,5$  – относительное значение порога смещения) будет определяться [3]:

$$P_{0,1} = P_{1,0} = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2\frac{1}{4h}}\right) = 1 - \Phi(2h). \quad (8)$$

Если при вычислении  $N_0$  в выражении (5) (с учетом (1)) значение  $t_0$  заменить на относительную величину, равную единице, то для  $P_{01}$  и  $P_{02}$  получим

$$P_{01} = P_{02} = F\left(-\sqrt{E/N_0}\right) = F(-h) = 1 - \Phi(h). \quad (9)$$

Сравнивая (8) и (9), видим, что функция правдоподобия принятия решения при различении сигналов по выбросам напряжения шума меньше, по сравнению с отклонениями нуль-пересечений сигнала от ожидаемого их места появления [4].

С другой стороны, в каналах с базой  $\Delta F \cdot t_0 = 1$  единичный элемент величиной  $t_0^* < t_0$  не может передаваться по каналу в связи с появлением больших межсимвольных искажений. Выход из этого положения можно найти, используя передачу укрупненными сигналами, в которых содержится информация не об одной двоичной единице, а некоторой их группе. При этом в отличие от посимвольной передачи, когда нуль-пересечения сигнала  $U(t)$  находятся на расстояниях, кратных  $t_0 = \frac{1}{2\Delta F}$ , расстояние между нулевыми точками ( $\tau_c$ ) укрупненного сигнала будет кратно некоторой величине  $\Delta < t_0$ , но не меньше  $t_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \tau_c &= s\Delta + i\Delta & i \in 0 \div k & \text{целые числа} \\ \Delta &= \frac{t_0}{s} & s \in 2 \dots s & \text{целые числа} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Формирование укрупненных сигналов таким методом позволит избавиться от межсимвольных искажений ( $\tau_c \geq t_0$ ), с одной стороны, и обеспечить энергетическое расстояние между

сигнальными конструкциями меньше энергии одного единичного элемента  $t_{0,}$  – с другой. При этом за счет уменьшения расстояния между отдельными сигнальными конструкциями число разрешенных для передачи укрупненных сигналов на интервале  $m$  единичных элементов будет больше  $N_p \gg 2^m$  [5].

Возможность формирования укрупненных бинарных сигналов с информационными нуль-пересечениями определяется теорией Бонда и Канна [5], которые обобщили теоремы отсчетов с «явными» дискретными представлениями (например, определение функции  $f(t)$  с ограниченным спектром через отсчеты в заранее выбранные моменты, кратные интервалу Найквиста, и не зависящие от значения  $f(t)$  на «неявное» дискретное представление, при котором функция  $f(t)$  представляется моментами пересечения ею нулевого уровня  $f(t_n)=0$ . Ими установлены соотношения между «неявными» дискретными представлениями и коэффициентами Фурье, которые позволяют выразить функцию с ограниченным спектром в виде ряда Фурье через ее нули. Причем нули в пределах интервала укрупненного сигнала  $T_c$  появляются с частотой меньше частоты Найквиста.

Рассмотрим пример. Пусть на интервале  $T_k = 5t_0$  при  $s=7$  реализуется сигнальная конструкция, имеющая три информационных нуль-перехода, удовлетворяющих условию (10).

Если бы по каналу связи можно было передавать элементы длительностью  $\Delta = \frac{1}{7}t_0$ , то число реализаций на интервале  $T_c = 5t_\Delta$  было бы  $2^{5 \cdot 7} = 2^{35}$ . При выполнении условия (10) число укрупненных сигналов с « $i$ » информационными нулями определяется [6]:

$$N_p(i) = C_{ms-i(s-1)}^i = \frac{[ms - i(s-1)]!}{i![ms - i(s-2)]!} \quad (11)$$

При  $i=3, s=7, m=5$   $N_p=680 \gg 2^5$

Ясно, что для множества 680 укрупненных сигналов, удовлетворяющих условию (10), кодовое расстояние будет  $d=1$  (отличие в числе элементов  $\Delta$ ). На рис. 1 показано две разрешенные сигнальные конструкции с  $d=1$  (рис. 1, а, б).

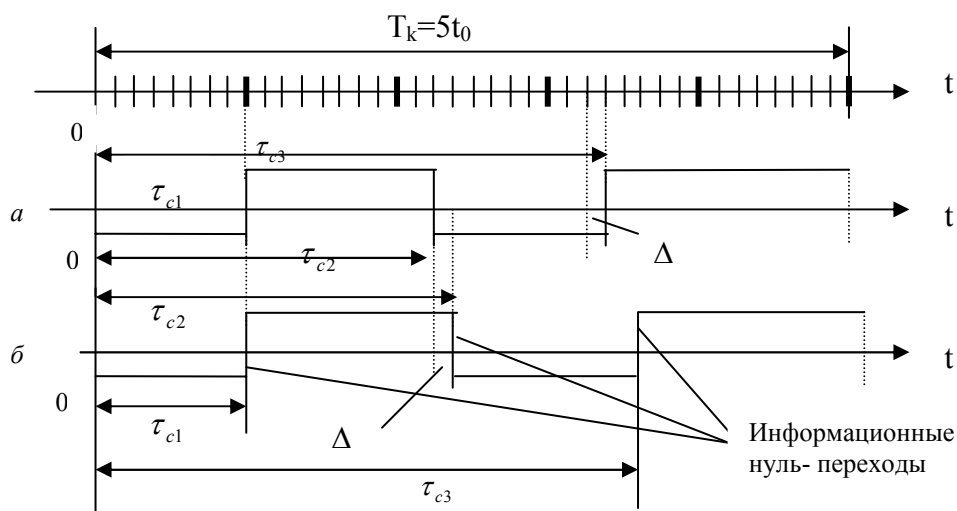


Рис. 1. Расположение нуль-переходов в передаваемой конструкции

В [6, 7] приведены результаты измерений потока ошибок в реальных каналах ГТС и ЧМ для разных соотношений полосы пропускания канала  $\Delta F$  и скорости модуляции  $V$  при посимвольном методе передачи. Так, для полосы 1300 Гц при  $V= 1000$  бод при  $m=5$  получено значение

вероятности ошибочного приема пятиэлементного кодового слова  $P(\geq 1,5) = 0,9 \cdot 10^{-2}$  при удельных весах кратности ошибки  $t_k(1) - 0,75$ ;  $t_k(2) - 0,24$ ;  $t_k(3) - 0,01$ .

Предположим, что при посимвольном методе передачи использован шестиэлементный код с защитой на четность.

В этом случае вероятность необнаруженной ошибки составит

$$P_{H0} = 1 - P(t_k = 1) - P(t_k = 3) = P(t_k = 2) = 0,9 \cdot 10^{-2} \cdot 2,4 \cdot 10^{-1} = 2,16 \cdot 10^{-3}.$$

Определим вероятность необнаруженной ошибки для сигнальных конструкций с тремя нуль-переходами. Для этой цели из 680 реализаций, полученных по выражению (11), выберем только такие, у которых нуль-переходы находятся в точках, удовлетворяющих условия [6]:

$$A_0 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0 \pmod{A_0} \quad (12)$$

Выберем в качестве коэффициентов  $A_i$  простые числа  $A_1=2$ ;  $A_2=3$ ;  $A_3=7$ ;  $A_0=19$ . Легко показать, что если вектор  $E_{k1}(x_1; x_2; x_3)$  удовлетворяет условию (12), то разрешенным будет также вектор, полученный из  $E_{x1}$  добавлением образующего (нулевого) вектора  $E(0)$  (при сохранении условия (10)). Для заданных значений  $A_1; A_2; A_3$  нулевыми векторами с минимальным весом будут:

$$\begin{aligned} E_{01}(0) &= \underline{-1} \cdot 2 + \underline{3} \cdot 3 + (-1) \cdot 7 & w &= 4 \\ E_{02}(0) &= \underline{3} \cdot 2 - \underline{2} \cdot 3 + 0 \cdot 7 & w &= 5 \end{aligned}$$

Разрешенными векторами будут также вектора, которые получены из  $E_{x1}$  добавлением нулевого вектора, у которого сумма координат с учетом  $A_i$  равна числу  $A_0$ :

$$\begin{aligned} E_{01}(A_0) &= \underline{-1} \cdot 2 + 0 \cdot 3 + \underline{3} \cdot 7 & (\Sigma = 19) & & w &= 4 \\ E_{02}(A_0) &= \underline{1} \cdot 2 + \underline{1} \cdot 3 + \underline{2} \cdot 7 & (\Sigma = 19) & & w &= 4 \end{aligned}$$

(Знаком « $\equiv$ » обозначены координаты векторов).

Согласно [6], общее число разрешенных векторов, удовлетворяющих условию (12), определяется

$$N_p(A_0) = E^{-1} \left( \frac{N_p(i)}{A_0} \right) \quad (13)$$

где  $E^{-1}$  обозначает целое меньшее число.

Таким образом из 680 кодовых слов, удовлетворяющих условию (12), будут удовлетворять 35 сигнальных конструкций, что достаточно для передачи исходных 32 комбинаций. В результате проведенных экспериментов было установлено [7], что реальный канал описывается моделью Гильберта с двумя состояниями: «хорошим» состоянием (с относительным временем более  $T_x \geq 0,99T$ ) и плохим (с временем  $T_H \leq 0,01T$ ). При этом на интервале «хорошего» состояния среднеквадратическое значение отклонения нуль-переходов по отношению к идеальному положению  $\sigma_0(0) = 0,0171$ . При учете искажения нулевого ЗВМ (начала сигнальной конструкции рис. 1) для информационных нуль-переходов  $\sigma_\Sigma = 1,41\sigma_0$  [6].

Предполагая, что все сосредоточенные во времени воздействия приводят к обнаруженным ошибкам (проверкой числа нуль-переходов на интервале  $T_c$  или невыполнением условия (12)), определим вероятность необнаруженной ошибки на интервале «хорошего» состояния, которое определяется появлением векторов помехи  $E_x(0)$  или  $E_x(A_0)$  (для меньшего веса  $w$ ) [5]:

$$P_{H0}[E_x(0)] = P_1(1) \cdot P_2(3) \cdot P_3(1).$$

$P(x)$  вероятность смещения соответствующего нуль-перехода на  $x$  зон  $\Delta$ :

$$P(1) = \Phi\left(\frac{1,5\Delta}{\sigma_\Sigma}\right) - \Phi\left(\frac{0,5\Delta}{\sigma_\Sigma}\right);$$

$$P(3) = \Phi\left(\frac{3,5\Delta}{\sigma_\Sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2,5\Delta}{\sigma_\Sigma}\right).$$

Для приведенных параметров  $\Delta$  и  $\sigma_0(0)$  значения вероятности смещения одного нуль-перехода на величину  $\Delta$ :

$$P_1(1) = \Phi\left(\frac{1,5 \cdot 0,14}{0,0242}\right) - \Phi\left(\frac{0,071}{0,0242}\right) = \Phi(3 \cdot 2,93) - \Phi(2,93) = 1,65 \cdot 10^{-3}.$$

Так как вероятность искажения двух переходов на величину  $\Delta$  более чем на три порядка меньше, то в «хорошем» состоянии канала  $P_{H0}[E_x(0)] \ll 10^{-9}$ , что на 6 порядков меньше вероятности необнаруженной ошибки при шестиэлементном коде с защитой на четность.

Следует заметить, что энергетическое расстояние между укрупненными сигнальными конструкциями определяется энергией  $4\Delta$  ( $0,568t_0$ ), по сравнению с энергией двух посылок для кода с  $d=2$ .

Такое различие в значениях  $P_{H0}$  объясняется следующим: при посимвольной передаче сигналы размещаются в вершинах  $n$ -мерного гиперкуба и расстояние между ближайшими сигнальными конструкциями равно  $2\sqrt{Q^2}$  и сохраняется постоянным при увеличении  $n$ , в то время, как при увеличении мерности пространства за счет расположения нуль-переходов в точках, удовлетворяющих (10), вероятность попадания результирующего вектора помехи в определенные зоны, заданные коэффициентами  $A_i$ , существенно уменьшаются.

Вероятность ошибочного приема сигнальной конструкции на интервалах «хорошего» состояния можно существенно уменьшить, если увеличить мощность множества, удовлетворяющего условию (12) за счет непересекающихся дополнительных множеств сигнальных конструкций, реализованных на том же интервале  $T_k$  и при тех же коэффициентах  $A_i$ , удовлетворяющих условию Леммы.

Лемма. Если разница моделей  $A_{01}$  и  $A_{02}$  представляет число, соответствующее вектору  $A_1Z_1 + A_2Z_2 + A_3Z_3 = A_{02} - A_{01}$  с минимальным весом  $W = \sum |Z_i| = d_0$ , то часть множества, удовлетворяющего условию  $A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0(\text{mod } A_{02})$ , не пересекается с множеством  $\sum_i A_i x = 0(\text{mod } A_{01})$ . При этом кодовое расстояние в множестве  $A_{02}$  так же, как и членами  $A_{01}$  и  $A_{02}$  равно  $d=4$  [7].

Полученное выше значение ошибочного приема одного нуль-перехода  $P_0(1) = 1,65 \cdot 10^{-3}$  говорит о том, что на каждую 1000 кодовых слов в «хорошем» состоянии канала ошибочно будут приниматься ( $N_{0ш} = iP_\lambda(1) = 3 \cdot 1,65 \cdot 10^{-3}$ ) пять кодовых слов. Для уменьшения затрат на повторение можно воспользоваться двумя вариантами:

1. Так как вероятность смещения двух ЗМВ на значение  $\Delta$   $P(2) < 10^{-9}$  и ею можно пренебречь, то учитывая то, что коэффициенты  $A_i$  представляют простые числа, по кратности остатка одному из коэффициентов  $A_i$  можно провести исправление.

2. На одном и том же интервале  $T_c$  можно реализовать сигнальные конструкции как с тремя, так и с четырьмя нуль-переходами при  $s < 7$ , что позволит увеличить значение  $\Delta$ .

Например, при  $T_c=5t_{0+}$ , при  $s=6$ ,  $i=3$  можно реализовать 23 кодовых слова, удовлетворяющих условию

$$7x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0(\text{mod } 19)$$

и дополнительно 9 слов при  $s=6$ ,  $i=4$ , удовлетворяющих условию

$$11x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0(\text{mod } 23),$$

что достаточно для передачи исходных 5-элементных кодовых слов.

#### **Выводы:**

1. Формирование укрупненных бинарных сигналов с нуль-переходами позволяет увеличить функцию правдоподобия при различении сигналов по фиксированию нулей на интервале кодовой конструкции.

2. Формирование сигналов, удовлетворяющих условию (12), позволяет при коэффициентах  $A_i$ , соответствующим простым числам, обеспечивать передачу в адаптивных системах со скоростью  $R \approx 1$  при вероятности необнаруженной ошибки на 3–4 порядка меньше по сравнению с блоковой посимвольной передачей.

1. Липкин И.А. Основы статистической радиотехники, теории информации и кодирования. – М.: Сов. радио. 1978. – 237 с. 2. Немировский М.С. Помехоустойчивость радиосвязи. – М.: Энергия, 1966. – 295 с. 3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984. – 832 с. 4. Буга Н.Н. Основы теории связи и передачи данных // ЛВИКА им. А.Ф. Можайского. – Л., 1968. – 545 с. 5. Bond F.E., Cahn C.R. On sampling the zeroes of band width limited signals // YRE Trans. Triform. Theory, 1958. – Vol. IT- 4. – P.110–113. 6. Захарченко М.В. Синтез багатопозиційних часових кодів. – К.: Техніка, 1999. – 280 с. 7. Захарченко Н.В., Горохов С.М., Захарченко В.Н. и др. Повышение эффективности блочного кодирования при работе по нестационарным каналам. – Баку: «ЭЛМ»-2009. – 316 с. 8. Захарченко Н.В., Гаджиев М.М., Мартынова Е.Н. Условия разделения множеств исправляемых и обнаруживаемых ошибок в таймерных сигнальных конструкциях // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2008. – №4/3 (34).