

## ДИФЕРЕНЦІЙНІ ФОРМУЛИ ПЕРШОГО РОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКУ ПРЯМОЇ ГЕОДЕЗИЧНОЇ ЗАДАЧІ В ПРОСТОРОВІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Р.Г. Пилип'юк, Р.Р. Пилип'юк, Т. Грицюк

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

**Ключові слова:** просторова геодезична мережа, пряма геодезична задача, диференційні поправки.

### Постановка проблеми

Положення всіх пунктів сучасних опорних геодезичних мереж задають або просторовими геодезичними координатами  $B, L, H$ , або просторовими геоцентричними координатами  $X, Y, Z$ . Значення цих координат отримують, послідовно розв'язуючи прямі геодезичні задачі між суміжними пунктами. Вихідними величинами для цього розв'язання вибирають: геодезичні координати вихідного пункту  $B, L, H$  (геоцентричні координати  $X, Y, Z$ ), азимут, що характеризує напрямок між пунктами, віддаль між пунктами та зенітну віддаль цього напрямку. Дослідженнями встановлено, що під дією глобальних та регіональних геофізичних процесів відбуваються зміни як координат вихідних пунктів, так і вихідних вимірюваних параметрів, що спричиняє зміну координат наступних пунктів мережі. У зв'язку з цим викликає інтерес отримання диференційних формул для безпосереднього розрахунку поправок у координати пунктів за рахунок зазначених вище змін, без повторного розв'язання прямих геодезичних задач.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Пункти геодезичних мереж, створених на земній поверхні, задають у тій чи іншій системі координат. Дослідженнями встановлено [1], що реалізація відповідної системи координат (наприклад, ITRF) на певну епоху забезпечується певною кількістю земних перманентних пунктів, які під час розроблення цих систем координат враховують динамічні характеристики Землі. Саме тому системи координат постійно оновлюються і доповнюються даними, що приводить до появи нових реалізацій цих систем, таких як ITRF89, ITRF96, ITRF2000, ITRF2005, ITRF2008. Це означає, що координати вихідних пунктів геодезичної мережі будуть постійно уточнюватись. Окрім цього, геодинамічні горизонтальні та вертикальні рухи окремих тектонічних блоків спричиняють і зміну вимірювальних елементів у геодезичних мережах. Все це є свідченням того, що підтримка геодезичних мереж на високому науково-технічному рівні можлива тільки із постійним урахуванням цих впливів.

Одним зі шляхів підтримки геодезичних мереж на високому науково-технічному рівні є застосування диференційних формул, які забезпечують обчислення

поправок в наявні координати без повторного врівноваження та переобчислення координат. У сучасній науково-технічній літературі [2, 3] розглянуто диференційні формули, що застосовуються переважно під час розв'язання відповідних задач на поверхні еліпсоїда, а розв'язування відповідних задач у просторових координатах обмежується використанням просторових прямокутних координат [2, 3].

### Постановка завдання

Основною метою роботи є розроблення диференційних формул для отримання поправок у просторові геодезичні координати, що враховуватимуть зміни просторових геодезичних координат вихідного пункту, а також зміни просторових топоцентричних полярних координат у вихідному пункті.

### Виклад основного матеріалу

Суть прямої геодезичної задачі в просторових системах координат полягає у визначенні просторових геодезичних координат наступної точки простору за відомими просторовими геодезичними координатами попередньої точки і за відомими просторовими топоцентричними полярними координатами у цій вихідній точці.

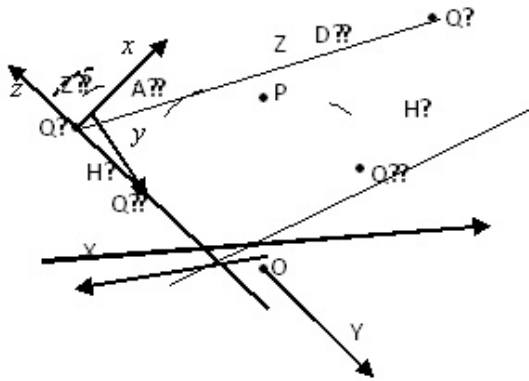
Теоретичні засади отримання диференційних формул для розв'язання прямої геодезичної задачі в просторових системах координат ґрунтуються на використанні відомих формул зв'язку між геодезичними і просторовими геоцентричними координатами [3]

$$\begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L, \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L, \\ Z &= (N(1 - e^2) + H) \sin B. \end{aligned} \quad (1)$$

і формул, що встановлюють зв'язок між просторовими топоцентричними і просторовими полярними координатами в точці спостереження, якщо початок топоцентричної системи координат  $(x, y, z)$  розміщений у цій точці (див. рисунок).

Вісь  $x$  у цій топоцентричній системі координат розміщена у площині геодезичного меридіана точки  $Q_1$  і її додатний напрямок скерований на північ, вісь  $z$  є зовнішнім продовженням нормалі у точці  $Q_1$ , а вісь  $y$  у доповнює систему координат до лівої.

Просторова полярна система координат задається у точці  $Q_1$  геодезичною зенітною відстанню  $Z_{12}$ , геодезичним азимутом  $A_{12}$  і відстанню  $D_{12}$  до наступної точки  $Q_2$ .



Системи геоцентричних і топоцентричних координат

Топоцентричні координати точки  $Q_2$  через полярні координати визначаються тоді за формулами

$$\begin{aligned} x &= D_{12} \sin Z_{12} \cos A_{12}, \\ y &= D_{12} \sin Z_{12} \sin A_{12}, \\ z &= D_{12} \cos Z_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

а за просторовими геоцентричними координатами для цих величин маємо [2]:

$$\begin{aligned} x &= ((N_2(1 - e^2) + H_2) \sin B_2 + e^2 N_1 \sin B_1) \cos B_1 - (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) \sin B_1, \\ y &= (N_2 + H_2) \cos B_2 \sin(L_2 - L_1), \\ z &= ((N_2(1 - e^2) + H_2) \sin B_2 + e^2 N_1 \sin B_1) + \\ &+ (N_2 + H_2) \cos B_2 \cos(L_2 - L_1) \times \\ &\times \cos B_1 - (N_1 + H_1). \end{aligned} \quad (3)$$

Нехай просторові геодезичні та полярні координати вихідної точки отримали нескінченно малі зміни  $dB_1, dL_1, dH_1, dA_{12}, dD_{12}, dZ_{12}$ . Це означає, що повинні відбутися зміни в положенні на еліпсоїді точки  $Q_2$ , а також зміна її висоти. Зміна в положенні точки  $Q_2$  на поверхні еліпсоїда визначається зміною геодезичних координат на величину поправок  $\Delta B$  і  $\Delta L$ . Кінцеві значення поправок  $\Delta B_{2k}$  і  $\Delta L_{2k}$  будуть результатом сумарного впливу на координати двох факторів: перший – оцінює вплив на геодезичні координати точки  $Q_2$  зміни параметрів, що використовуються для розв'язування на поверхні еліпсоїда прямої геодезичної задачі, а саме: зміни вихідних геодезичних координат  $dB_1$  і  $dL_1$ , зміни значення вихідного азимута  $dA_{12}$ , довжини геодезичної лінії  $ds_{12}$  ( $dD_{12}$ ); другий – оцінює вплив на геодезичні координати точки  $Q_2$  зміни параметрів просторових полярних координат  $dA_{12}, dD_{12}$  і  $dZ_{12}$ .

Позначимо поправки в геодезичні координати точки  $Q_2$ , що характеризують вплив першого фактора –  $\Delta B'$  і  $\Delta L'$ . Значення цих поправок обчислюють за відомими диференційними формулами першого роду для розв'язування прямої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда. В науково-технічній літературі [2, 3] ці формули мають складний і громіздкий вигляд. Для розрахунку зазначених поправок з точністю до  $0,0001''$  їх можна спростити і записати після перетворення так:

$$\begin{aligned} \Delta B'_2 &= \frac{M_1}{M_2} \cos l \Delta B''_1 - \\ &- \frac{\rho''}{M_2} \cos A_{21} \Delta s_{12} + \frac{m}{M_2} \sin A_{21} \Delta A''_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta L'_2 &= \Delta L''_1 + \frac{M_1}{N_2} \tan B_2 \sin l \Delta B''_1 - \\ &- \frac{\rho''}{N_2} \sec B_2 \sin A_{21} \Delta s_{12} - \frac{m}{N_2} \sec B_2 \cos A_{21} \Delta A''_{12} \end{aligned} \quad (4)$$

де  $l = L_2 - L_1$ ,  $m$  – приведена довжина геодезичної лінії, що визначається формулою

$$m = R_1 \sin \frac{s_{12}}{R_1},$$

а  $R_1$  – середній радіус кривини еліпсоїда у початковій точці  $Q_1$ .

Щоб оцінити вплив на геодезичні координати точки  $Q_2$  зміни параметрів просторових полярних координат на величину  $dA_{12}, dD_{12}$  і  $dZ_{12}$ , необхідно встановити функціональний зв'язок між цими величинами і відповідними змінами геодезичних координат, що визначаються поправками  $\Delta B''$  і  $\Delta L''$ . Для цього як вихідні використаємо формули, наведені в роботі [2]:

$$\begin{aligned} dD_{12} &= (M_2 + H_2) \\ &[\cos A_{12} \sin Z_{12} a_1 - \sin A_{12} \sin Z_{12} a_2 + \cos Z_{12} a_3] \\ &\times dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 \times \\ &\times [\cos A_{12} \sin Z_{12} b_1 + \sin A_{12} \sin Z_{12} b_2 - \\ &- \cos Z_{12} b_3] dL_2 + \\ &+ [\cos A_{12} \sin Z_{12} c_1 + \sin A_{12} \sin Z_{12} c_2 + \\ &+ \cos Z_{12} c_3] dH_2, \\ D_{12} dZ_{12} &= (M_2 + H_2) \\ &[\cos A_{12} \cos Z_{12} a_1 - \sin A_{12} \cos Z_{12} a_2 - \sin Z_{12} a_3] \times \\ &\times dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 \times \\ &\times [\cos A_{12} \cos Z_{12} b_1 + \sin A_{12} \cos Z_{12} b_2 + \\ &+ \sin Z_{12} b_3] dL_2 + \\ &+ \cos A_{12} \cos Z_{12} c_1 + \sin A_{12} \cos Z_{12} c_2 - \sin Z_{12} c_3 \\ &- \sin Z_{12} c_3] dH_2, \\ D_{12} \sin A_{12} dA_{12} &= -(M_2 + H_2) \\ &[\sin A_{12} a_1 + \cos A_{12} a_2] dB_2 + (N_2 + H_2) \cos B_2 \times \\ &\times [-\sin A_{12} b_1 + \cos A_{12} b_2] dL_2 + \\ &+ [-\sin A_{12} c_1 + \cos A_{12} c_2] dH_2. \end{aligned} \quad (5)$$

У формулах (5) коефіцієнти  $a, b$  і  $c$  визначаються з таких виразів:

$$\begin{aligned} a_1 &= \cos B_1 \cos B_2 + \sin B_1 \sin B_2 \cos l, \\ a_2 &= \sin B_2 \sin l, \\ a_3 &= \sin B_1 \cos B_2 - \cos B_1 \sin B_2 \cos l, \\ b_1 &= \sin B_1 \sin l, \\ b_2 &= \cos l, \\ b_3 &= \cos B_1 \sin l, \\ c_1 &= \cos B_1 \sin B_2 - \sin B_1 \cos B_2 \cos l, \\ c_2 &= \cos B_2 \sin l, \\ c_3 &= \sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos l. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналізуючи структуру формул (5), бачимо, що вирази у квадратних дужках повністю визначаються за значеннями координат відповідних точок еліпсоїда. Це дає змогу обчислювати їх завчасно, і в подальших перетвореннях використовувати як коефіцієнти

$$\begin{aligned} k_1 &= \cos A_{12} \sin Z_{12} a_1 - \sin A_{12} \sin Z_{12} a_2 \\ &+ \cos Z_{12} a_3, \\ k_2 &= \cos A_{12} \sin Z_{12} b_1 + \sin A_{12} \sin Z_{12} b_2 \\ &- \cos Z_{12} b_3, \\ k_3 &= \cos A_{12} \sin Z_{12} c_1 + \sin A_{12} \sin Z_{12} c_2 \\ &+ \cos Z_{12} c_3, \\ k_4 &= \cos A_{12} \cos Z_{12} a_1 - \sin A_{12} \cos Z_{12} a_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin Z_{12} a_3, \\
k_5 &= \cos A_{12} \cos Z_{12} b_1 + \\
& \sin A_{12} \cos Z_{12} b_2 + \sin Z_{12} b_3, \\
k_6 &= \cos A_{12} \cos Z_{12} c_1 + \\
& + \sin A_{12} \cos Z_{12} c_2 - \sin Z_{12} c_3, \\
k_7 &= \sin A_{12} a_1 + \cos A_{12} a_2, \\
k_8 &= -\sin A_{12} b_1 + \cos A_{12} b_2, \\
k_9 &= -\sin A_{12} c_1 + \cos A_{12} c_2. \quad (7)
\end{aligned}$$

З урахуванням цих позначень формули (5) переписуються так:

$$\begin{aligned}
dD_{12} &= (M_2 + H_2) k_1 dB_2 + \\
& + (N_2 + H_2) \cos B_2 k_2 dL_2 + k_3 dH_2, \\
D_{12} dZ_{12} &= (M_2 + H_2) k_4 dB_2 + \\
& + (N_2 + H_2) \cos B_2 k_5 dL_2 + k_6 dH_2 \\
D_{12} \sin A_{12} dA_{12} &= -(M_2 + H_2) k_7 dB_2 + \\
& (N_2 + H_2) \cos B_2 k_8 dL_2 + k_9 dH_2. \quad (8)
\end{aligned}$$

Розв'язок трьох диференціальних рівнянь (8), у яких три невідомі поправки  $dB_2$ ,  $dL_2$  і  $dH_2$ , дає змогу визначити поправки до просторових геодезичних координат точки  $Q_2$  за вплив зміни просторових топоцентричних полярних координат у вихідній точці. Знаходимо:

$$\begin{aligned}
\Delta B_2'' &= \rho'' \frac{D_{12}}{(M_2 + H_2) p_1} \times \\
& \times \left( \frac{\Delta D_{12}}{D_{12}} + p_2 \frac{\Delta Z_{12}''}{\rho''} + p_3 \sin A_{12} \frac{\Delta A_{12}''}{\rho''} \right), \\
\Delta L_2'' &= \rho'' \frac{D_{12}}{(N_2 + H_2)(k_5 k_9 - k_6 k_8)} \sec B_2 \times \\
& \times \left( k_9 \frac{\Delta Z_{12}''}{\rho''} - \frac{M_2 + H_2}{D_{12}} (k_4 k_9 - k_6 k_7) \times \right. \\
& \left. \times \frac{\Delta B_2''}{\rho''} - k_6 \sin A_{12} \frac{\Delta A_{12}''}{\rho''} \right), \\
\Delta H_2'' &= \frac{1}{k_9} ((M_2 + H_2) k_7 \frac{\Delta B_2''}{\rho''} - (N_2 + H_2) \times \\
& \times \cos B_2 k_8 \frac{\Delta B_2''}{\rho''} + D_{12} \sin A_{12} \frac{\Delta A_{12}''}{\rho''}). \quad (9)
\end{aligned}$$

У формулах (9) коефіцієнтами  $p$  позначено такі вирази:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \left( k_1 + \frac{k_3 k_7}{k_9} \right) - \left( \frac{k_4 k_9 + k_6 k_7}{k_5 k_9 - k_6 k_8} \right) \times \\
& \times \left( k_2 - \frac{k_3 k_8}{k_9} \right), \\
p_2 &= k_9 \frac{k_2 - \frac{k_3 k_8}{k_9}}{k_5 k_9 - k_6 k_8}, \\
p_3 &= -k_6 \frac{k_2 - \frac{k_3 k_8}{k_9}}{k_5 k_9 - k_6 k_8} + \frac{k_3}{k_9}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Кінцеві значення геодезичних координат точки  $Q_2$  і геодезичної висоти цієї точки визначають, враховуючи формули (4) і (9), з таких виразів

$$\begin{aligned}
B_{2k} &= B_2 + \Delta B' + \Delta B_2'', \\
L_{2k} &= L_2 + \Delta L_2' + \Delta L_2'', \\
H_{2k} &= H_2 + \Delta H_2''. \quad (11)
\end{aligned}$$

### Висновки

На підставі отриманих формул можна зробити такі висновки:

– просторові геодезичні координати точок, координати яких визначаються відносно вихідної точки,

знають змін, якщо змінилися геодезичні та просторові полярні координати у вихідній точці;

– поправки до геодезичних координат враховують як вплив зміни у вихідній точці параметрів, що використовуються для розв'язання прямої геодезичної задачі на поверхні еліпсоїда, так і зміни просторових полярних координат у цій точці;

– значення коефіцієнтів  $a_i, b_i, c_i, k_i$  і  $p_i$  можна розраховувати за вихідними значеннями координат у точках дослідження, що не впливатиме на точність визначення поправок.

### Література

1. Марченко О.М. Референсні системи в геодезії: навч. посіб. / Марченко О.М., Третяк К.Р., Ярема Н.П. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013.– 216 с.
2. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии: учебник / В.П. Морозов – М.: Недра, 1979.– 296 с.
3. Савчук С.Г. Вища геодезія (Сфероїдна геодезія): підручник / С.Г. Савчук.– Львів: Ліга-Прес, 2000.– 248 с..

### Диференціальні формули першого роду для розв'язання прямої геодезичної задачі в просторовій системі координат

Р.Г. Пилип'юк, Р.Р. Пилип'юк, Т. Грицюк

Розглянуто теорію визначення поправок до просторових геодезичних координат суміжної до вихідної точки геодезичної мережі за допомогою диференціальних формул. Встановлено, що у кінцеві значення поправок входять складові, які враховують як зміни геодезичних координат у вихідній точці мережі, так і зміни топоцентричних просторових полярних координат у цій вихідній точці.

### Дифференциальные формулы первого рода для решения прямой геодезической задачи в пространственной системе координат

Р.Г. Пилипюк, Р.Р. Пилипюк, Т. Грицюк

Рассмотрена теория определения поправок в пространственные геодезические координаты смежного относительно исходного пункта геодезической сети с помощью дифференциальных формул. Установлено, что конечные значения поправок включают в себя составляющие, которые учитывают как изменения геодезических координат исходного пункта сети, так и изменения топоцентрических полярных координат в этом исходном пункте.

### Differential formulas of the first genus for determination of common survey computation in three-dimensional coordinate system

R.G. Pilip'yuk, R.R. Pilip'yuk, T. Grytsyuk

The theory of determination of corrections to three-dimensional geodesic coordinates of adjacent point in relation to the initial point of geodesic network by differential formulas is considered. It is set that the final values of corrections include in constituents, which take into account both the changes of geodesic coordinates of initial point of network and changes of topocentric polar coordinates in this initial point.