

УДК 598:631.459

## ФРАКТАЛЬНА ТЕОРІЯ ЕРОЗІЇ ҐРУНТУ

**В. Мельник, О.Шостак**

Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки

**Ключові слова:** ґрунт, поровий простір, множина Кантора, механіка руйнування.

### Постановка наукової проблеми та її значення

Застосування принципів фрактальної геометрії для дослідження процесу ерозії ґрунту є важливим у сучасних умовах інтенсивного використання земельних ресурсів. Основним завданням є теоретичне обґрунтування застосування принципів фрактальної геометрії для дослідження процесу деструкції ґрунту

### Аналіз останніх наукових досліджень

У статтях Ю.Г. Пузаченко, О.В. Іванова, І.О. Яшкова та А.С. Шешньова подана фрактальна характеристика утворення та поширення ерозійних форм рельєфу [10; 13; 15]. Застосування принципів фрактальної геометрії для вивчення процесу ерозії ґрунтів розглянуто у роботах E. Perfect, B. Kay, S. Tyler і S. Wheatcraft [5; 6].

Завдяки дослідженням R. Michel і S. Garrison доведено, що деструкція ґрунту має фрактальний характер [3;4]. Р.В. Гольдштейн, А.Б. Масолов у своїх роботах зазначили, що для відображення фрактальної моделі поширення ерозії ґрунту доцільно застосувати множину Кантора [9].

### Виклад основного матеріалу

#### 1. Загальні положення фрактальної геометрії.

Теоретичну основу фракталів виклав Б. Мандельброт у широковідомій монографії “Фрактальная геометрия природы” [2]. В основу фрактальної геометрії покладено поняття розмірності. Звична для нас топологічна розмірність – завжди ціле число: множина точок, що лежать вздовж згладженої кривої, наприклад, околу, має розмірність 1 незалежно від розмірності простору, в якому ці точки представлені. Натомість фрактальна розмірність (Хаусдорфа – Безиковича) подається нецілою та більшою за топологічну:

$$D_f > D_t. \quad (1)$$

За характером вона пов’язана не з топологією, а з метрикою, тобто способом побудови множини [14]. Неформальне пояснення полягає в тому, що для кожного цілого числа  $\gamma$   $D_f$  – вимірний куб можна замостити  $N = \gamma^D$  кубиками, подібними до заданого з коефіцієнтом самоподібності  $r(N) = 1/\gamma$ . Фрактальну розмірність  $D_f$  можна застосовувати, коли цілий об’єкт може бути поділений на  $N$  частин, кожна з яких подібна до вихідного із коефіцієнтом подібності  $\gamma$ .

Фрактальні структури часто являють собою слід хаотичних, невпорядкованих динамічних процесів [7].

Поняття розмірності вже давно активно досліджують математики, але тільки після виходу монографії Мандельброта поняття розмірності почали широко використовувати у фізиці, хімії, геоморфології, ґрунтознавстві [3; 14]. На рис. 1 показано приклади побудови фрактальної кривої Коха та квадратного килимка Серпинського.

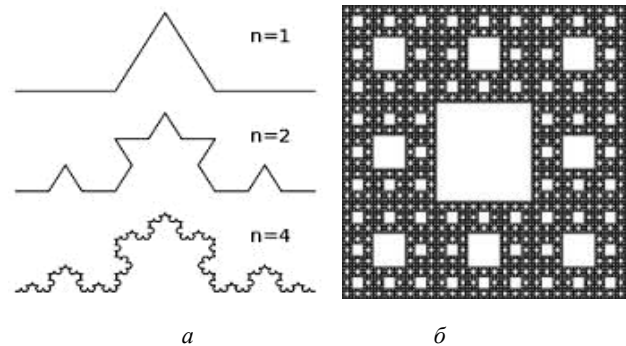


Рис 1. Правила побудови фрактальної кривої Коха (а) і квадратного килимка Серпинського (б) для кривої Коха:  $m=4$ ,  $P=3$ , тому  $D_f = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,2618$ ;

$$\text{для килимка Серпинського: } m=8, P=3 \\ D_f = \ln 8 / \ln 3 \approx 1,8927$$

У роботі (8) отримано строгі математичні залежності модулів пружності ( $E$ ) від фрактальної розмірності часток пустот (пор):

$$E/E_0 = (1 - Q_V)^{V_{lnk}}, \quad (2)$$

де  $Q_V = \frac{\rho_1}{\rho_0}$  – питома частка пустот.

Значення  $V_{lnk}$  пропонується характеризувати матрицею  $3 \times 3$ :

$$V_{lnk} = \begin{pmatrix} V_{100} & V_{011} & V_{111} \\ V_{010} & V_{101} & V_{111} \\ V_{001} & V_{110} & V_{111} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

де  $V_{ijk}$  – об’єми пор. Для різних типів ґрунтів числові значення матриці  $V_{lnk}$  будуть різні й повною мірою характеризують пружні властивості, тобто їх протиерозійну стійкість.

#### 2. Ґрунт як фрактальне порове середовище.

Фрактальне порове середовище – це таке середовище, в якому існує самоподібність як порового

простору, так і твердої матриці (твердого тіла (фази)) [3]. Згідно з рівнянням:

$$P_i \equiv V_i - V_{i+1} \quad (i=0, \dots, m-1), \quad (4)$$

це означає, що диференціали об'ємів порового простору  $P_i$  і часткових об'ємів  $V_i$  подібні за формою і відповідають масштабному співвідношенню за розміром. У загальних рисах зразки ґрунту можна представити як сукупність пор і твердих частинок, що описується так. Для введення масштабної властивості визначасмо коефіцієнт лінійної подібності  $r$ , що співвідноситься з розмірами пор  $p_i$  або частковими об'ємами, представленими їхніми середніми (або медіанними) діаметрами  $d_i$ :

$$p_{i+1} = rp_i \quad (r < 1), \quad (5)$$

$$d_{i+1} = rd_i \quad (r < 1). \quad (6)$$

Враховуючи ці очевидні тотожності, диференціали об'єму порового простору і часткові об'єми масштабуються як  $r^3$ :

$$P_{i+1} = r^3 P_i, \quad (7)$$

$$V_{i+1} = r^3 V_i. \quad (8)$$

Що передбачає:

$$P_i / V_i = \text{constant} = C \quad (i=0, \dots, m-1) \quad (9)$$

$$V_{i+1} = (1-C)V_i. \quad (10)$$

Коефіцієнти поровості під час масштабування порового середовища однорідні у всіх віртуальних фракціях.

З властивості самоподібності фрактального порового середовища випливає, що для кожної віртуальної фракції пористості стала кількість  $N$  менших об'ємів  $V_{i+1}$  (або  $P_{i+1}$ ) може бути асоційована з будь-яким об'ємом  $V_i$  (або  $P_i$ ) [2]. Тобто кожний об'єм  $V_i$  містить  $N$  менших об'ємів  $V_{i+1}$  і один асоційований поровий простір  $P_i$ :

$$V_i \equiv NV_{i+1} + P_i \quad (i=0, \dots, m-1). \quad (11)$$

Свою чергою, кожний об'єм  $V_{i+1}$  містить  $N$  об'ємів  $V_{i+2}$  і один асоційований поровий об'єм  $P_{i+1}$  і так далі. Отже,  $N$  порових об'ємів також може бути асоційовано з кожним поровим об'ємом  $P_{i+1}$  і тоді рівняння 11 набуває вигляду

$$V_0 = \sum_{i=0}^{m-1} N^i P_i + N^m V_m, \quad (12)$$

де тепер  $N^m V_m$  представляє залишковий об'єм твердої фази [2]. Рівняння (10) набуває вигляду:

$$V_{i+1} / V_i = (1-C) / N \quad (i=0, \dots, m-1). \quad (13)$$

Відповідно:

$$V_m = V_{m-j} (1-C)^j N^{-j} \quad (j=1, \dots, m). \quad (14)$$

У такому випадку значення порового простору середовища обчислюється від  $j$  до  $m$ . Подібно знаходять частковий поровий простір  $\phi_i$ , який визначається за допомогою часткового об'єму  $V_i$ :

$$\phi_i \equiv (N^i V_i - N^m V_m) / N^i V_i, \quad (15)$$

$$\phi_i = 1 - (1-C)^{m-i} \quad (i=0, \dots, m-1). \quad (16)$$

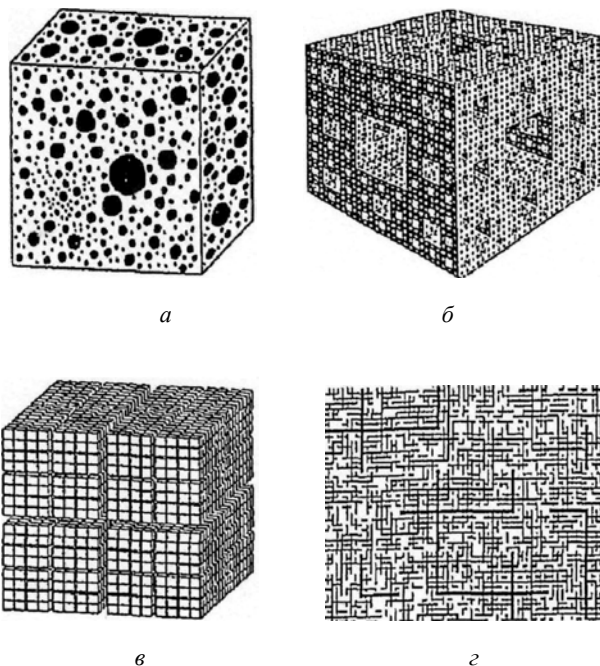


Рис. 2. Концептуальні моделі порових середовищ: а – поровий носій, що не обов'язково є фракталом; б – губка Менгера (відношення подібності  $r=1/3$ ,  $N=2$ , фрактальна розмірність  $D=2,7268$ ); в – повністю фрагментовані фрактали порового середовища ( $r=0,476$ , кількість самоподібних елементів  $N=8$ ,  $D=2,8$ ); г – поперечний перетин випадкового будь-якого повністю фрагментованого фрактального порового середовища ( $r=0,485$ , основна частина фрактальної розмірності  $D=2,92$ ,  $D=2,87$ ), який показує мережі активних розломів

Отриманий результат свідчить про те, що у фрактальному поровому середовищі, у міру того як індекс  $i$  досягає  $m$ , відповідно зменшуються як часткові об'єми, так і розміри пор, що узгоджується з основними положеннями фрактальності. В 3-D-вимірному просторі фрактальність ґрунту відображається як самоподібність кубів з розмірами (рис. 2) [3; 4].

### 3. Віртуальна фрактальна модель ерозії ґрунту.

Найчастіше з ідеальних фрактальних структур використовуються множина Кантора та його дво- та тривимірні модифікації (фрактали Серпинського) [11]. Її суть відображена на рис. 3.

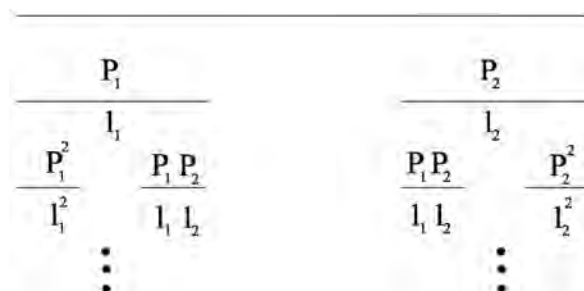


Рис. 3. Модель Кантора

Тут одиничний відрізок потрібно розділити на три рівні сегменти, з яких середній відрізок вилучаємо, а інші два позначимо як  $l_1$  і  $l_2$ . Кожний сегмент, своєю чергою, поділяється ще на три, і так до нескінченності. Сегменти  $l_1$  і  $l_2$  відповідають різним, а  $l_1 l_2$  – змішаним частинам поверхні зразка ґрунту, забезпечуючи основу для розрахунку фрактальної розмірності. Кожне  $l$  має певну величину, що виражена ймовірнісною мірою, зокрема  $P_1$  – ймовірність того, що злам з'явиться в  $l_1$ ,  $P_1 P_2$  – те саме в  $l_1 l_2$  і т.д.

Алгоритм розрахунку фрактальної розмірності в такому підході ітеративний [7] і передбачає розв'язання системи рівнянь виду:

$$\ln(n/m) \ln(l_1/l_2) - \ln(n/m-1) \ln(l_1) = q[\ln(P_1) \ln(l_2) - \ln(P_2) \ln(l_1)] \quad (17)$$

$$\alpha = \frac{\ln(P_1) + (n/m-1) \ln(P_2)}{\ln(l_1) + (n/m-1) \ln(l_2)} \quad (18)$$

$$f = \frac{(n/m-1) \ln(n/m-1) - (n/m) \ln(n/m)}{\ln(l_1) + (n/m-1) \ln(l_2)} \quad (19)$$

$$(q-1)D_q = q\alpha(q) - f(q) \quad (20)$$

де  $n$  і  $m$  – номери кожного типу лінійного сегмента;  $q$  – індекс;  $D_q$  – розмірність Рені, яка об'єднує  $f$  і  $\alpha$ .

Із аналізу рівнянь (18)–(20) випливає, що при  $q=0$ ,  $f = D_0$ ,  $q=\infty$ ,  $\alpha = \ln P_1 / \ln l_1$  і при  $q=-\infty$ ,  $\alpha = \ln P_2 / \ln l_2$ . Вимірювання лінійних параметрів ( $l_1$ ,  $l_2$ ) та розрахунок ймовірностей ( $P_1$ ,  $P_2$ ) можна виконувати стереологічно за спеціально розробленою програмою для “Квантімет 720” або адаптованою програмою “STIMAN”.

Припустимо, що процес руйнування (деструкції) фрагментів ґрунту, окрім загальної топологічної ( $D_f = 2$ ), характеризується додатково фрактальною розмірністю ( $2 \leq D_f \leq 3$ ), яка опосередковано враховує форму шорсткості та її розподіл за розмірами.

Відомо, що дефектні структури фрагмента ґрунту (кластер мікротріщин і початкових дефектів, мережа переважаних структурних елементів середовища, поверхня тріщини, зона передруйнування тощо) мають певну властивість самоподібності структури і підпорядковуються фрактальним законам розподілу і росту, тобто дефектна множина (структура руйнування) розвивається в тілі як самоподібний фрактальний кластер розмірності  $D_f$  ( $0 \leq D_f \leq 3$ ).

Можна припустити, що зруйнована структура являє собою фрактальний кластер розмірності  $D_f$ , який, в основному, збігається з дефектною структурою. Якщо для руйнування одного елемента структури характерного масштабу  $\delta$  необхідно витратити енергію  $\varepsilon_p$ , то загальну енергію  $U_p$ , витрачену

на руйнування всієї фрактальної структури, можна оцінити так [11]:

$$U_p = \varepsilon_p (L/\delta)^{D_f}, \quad (21)$$

де  $L$  – характерний розмір тіла.

Енергію, накопичену в тілі до руйнування, можна подати як:

$$U_e \approx \frac{\sigma}{2} \frac{2}{E} \delta^3 \left(\frac{L}{\delta}\right)^3, \quad (22)$$

де  $\sigma$  – характерна напруга;  $E$  – модуль пружності. Далі, якщо вважати, що вся накопичена енергія витрачається на руйнування, то легко отримати:

$$\sigma_p \approx \sigma_0 (L/\delta)^{(3-D_f)/2}, \quad (23)$$

де  $\sigma_0 = (2E\varepsilon_p/\delta^3)^{1/2}$ . Вплив розмірів тіла на міцність звичайно можна описати степеневу залежністю  $\sigma_p \approx V^{-1/m}$ , де  $V$  – характерний об'єм руйнування.

Із зіставлення показників формули (22) та  $\sigma_p \approx (L/3)^{-1/m}$  одержуємо:

$$m = 6/(D_f - 3) \quad (24)$$

Величина  $m$  безпосередньо зв'язана з геометричними характеристиками дефектної множини, зокрема з розмірністю дефектної структури. Коли значення  $D_f$  змінюється від нуля (точкові дефекти, що рідко трапляються) до трьох (весь об'єм має дефекти)  $m$  змінюються від двох до  $\infty$ , що цілком узгоджується з експериментальними значеннями  $m$ . Границя  $m \rightarrow \infty$  відповідає випадку  $D_f \rightarrow 3$  в тому разі, коли дефекти рівномірно розподілені по всьому тривимірному об'єму тіла [7].

З розглянутого випливає, що розрахунком фрактальної розмірності поверхні руйнування можна оцінювати масштабний ефект, за допомогою якого характеризуються геометричні параметри дефектної структури в твердих тілах, отже, і їх властивості міцності.

### Висновки і перспективи подальших досліджень

1. Принципи фрактальної геометрії можна використовувати для характеристики протиерозійної стійкості ґрунтів.

2. При цьому ґрунт розглядається як середовище, що складається з порового простору і твердої матриці. Зі зменшенням пор зменшуються їх часткові об'єми, що узгоджується з положеннями фрактальності.

3. Для опису віртуальної фрактальної моделі ерозії ґрунту можна використати множину Кантора. Що вище значення фрактального кластера розмірності, то більші дефекти (руйнування) має зразок ґрунту.

4. Подальша робота буде спрямована на застосування принципів фрактальності для оцінювання рівня деградації ґрунтового покриву та дослідження процесу поширення ерозії ґрунту за отриманими фрактальними розмірностями опрацьованих зразків.

**Література**

1. Structure and self similarity in silty and sandy soils the fractal approach/ Bartoli F., Phillipy R., Doirisse M., Niquet S. and Dubuit M. 1991// Journal of the Soil Science Society of America. – 1991, vol 42, № 1.– Pp.167–185.
2. Mandelbrot B.B. The Fractal Geometry of Nature. – San Francisco: W. H. Freeman. – 1984. – 468 p.
3. Michel Rieu and Garrison Sposito. Fractal Fragmentation, Soil Porosity, and Soil Water Properties: I. Theory // Soil. Sci. Soc. Am.J., vol.55, september–october 1991.
4. Michel Rieu and Garrison Sposito. Fractal Fragmentation, Soil Porosity and Soil Water Properties: II. Application // Soil. Sci. Soc. Am.J., vol.55, september – october 1991.
5. Perfect E. and Kay B.D. Fractal theory applied to soil aggregation // Journal of the Soil Science Society of America. – 1991, vol 55, № 6. P.1552–1558.
6. Tyler S.W. and Wheatcraft S.W. Application of fractal mathematics to soil water retention estimation // Journal of the Soil Science Society of America. – 1989, vol 53, № 5. P. 987–986.
7. Бобро Ю.Г. Принципы фрактальности в механике разрушения металлов / Бобро Ю.Г., Мельник В.М., Шостак А.В. // Металлы. – М.: Наука, 1997. – № 2. – С.199–222.
8. Гарбар И.И. Взаимодействие микрогеометрии и структуры металлов при трении // Трение и износ, 1985. – Т.6. – № 3. – С. 458–467.
9. Гольдштейн Р.В. Мультифрактальная геометрия разрушения и масштабный эффект / Р.В. Гольдштейн, А.Б. Масолов // ДАН. Геофизика. – 1993. – Т. 329. – № 4. – С. 429–431.
10. Иванов А.В. Аналогии в строении природных эрозионных структур и кривой Коха: предпосылки качественного сопоставления / Иванов А.В., Шешнёв. А.С., Яшков И.А. // Вестн. Том. гос. ун-та. – 2012. – № 359.– С. 188–192.
11. Кантор Г. Труды по теории множеств. – М.: Наука, 1985.

12. Мельник В.М. Растрово-электронна стереомікрофрактографія: монографія / Мельник В.М., Шостак А.В. – Луцьк, 2009. – 469 с.
13. Пузаченко Ю.Г. Приложение теории фракталов к изучению структуры ландшафта // Известия РАН. Сер. геогр. – 1997. – Вып. 2. – С. 24–40.
14. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. – М.: Мир, 1985. – 254 с.
15. Яшков И.А. Изучение эрозионной сети с помощью фрактального анализа / И.А. Яшков, А.В. Иванов // Недра Поволжья и Прикаспия. – 2005. – Вып. 44. – С. 49–58.

**Фрактальна теорія ерозії ґрунту**

В. Мельник, О. Шостак

Розглянуто питання застосування принципів фрактальної геометрії для ідентифікації та відображення ґрунту як фрактального порового середовища. Проаналізовано можливість використання множини Кантора для опису механіки руйнування фрагментів ґрунту.

**Фрактальная теория эрозии почвы**

В. Мельник, О. Шостак

Рассмотрены вопросы применения принципов фрактальной геометрии для идентификации и отображения почвы как фрактальной поровой среды. Проанализирована возможность использования множества Кантора для описания механики разрушения фрагментов почвы.

**Fractal theory of soil erosion**

V. Melnyk, O. Shostak

The issues of the of fractal geometry principles application for the identification and mapping of soil as a fractal porous medium are viewed. The possibility of use of Cantor set to describe the mechanics of soil fracture fragments is analyzed.



**НАЗЕМНЕ ЛАЗЕРНЕ СКАНУВАННЯ В ФОТОГРАМЕТРІЇ**  
 Навчальний посібник.  
 Дорожинський О.Л.  
 2014. 96 с.  
 ISBN 978-617- 607-617-9

- теоретичні засади наземного лазерного сканування
- аналіз найбільш вживаних приладів
- мобільне наземне лазерне сканування
- прикладне застосування сканування

**Нові технології – ключ до успіху геодезиста**