УДК 528.4

ДОСЛІДЖЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ТА ТОЧНОСТІ ПОБУДОВИ ЦМР ЗА ДОПОМОГОЮ БІКУБІЧНОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРПОЛЯЦІЇ

К. Бурак[1], В. Ковтун[1], Р. Левицький[1], М. Ничвид[2]
[1] Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
[2] Ужгородський національний університет

Ключові слова: інтерполяція, бікубічний сплайн, ЦМР, Surfer 11.

Постановка проблеми

Одне з головних завдань геодезії – забезпечення людства картографічними матеріалами – планами, картами місцевості та рельєфу. З розвитком технологій способи візуалізації рельєфу змінилися, з образно-графічного подання інформації на сучасні електронні способи, а також наповнені різноманітною інформацією ГІС. Найважливішою видозміною сучасних карт є відсутність масштабу побудови, елементи є векторними і змінюються відповідно до вибраного масштабу, тому для відображення рельєфу недостатньо простого зображення характерних ліній рельєфу та горизонталей, виникає необхідність відображення рельєфу за допомогою поверхні [1, 12]. Досі ЦМР [2, 13] задається масивом просторових координат точок, які описують складну поверхню рельєфу місцевості. За способом розташування точок розрізняють регулярну, нерегулярну і структуровану моделі [1]. Сучасні досягнення математики дають змогу використовувати складні функції для опису довільних поверхонь. Однією з таких довільних поверхонь є сплайн-поверхня.

Постає проблема дослідження особливостей та точності побудови ЦМР за допомогою бікубічної сплайн-інтерполяції (БСІ). Автори пропонують використання бікубічної сплайн-інтерполяції для побудови ЦМР, як такої, що точніше відображає рельєф і дозволяє будувати поверхні автоматично.

Аналіз останніх досліджень і публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Зазначимо, що нині існує декілька програмних комплексів, таких як Mathcad, Surfef, MatLab [3–5], які дають змогу будувати поверхні чи знаходити значення висот у необхідних місцях цих поверхонь, але через закритість коду програми користувачам не відомі принципи роботи використовуваних алгоритмів та принципи знаходження бікубічних поліномів для розрахунку цих висот. Водночас для опрацювання поверхонь та розрахунку точності їх побудови під час розв’язування багатьох інженерних задач необхідно працювати із самою функцією, що їх задає. Тому постає проблема знаходження цієї функції. Проаналізувавши наукові роботи з цього питання, виділимо [10], у якій з використанням неповного бікубічного сплайна, який враховує 11 вільних параметрів полінома, відкидаючи останні п’ять членів бікубічного сплайна, виконано згладжування масиву даних, отриманих методом GPS. Результатом роботи стала програма, що дозволяла згладити поверхню, отриману на регулярній сітці. Досягнута похибка у відображенні рельєфу становила 0,35 м за перепаду висот 20 м. Тому наші дослідження спрямовані на підвищення точності результатів, для чого пропонуємо використовувати повний бікубічний сплайн, розраховуючи 16 вільних параметрів полінома.

Постановка завдання

З урахуванням вищезазначених аспектів поставлено завдання – розробити програмний комплекс, що дасть змогу отримати повний бікубічний поліном для знаходження висот точок вихідної поверхні та встановлення точності відновлення рельєфу за допомогою БСІ.

Виклад основного матеріалу

Залежно від типів вихідних даних бікубічний сплайн можна подати параметрично, у вигляді форм Ерміта, кривих Безьє чи B-сплайнів [5–8].

Відомо [11], що ділянку поверхні $X = X(u,v)$; $Y = Y(u,v)$; $Z = Z(u,v)$; можна представити параметрично, наприклад, як::

$$\begin{aligned} Z(u,v) = {} & a33u^3v^3 + a32u^3v^2 + a31u^3v^1 + \\ & + a30u^3 + a23u^2v^3 + a22u^2v^2 + a21u^2v^1 + \\ & + a20u^2 + a13u^1v^3 + a12u^1v^2 + a11u^1v^1 + \\ & + a10u^1 + a03v^3 + a02v^2 + a01v^1 \end{aligned} \quad (1)$$

тобто:

$$Z(u,v) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} u^i v^j \quad (2)$$

де u, v – параметри, що змінюються в певному фіксованому діапазоні, переважно $u \epsilon [0,1]$; $v \epsilon [0,1]$; $a33, \dots, a00$ – постійні коефіцієнти в межах цієї поверхні, які можуть бути об’єднані в матрицю A_z розміром 4×4. Надалі розглядатимемо саме функцію $Z = Z(u,v)$, оскільки інтерполювання буде проводитися для висоти, що нас цікавить.

Аналогічні вирази існують для $X(u,v); Y(u,v)$. Позначимо через A_x; A_y; A_z; матриці розміром 4×4 коефіцієнтів при змінних для виразів $X(u,v); Y(u,v)$; $Z(u,v)$; відповідно і введемо вектори змінних $U = [1\ u\ u^2 u^3]$, $V = [1\ v\ \ v^2\ v^3]$ тоді:

$$A_z = \begin{bmatrix} a00 & a01 & a02 & a03 \\ a10 & a11 & a12 & a13 \\ a20 & a21 & a22 & a23 \\ a30 & a31 & a32 & a33 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$X(u,v) = U \times A_x \times V^T;$$
$$Y(u,v) = U \times A_y \times V^T;. \qquad (4)$$
$$Z(u,v) = U \times A_z \times V^T.$$

Основною задачею побудови криволінійної поверхні, що складається з бікубічних ділянок, є знаходження коефіцієнтів бікубічного многочлена A_x; A_y; A_z; ввсередині кожної ділянки через координати керуючих точок. Залежно від типу вихідних даних рівняння (1) можна подавати у вигляді форм Ерміта, Безьє чи В-сплайнів. Розглянемо ці способи представлення.

Для параметричного представлення бікубічного сплайна вихідними даними є 16 точок. Задаючи відомі значення функцій $X(u,v)$; $Y(u,v)$; $Z(u,v)$; в 16 керуючих точках, можна скласти такі матриці значень:

$$X = \begin{bmatrix} X(-1,-1) & X(-1,0) & X(-1,1) & X(-1,2) \\ X(0,-1) & X(0,0) & X(0,1) & X(0,2) \\ X(1,-1) & X(1,0) & X(1,1) & X(1,2) \\ X(2,-1) & X(2,0) & X(2,1) & X(2,2) \end{bmatrix} \qquad (5)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y(-1,-1) & Y(-1,0) & Y(-1,1) & Y(-1,2) \\ Y(0,-1) & Y(0,0) & Y(0,1) & Y(0,2) \\ Y(1,-1) & Y(1,0) & Y(1,1) & Y(1,2) \\ Y(2,-1) & Y(2,0) & Y(2,1) & Y(2,2) \end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z(-1,-1) & Z(-1,1) & Z(-1,2) & Z(-1,2) \\ Z(0,-1) & Z(0,1) & Z(0,2) & Z(0,2) \\ Z(1,-1) & Z(1,1) & Z(1,2) & Z(1,2) \\ Z(2,-1) & Z(2,1) & Z(2,2) & Z(2,2) \end{bmatrix} \qquad (7)$$

де $Z(0,0)$ – значення висоти точки з координатами $(u,v) = (0,0)$

$$u = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

$$v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

З виразу (3) можемо отримати 16 лінійних рівнянь з 16 невідомими, тому не виникає труднощів зі знаходженням коефіцієнтів.

Також бікубічний поліном можна представляти у вигляді бікубічних базових функцій (В-сплайнів), такий запис має вигляд:

$$X(u,v) = U` \times M_s \times P_x \times M_s^T \times V`^T$$
$$Y(u,v) = U` \times M_s \times P_y \times M_s^T \times V`^T \qquad (10)$$
$$Z(u,v) = U` \times M_s \times P_z \times M_s^T \times V`^T$$

де $U` = [u^3\ u^2\ u\ 1]$, $V` = [v^3\ v^2\ v\ 1]$ – вектори змінних

$M_s = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ – базова матриця, що є спільною для всіх В-сплайнів

$$P_x = \begin{bmatrix} X(0,0) & X(0,1) & X(0,2) & X(0,3) \\ X(1,0) & X(1,1) & X(1,2) & X(1,3) \\ X(2,0) & X(2,1) & X(2,2) & X(2,3) \\ X(3,0) & X(3,1) & X(3,2) & X(3,3) \end{bmatrix}$$

$$P_y = \begin{bmatrix} Y(0,0) & Y(0,1) & Y(0,2) & Y(0,3) \\ Y(1,0) & Y(1,1) & Y(1,2) & Y(1,3) \\ Y(2,0) & Y(2,1) & Y(2,2) & Y(2,3) \\ Y(3,0) & Y(3,1) & Y(3,2) & Y(3,3) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$$P_z = \begin{bmatrix} Z(0,0) & Z(0,1) & Z(0,2) & Z(0,3) \\ Z(1,0) & Z(1,1) & Z(1,2) & Z(1,3) \\ Z(2,0) & Z(2,1) & Z(2,2) & Z(2,3) \\ Z(3,0) & Z(3,1) & Z(3,2) & Z(3,3) \end{bmatrix}$$

Форма Безьє бікубічного сплайна поверхні, якщо використовувати многочлен Бернштейна, матиме такий вигляд:

$$R(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3(u) B_j^3(v) P_{ij} \qquad (12)$$

$$R(u,v) = \left(B_0^3(u) B_1^3(u) B_2^3(u) B_3^3(u)\right) \times$$
$$\times \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{30} & P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix} \times \qquad (13)$$
$$\times \left(B_0^3(v) B_1^3(v) B_2^3(v) B_3^3(v)\right)$$

де P_{ij} – опорні вершини, координати яких задаються

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i b_{i,n}(t) \qquad (14)$$

$$b_{i,n}(t) = C_i^n t^i (1-t)^{n-i} \qquad (15)$$

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!} \qquad (16)$$

Проаналізувавши наведені способи задавання сплайнів та їх фізичний зміст, можемо підсумувати, що тільки за параметричного способу сплайн проходить через кожен вузол регулярної сітки, заданої для його побудови. Тому, на думку авторів, він є єдиним, що достовірно відображатиме реальну поверхню, проходячи через кожен вузол регулярної сітки. Здебільшого вихідними даними для побудови рельєфу чи поверхні є набір даних, отриманих у результаті інструментальних вимірювань, результатами яких є значення X, Y, Z, отримані з такою точністю, що похибками їх визначення можна знехтувати, що також є причиною вибору саме параметричного способу.

Підставляючи в $Z(u,v) = U \times A_z \times V^T$ значення відповідних змінних, виконаємо спрощення і отримаємо рівняння (2). Як бачимо, з (2) для знаходження функції ***Z(u, v)*** нам необхідно знайти коефіцієнти матриці A_z (коефіцієнти a_{00}–a_{a33}). Передусім знаходимо добутки $U \times V$, в в результаті отримуємо матрицю 16×16. Ця матриця завжди буде однаковою для будь-якої поверхні, оскільки інтерполяція здійснюватиметься в умовній системі координат.

З урахуванням цього ми створили програму для обчислення висот точок всередині регулярної сітки з використанням повного бікубічного сплайна. Розроблено такий алгоритм:

1) імпорт набору значень даних інструментальних спостережень у програму та формування з них регулярної сітки, перевірка регулярності сітки;

2) перевірка, чи введені користувачем координати містяться у межах поверхні, на яку існують дані регулярної сітки;

3) вибір 16 керуючих точок, для яких визначатиметься поліном залежно від заданих користувачем координат точки, в якій необхідно виконати інтерполювання;

4) переобчислення координат 16 вузлів сітки в локальну систему координат *u* (–1;2), *v* (–1;2);

5) складання 16 поліномів для вузлових точок і знаходження значення коефіцієнтів *a00–aa33*;

6) задавши бікубічний поліном та значення умовних координат u, v, отримуємо кінцеве значення координати $Z(u, v)$.

Перевірити роботу алгоритму та програми з визначення полінома для вказаної точки запропоновано на прикладі відтворення поверхні типового рельєфу, що взятий з [9], а саме еталонів для визначення категорій складності рельєфу. Приклад ділянки рельєфу з розміщенням регулярної сітки на ньому наведено на рис. 1.

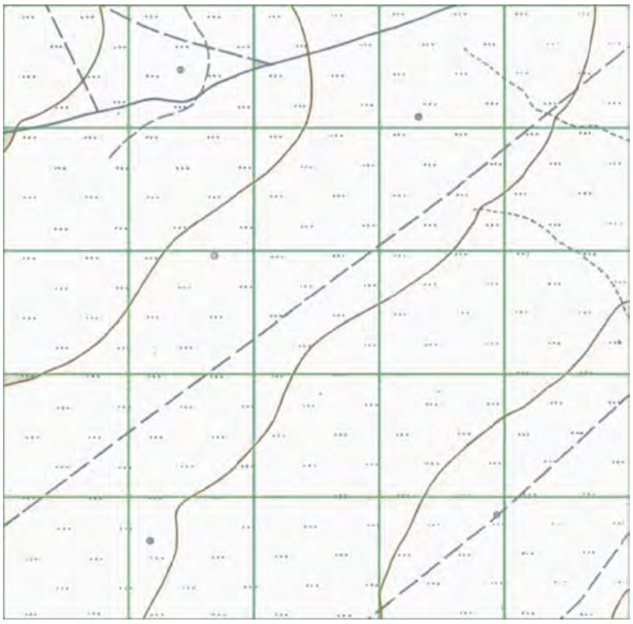

Рис. 1. Рельєф з розміщенням еталонної сітки

Щільність регулярної сітки вибрано так, щоб значення висот у вузлах сітки можна було отримувати за допомогою лінійного інтерполювання вручну. Практикою встановлено, що для досягнення задовільної точності апроксимації рельєфу у випадку набору інформації про рельєф за регулярною сіткою необхідно використовувати саме лінійну інтерполяцію.

Пояснимо цю необхідність. Теоретично і практично, якщо відомі висоти в двох сусідніх точках регулярної сітки (побудованої без урахування положення структурних ліній рельєфу: ліній водорозділу чи тальвегу), то рівноможливі три варіанти дійсного положення земної поверхні між ними. І ніяка аналітична залежність зі стовідсотковою гарантією не дасть змогу виявити, з яким варіантом в цьому конкретному випадку ми маємо справу: *а*, *б* чи *в* (див. рис. 2).

а *б* *в*

○ -точки інформаційного масиву

Рис. 2. Варіанти відтворення рельєфу за регулярною сіткою

Гарантувати потрібну точність відтворення рельєфу за такою регулярною сіткою даних можна тільки в тому випадку, коли щільність сітки дуже висока. Приблизно її можна розрахувати за очевидною формулою, яка випливає з рис. 2.

$$\Delta_{\text{гран}} = i_{max} d \ , \tag{17}$$

де $\Delta_{\text{гран}}$ – максимальна можлива похибка визначення висоти точки в проміжках між вузлами сітки за рахунок апроксимації; i_{max} – максимальний ухил місцевості, для горбистої місцевості можна прийняти 0,5.

У нашому випадку взято карту масштабу 1:5000 з висотою перерізу рельєфу 5 м, максимальний ухил місцевості 0,037, а крок регулярної сітки становить 100 м, тому за формулою (17) отримаємо максимально можливу похибку визначення висоти точки лінійною інтерполяцією, що становить 3,7 м, тобто СКП визначення висоти становитиме 1,23 м.

Аналіз точності запропоновано виконувати способом знаходження відхилень значень висот, отриманих за допомогою лінійної інтерполяції та знайдених з використанням створеної програми. На вихідній поверхні за допомогою лінійної інтерполяції знайшли висоти випадково взятих 125 точок. Задавши ці координати, обчислили висоти за допомогою розрахованого полінома.

$$\begin{aligned} Z(u,v) = {} & 0{,}10613888 \times u^3 \times v^3 - 0{,}076833333 \times u^3 \times v^2 - \\ & -0{,}33330555 \times u^3 \times v - 1{,}42109 \times 10^{-14} \times u^3 - \\ & -0{,}122083333 \times u^2 \times v^3 - 0{,}0185 \times u^2 \times v^2 + \\ & +0{,}488583333 \times u^2 \times v + 0{,}157 \times u^2 - 0{,}20355555 \times u \times v^3 + \\ & +0{,}256833333 \times u \times v^2 + 0{,}574722222 \times u \times v + 2{,}199 \times u + \\ & +0{,}10983333 \times v^3 + 0{,}012 \times v^2 - 2{,}916833333 \times v + 190{,}974 \end{aligned} \tag{18}$$

Значення координат та висот, отриманих чотирма способами, наведено в табл. 1. Приймаючи значення, отримані лінійною інтерполяцією, за ідеальні, виконали розрахунок СКП за формулою Гаусса:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2}{n}} \quad (19)$$

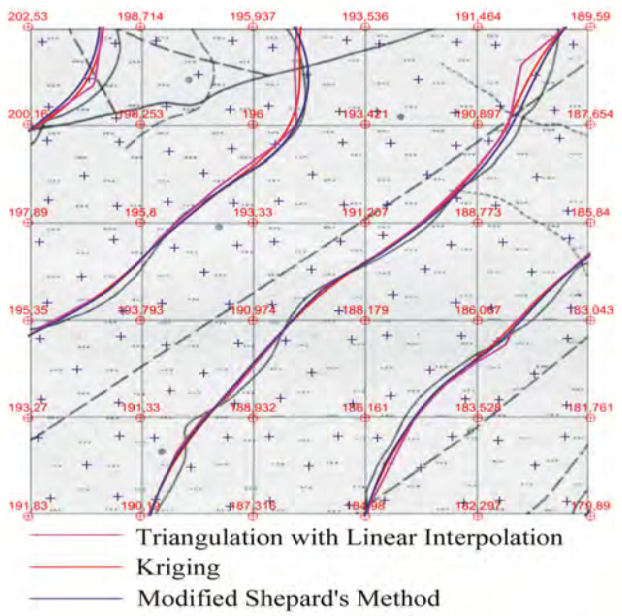

Рис. 3. Зведена карта отриманих горизонталей

Таблиця 1

Порівняльна таблиця отриманих результатів знаходження висот та їхніх похибок

№	X	Y	H *Лінійна*	Bicubic spline interpolation		Surfer 11					
						Kriging		*Triangulation with Linear Interpolation*		*Modified Shepard's Method*	
				H	Δ	H	Δ	H	Δ	H	Δ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	372,365	125,731	196,960	197,117	0,157	197,046	0,086	196,941	-0,019	197,140	0,180
2	375,089	181,446	195,862	195,912	0,050	195,850	-0,012	195,753	-0,109	195,986	0,124
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
124	323,121	18,066	198,341	198,116	-0,225	198,118	-0,223	198,041	-0,300	198,087	-0,254
125	317,160	79,336	196,711	196,728	0,017	196,733	0,022	196,621	-0,090	196,673	-0,038
				СКП=0,173		СКП=0,202		СКП=0,209		СКП=0,189	

Також автори провели дослідження впливу перепаду висот поверхні на значення похибки знаходження висоти. Значення перепаду висот та відхилень наведено в табл. 2

Таблиця 2

Значення похибки визначення висоти та перепад висот

№	Δ	H
1	0,156928	16,649
2	0,050109	15,551
…	…	…
124	-0,22506	18,03
125	0,0166	16,4
Сер.знач.	-0,06178	10,67738

На основі цих значень знайдено, що коефіцієнт кореляції Пірсона дорівнює – 0,126 із двосторонньою значущістю на рівні 0,161, для якої значущими для вибірки із 125 значень є кореляції, вищі за 0,1466, що вказує на відсутність лінійної залежності між перепадом висот та похибкою знаходження висоти. Розраховано також кореляцію Спірмена, що є непараметричною мірою залежності між двома змінними. Коефіцієнт кореляції рангу Спірмена між перепадом висот та похибкою знаходження висоти становить 0,007, таке значення коефіцієнта свідчить, що залежності між перепадом висот та похибкою знаходження висоти немає, що дозволяє використовувати бікубічну сплайн-інтерполяцію навіть у разі складного рельєфу, але автори рекомендують в такому випадку використовувати регулярну сітку з більшою щільністю точок.

Автори розрахували за вищенаведеною методикою залежність віддаленості точки від центра поверхні, що формується 16 керуючими вузлами, які слугують вихідними для розрахунку бікубічного полінома. Значення лінійної залежності, на що вказує коефіцієнт кореляції Пірсона, становить – 0,073, а значення коефіцієнта Спірмена – 0,013, що вказує на незалежність розміщення точки на поверхні від величини похибки знаходження висоти.

Висновки

Порівнявши висоти 125 випадково взятих точок всередині сітки, отриманих в результаті лінійного інтерполювання вручну і за допомогою бікубічної сплайнової інтерполяції, отримали середньоквадратичну похибку відображення рельєфу 0,1730 м. Як бачимо, похибка є дуже малою, порівняно з раніше обчисленою допустимою, тому можна стверджувати що цей спосіб інтерполювання є точним і може використовуватись для точнішого відтворення реальних поверхонь у ЦМР.

Розраховані значення кореляції вказують на відсутність впливу перепаду висот поверхні та віддаленості від центра поверхні на точність знаходження висоти способом бікубічної сплайн-інтерполяції.

Література

1. Баран П.І. Інженерна геодезія: монографія / П.І. Баран. – К.: ПАТ "ВІПОЛ", 2012.– 618 с.; іл.; – 79 с.

2. Бурштинська Х.В. Теоретичні та методологічні основи цифрового моделювання рельєфу за фотограмметричними та картометричними даними: дис. д-ра техн. наук: 05.24.02 / Національний ун-т "Львівська політехніка". – Л., 2003. – 36 с.

3. Справка по Mathcad 15: Mathcad Help-Interpolation and Prediction-B-spline Interpolation [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.ptc.com/products/mathcad/mathcad14/mathcad-func-chart.htm

4. Справка по MatLab: Documentation Center-MatLab-Mathematics-Interpolation-Interpolation-Gridden Data Interpolation [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.mathworks.com/help/matlab/grid-based-interpolation.html

5. Ануфриев И.Е. MATLAB 7 / Ануфриев И.Е., Смирнов А.Б., Смирнова Е.Н. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 1104 с.: ил.

6. Грабченко А.І. Теорія 3D моделювання: навч. посіб. / Грабченко А.І., Доброскок В.Л. – Х.: НТУ "ХПІ", 2009. – 230 с.

7. Самарский А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / Самарский А.А., Михайлов А.П.. – 2-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2005. – 320 с.

8. Горбійчук М.І. Числові методи і моделювання на ЕОМ: навч. посіб. / М.І. Горбійчук, Є.П. Пістун. – Івано-Франківськ: Факел, 2010. – 403 с.

9. Единые нормы выработки (времени) на геодезические и топографографические работы. Часть II. Камеральные работы; утв. Госкомтруд, ВЦСПС Пост.29/3-1.

10. Оскорбин Н.М.Сглаживание массива данных рельефа с использованием сплайновых поверхностей / Оскорбин Н.М., Суханов С.И., Федин Л. Ю.

11. http://ru.wikipedia.org/wiki/Бикубическая_интерполяция.html.

12. Бахарев Ф.С. Современные структуры баз данных цифрових моделей рельєфа.

13. Курсин С.Б. Способ картографического отображения двумерных распределений данных в цифровой форме / Курсин С.Б., Добротворский А.Н., Бродский П.Г.

Дослідження особливостей та точності побудови ЦМР за допомогою бікубічної сплайн-інтерполяції

К. Бурак, В. Ковтун, Р. Левицький, М. Ничвид

Розглянуто методи представлення бікубічного сплайна. Досліджено точність відтворення рельєфу за допомогою БСІ. З використанням статистичних показників доведено, що точність інтерполювання за допомогою БСІ не залежить від перепаду висот і від віддаленості від центра поверхні.

Исследование особенностей и точности построения ЦМР с помощью бикубической сплайн-интерполяции

К. Бурак, В. Ковтун, Р. Левицкий, М. Ничвид

Рассмотрены методы представления бикубического сплайна. Исследована точность воспроизведения рельефа с помощью БСИ. С использованием статистических показателей доказано, что точность интерполирования с помощью БСИ не зависит от перепада высот и от удаленности от центра поверхности.

Research of the accuracy and DEM construction using вicubic spline interpolation

K. Burak, V. Kovtun, R. Levytskyi, M. Nychvyd

Were considered methods of bicubic spline representation. Researched accuracy of terrain representation using BSI. Using statistical data was proved that the accuracy of interpolation using BSI is independent of the height difference and the distance from center of the surface.