УДК 528.06+528.1

ДЕЯКІ РЕЗУЛЬТАТИ ДОСЛІДЖЕНЬ ВПЛИВУ КОЕФІЦІЄНТА КОРЕЛЯЦІЇ КООРДИНАТ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ СЕРЕДНІХ КВАДРАТИЧНИХ ПОХИБОК ПЛОЩ ЗЕМЕЛЬНИХ ДІЛЯНОК

В.А. Рябчій, В.В. Рябчій*, М. Трегуб, А. Совгіренко
Державний вищий навчальний заклад “Національний гірничий університет”
*Національний університет “Львівська політехніка”

Ключові слова: коефіцієнт кореляції, середня квадратична похибка, земельна ділянка, координати точок кутів поворотів, частинна похідна.

Постановка проблеми

Світова і вітчизняна тенденції розвитку економіки свідчать про постійне підвищення вартості земельних ресурсів. Точність визначення координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок та обчислення їх площ впливатиме на вартість земельних ділянок.

Зважаючи на технічні, економічні, соціальні та правові складові земельних відносин в Україні, питання дослідження та удосконалення формул визначення похибок площ земельних ділянок є важливим і актуальним напрямом, що має не тільки теоретичне, а і практичне значення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

У дослідженнях результатів геодезичних вимірювань широко застосовується регресійний аналіз. Цій темі приділяли значну увагу відомі вчені: В.Д. Большакова, М.Г. Відуєва, С.П. Войтенка, П.М. Зазуляка, Г.С. Кондри, М.Ю. Маркузе, Ю.І. Маркузе, А.В. Маслова, Ю.К. Неумивакіна, К.К. Скиданенка, А.С. Чеботарева та ін.

У багатьох публікаціях, підручниках і навчальних посібниках з математичної обробки результатів вимірів [1 – 15 та ін.] наводяться формули обчислення середньої квадратичної похибки функції некорельованих і корельованих аргументів.

Для визначення коефіцієнта кореляції між довільними величинами використовують їх середні значення. У [3] М.Г. Відуєв і Г.С. Кондра наводять тлумачення відмінності середніх, що використовуються у статистиці, і середніх, одержаних за результатами геодезичних вимірів.

У публікаціях [12, 13 та ін.] досліджено питання визначення середніх квадратичних похибок площ земельних ділянок, але при цьому не враховано корельованість координат точок кутів поворотів їх меж. І для цього є вагомі причини: незначна кількість координат і неможливість надійно визначити коефіцієнт кореляції між обчисленими координатами.

Постає два питання. Перше – наскільки неврахування коефіцієнта кореляції змінює значення середньої квадратичної похибки площі земельної ділянки? І друге – правильно чи неправильно не враховувати коефіцієнти кореляції у наведеному випадку.

Невирішені частини загальної проблеми

Розглянемо застосування формул для визначення середньої квадратичної похибки площі земельної ділянки. Наведемо формулу Гаусса для обчислення площі земельної ділянки:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}) . \qquad (1)$$

Відповідно до формули (1) середні квадратичні похибки площі земельної ділянки у випадках некорельованих і корельованих координат у загальному вигляді відповідно матимуть такий вигляд:

$$m_S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 {m_{x_1}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 {m_{x_2}}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2 {m_{x_n}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_1}\right)^2 {m_{y_1}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_2}\right)^2 {m_{y_2}}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial y_n}\right)^2 {m_{y_n}}^2} , \qquad (2)$$

$$m_S = \sqrt{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 {m_{x_1}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 {m_{x_2}}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)^2 {m_{x_n}}^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial S}{\partial y_1}\right)^2 {m_{y_1}}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_2}\right)^2 {m_{y_2}}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial y_n}\right)^2 {m_{y_n}}^2 + \\ &+ 2r_{x_1,x_2} m_{x_1} m_{x_2} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} + \ldots + 2r_{x_{n-1},x_n} m_{x_{n-1}} m_{x_n} \frac{\partial S}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial S}{\partial x_n} + \\ &+ 2r_{y_1,y_2} m_{y_1} m_{y_2} \frac{\partial S}{\partial y_1}\frac{\partial S}{\partial y_2} + \ldots + 2r_{y_{n-1},y_n} m_{y_{n-1}} m_{y_n} \frac{\partial S}{\partial y_{n-1}}\frac{\partial S}{\partial y_n} + \\ &+ 2r_{x_1,y_1} m_{x_1} m_{y_1} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial y_1} + \ldots + 2r_{x_n,y_n} m_{x_n} m_{y_n} \frac{\partial S}{\partial x_n}\frac{\partial S}{\partial y_n} \end{aligned}} , \qquad (3)$$

де $\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)$ – частинні похідні по абсцисах і ординатах точок кутів поворотів відповідно; m_x, m_y – середні квадратичні похибки абсцис і ординат відповідно; $r_{x,y}$ – коефіцієнти кореляції між координатами точок кутів поворотів межі земельної ділянки.

У формулі (3) використано коефіцієнт кореляції, який характеризує тісноту кореляційного зв’язку в цьому випадку між координатами точок кутів поворотів межі земельної ділянки.

Постановка завдання

Мета статті полягає у встановленні впливу коефіцієнта кореляції координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок на значення середньої квадратичної похибки їх площ.

Виклад основного матеріалу проблеми

Коефіцієнт кореляції розроблений і застосований передусім для визначення взаємозв’язків між різнорідними статистичними величинами. Наприклад:

висота та товщина (діаметр) якоїсь породи дерев, ріст людини та розмір її взуття тощо. На основі його аналізу можна з якоюсь ймовірністю зробити економічні, соціальні прогнози.

Кількість вимірів у статистиці, звичайно, доволі велика. Під час виконання звичайних геодезичних робіт для землеустрою кількість вимірів, навпаки, незначна, особливо коли розглядати кінцевий результат – координати точок кутів поворотів меж земельних ділянок.

Взаємозалежність вимірів дуже складна і пов’язана з багатьма факторами й умовами вимірювань (погодні, інструментальні, людські тощо). Цей перелік і його деталізацію можна продовжувати ще довго, і слушно зазначено у [3], що важливою справою є визначення умов вимірювань, але це нескінченний процес. У статистиці зазвичай для визначення коефіцієнта кореляції користуються кінцевими результатами, але умови вимірювань і точність одержання вихідних даних не розглядається.

Визначення коефіцієнта кореляції результатів геодезичних вимірювань або координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок можна виконати двома способами. Перший – це вивчати умови вимірювань і враховувати усі фактори, які впливають на виміри і на кінцевий результат, а також визначати, як виконувалась математична обробка результатів вимірів. Якщо піти цим шляхом, то можна потрапити у такі хащі, що визначитись і врахувати всі фактори впливу, зважаючи на розуміння цього питання нині, буде складно або взагалі неможливо, оскільки кожен читач (дослідник) зі свого досвіду може додати такий фактор, який не був врахований.

Другий спосіб визначення коефіцієнта кореляції – це встановити тільки залежність кінцевих результатів – координат. Якщо йти цим шляхом, то тут є основна проблема – це кількість кінцевих результатів (координат точок кутів поворотів меж земельної ділянки).

Постає запитання: “Чи коректно взагалі розглядати, обчислювати і визначати коефіцієнт кореляції між координатами точок кутів поворотів меж земельних ділянок?”. Треба довести, правильно чи ні. І тут згадується фраза А.С. Чеботарьова: “Пусть требуется сопоставить урожайность пшеницы в Орловской области за ряд лет и число рождений младенцев в Патагонии за те же годы” [15]. Коментар зайвий.

Відомо, що середня квадратична похибка простої арифметичної середини визначається надійно, якщо вимірів не менше від восьми [1 та ін.]. Але формула простої арифметичної середини застосовується і за двох значень виміряної величини.

Тому розглянемо вплив коефіцієнта кореляції на значення середньої квадратичної похибки за мінімальної кількості кутів поворотів земельної ділянки. Переважно мінімальна кількість дорівнює чотирьом кутам поворотів (рис. 1).

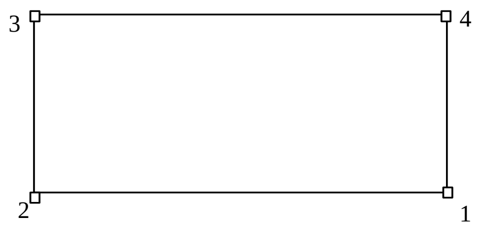

Рис. 1. Земельна ділянка з чотирма кутами поворотів

Для довільної земельної ділянки з чотирма кутами поворотів напишемо формулу обчислення площі відповідно до формули (1)

$$S = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + \right.$$
$$\left. + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)\right). \quad (4)$$

Тоді згідно з формулою (3) формула обчислення середньої квадратичної похибки площі за корельованих координат точок кутів поворотів земельної ділянки за формулою (4) запишеться так:

$$
\begin{aligned}
m_S = \Bigg(&\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 m_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 m_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 m_{x_3}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_4}\right)^2 m_{x_4}^2 + \\
&+ \left(\frac{\partial S}{\partial y_1}\right)^2 m_{y_1}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_2}\right)^2 m_{y_2}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_3}\right)^2 m_{y_3}^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y_4}\right)^2 m_{y_4}^2 + \\
&+ 2r_{x_1x_2} m_{x_1} m_{x_2} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2} + 2r_{x_1x_3} m_{x_1} m_{x_3} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_3} + \\
&+ 2r_{x_1x_4} m_{x_1} m_{x_4} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_4} + 2r_{x_2x_3} m_{x_2} m_{x_3} \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial S}{\partial x_3} + \\
&+ 2r_{x_2x_4} m_{x_2} m_{x_4} \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial S}{\partial x_4} + 2r_{x_3x_4} m_{x_3} m_{x_4} \frac{\partial S}{\partial x_3}\frac{\partial S}{\partial x_4} + \\
&+ 2r_{y_1y_2} m_{y_1} m_{y_2} \frac{\partial S}{\partial y_1}\frac{\partial S}{\partial y_2} + 2r_{y_1y_3} m_{y_1} m_{y_3} \frac{\partial S}{\partial y_1}\frac{\partial S}{\partial y_3} + \\
&+ 2r_{y_1y_4} m_{y_1} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial y_1}\frac{\partial S}{\partial y_4} + 2r_{y_2y_3} m_{y_2} m_{y_3} \frac{\partial S}{\partial y_2}\frac{\partial S}{\partial y_3} + \\
&+ 2r_{y_2y_4} m_{y_2} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial y_2}\frac{\partial S}{\partial y_4} + 2r_{y_3y_4} m_{y_3} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial y_3}\frac{\partial S}{\partial y_4} + \\
&+ 2r_{x_1y_1} m_{x_1} m_{y_1} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial y_1} + 2r_{x_1y_2} m_{x_1} m_{y_2} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial y_2} + \\
&+ 2r_{x_1y_3} m_{x_1} m_{y_3} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial y_3} + 2r_{x_1y_4} m_{x_1} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial y_4} + \\
&+ 2r_{x_2y_1} m_{x_2} m_{y_1} \frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial y_1} + 2r_{x_2y_2} m_{x_2} m_{y_2} \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial S}{\partial y_2} + \\
&+ 2r_{x_2y_3} m_{x_2} m_{y_3} \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial S}{\partial y_3} + 2r_{x_2y_4} m_{x_2} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial x_2}\frac{\partial S}{\partial y_4} + \\
&+ 2r_{x_3y_1} m_{x_3} m_{y_1} \frac{\partial S}{\partial x_3}\frac{\partial S}{\partial y_1} + 2r_{x_3y_2} m_{x_3} m_{y_2} \frac{\partial S}{\partial x_3}\frac{\partial S}{\partial y_2} + \\
&+ 2r_{x_3y_3} m_{x_3} m_{y_3} \frac{\partial S}{\partial x_3}\frac{\partial S}{\partial y_3} + 2r_{x_3y_4} m_{x_3} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial x_3}\frac{\partial S}{\partial y_4} + \\
&+ 2r_{x_4y_1} m_{x_4} m_{y_1} \frac{\partial S}{\partial x_4}\frac{\partial S}{\partial y_1} + 2r_{x_4y_2} m_{x_4} m_{y_2} \frac{\partial S}{\partial x_4}\frac{\partial S}{\partial y_2} + \\
&+ 2r_{x_4y_3} m_{x_4} m_{y_3} \frac{\partial S}{\partial x_4}\frac{\partial S}{\partial y_3} + 2r_{x_4y_4} m_{x_4} m_{y_4} \frac{\partial S}{\partial x_4}\frac{\partial S}{\partial y_4}\Bigg)^{1/2}. \quad (5)
\end{aligned}
$$

Доволі громіздка формула. І це тільки чотири кути поворотів. Але цю формулу можна зменшити для подальшого розгляду.

Для цього розглянемо формули обчислення середньої квадратичної похибки корельованих координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок (3) і (5). У всіх цих добутках під коренем – середні квадратичні похибки координат. Припустимо, що вони рівні між собою, тобто виконується умова:

$$m_{x_1} = m_{x_2} = \dots = m_{x_n} = m_{y_1} = m_{y_2} = \dots m_{y_n} = m_{x,y} . \quad (6)$$

Цю умову (6) можна прийняти, коли обчислюються допустимі середні квадратичні похибки у випадках некорельованих і корельованих координат. Тоді середню квадратичну похибку можна винести з-під кореня, що дасть змогу скороти вираз (5).

Розглянемо відому формулу обчислення коефіцієнта кореляції між величинами x і y, яка має такий вигляд:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{n\sigma_x \sigma_y} , \quad (7)$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$ – прості арифметичні середини величин x, y відповідно; σ_x, σ_y – середні квадратичні відхилення величин x, y, що обчислюються за формулами:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} , \quad (8)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n}} . \quad (9)$$

Можна припустити, що коефіцієнт кореляції для кожної подвоєної пари координат встановити неможливо, і передусім через те, що значень координат всього два (тільки одна пара). А для окремої групи або для всіх координат можна. Якщо припустити принцип дії середнього, то можна прийняти, що всі коефіцієнти кореляції рівні між собою і їх можна винести за дужки з подвоєних добутків і позначити цей загальний коефіцієнт кореляції літерою r без індексів:

$$r_{x_1,x_2} = \dots = r_{x_{n-1},x_n} = r_{y_1,y_2} = \dots = r_{y_{n-1},y_n} =$$
$$= r_{x_1,y_1} = \dots = r_{x_n,y_n} = r . \quad (10)$$

Далі у формулах (3) і (5) можна виділити такі групи сум. Перша – це квадрати частинних похідних по абсцисах точок кутів поворотів. Їх кількість дорівнює кількості кутів поворотів. Друга – квадрати частинних похідних по ординатах точок кутів поворотів. Їх кількість також дорівнює кількості кутів поворотів. Третя – подвоєні добутки частинних похідних по абсцисах між собою. Четверта – подвоєні добутки частинних похідних по ординатах між собою. П’ята – подвоєні добутки частинних похідних по абсцисах і ординатах спільно. Кількість подвоєних добутків третьої і четвертої групи n_3 і n_4 можна обчислити за формулою:

$$n_3 = n_4 = \frac{n!}{2(n-2)!} , \quad (11)$$

де n – кількість кутів поворотів.

Кількість подвоєних добутків між абсцисами і ординатами n_5 п’ятої групи дорівнюватиме:

$$n_5 = n^2 . \quad (12)$$

Загальну кількість подвоєних добутків третьої, четвертої і п’ятої груп, тобто усіх подвоєних добутків, можна обчислити за такою формулою:

$$n_{3,4,5} = \frac{n!}{(n-2)!} + n^2 . \quad (13)$$

Загальна кількість членів під коренем дорівнюватиме:

$$n_{заг} = 2n + \frac{n!}{(n-2)!} + n^2 . \quad (14)$$

Наприклад, для будь-якого чотирикутника $n_{заг} = 36$.

Визначимо частинні похідні від площі по абсцисах і ординатах формули (4):

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = \frac{1}{2}\left(y_2 - y_4\right); \ \frac{\partial S}{\partial x_2} = \frac{1}{2}\left(y_3 - y_1\right);$$
$$\frac{\partial S}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(y_4 - y_2\right); \ \frac{\partial S}{\partial x_4} = \frac{1}{2}\left(y_1 - y_3\right); \quad (15)$$

$$\frac{\partial S}{\partial y_1} = \frac{1}{2}\left(x_4 - x_2\right); \ \frac{\partial S}{\partial y_2} = \frac{1}{2}\left(x_1 - x_3\right);$$
$$\frac{\partial S}{\partial y_3} = \frac{1}{2}\left(x_2 - x_4\right); \ \frac{\partial S}{\partial y_4} = \frac{1}{2}\left(x_3 - x_1\right). \quad (16)$$

Після підстановки частинних похідних (15) і (16) у (5) і в результаті деяких перетворень (для зменшення обсягу статті вони не наведені) визначено, що сума подвоєних добутків п’ятої групи дорівнюватиме нулю, за умови, що середні квадратичні похибки координат і коефіцієнти кореляції однакові за значенням. У третій і четвертих групах сума добутків частинних похідних по взаємозв’язках між собою, крім добутків похідних з індексами (i + 1) і (i – 1), також дорівнюватимуть нулю.

Подальші перетворення дають змогу отримати таку формулу:

$$m_S = \frac{m_{x,y}}{2}\sqrt{D_{2-4}^2 + D_{3-1}^2 + D_{4-2}^2 + D_{1-3}^2 - r(D_{2-4}^2 + D_{3-1}^2 + D_{4-2}^2 + D_{1-3}^2)} , \quad (17)$$

де D – відстань між кутами поворотів (i + 1) і (i – 1).

Для земельної ділянки з чотирма кутами поворотів ці відстані – діагоналі чотирикутника, тобто

$$m_S = \frac{m_{x,y}}{2}\sqrt{2\left(D_{2-4}^2 + D_{1-3}^2\right) - 2r\left(D_{2-4}^2 + D_{1-3}^2\right)} . \quad (18)$$

Для земельної ділянки з будь-якою кількістю кутів поворотів формулу (17) можна записати у загальному вигляді:

$$m_S = \frac{m_{x,y}}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D_{(i+1)-(i-1)}^2 - r\sum_{i=1}^{n} D_{(i+1)-(i-1)}^2} . \quad (19)$$

Тепер проаналізуємо можливі значення коефіцієнтів кореляції. Очевидно, уважний читач вже сам визначив можливі варіанти, але нам треба їх навести.

Якщо коефіцієнт кореляції дорівнює або близький до плюс одиниці, то в цьому випадку під коренем буде нуль або величина, близька до нуля. А коли коефіцієнт кореляції дорівнює мінус одиниці або близький до мінус одиниці, то значення середньої квадратичної похибки площі буде вдвічі більшим або близьким до подвоєного значення, якщо коефіцієнт кореляції взагалі не враховувати.

Звісно, це крайні випадки. Значення коефіцієнтів кореляції для кожного подвоєного добутку може бути різним (індивідуальним). Але можливо підібрати таке середнє значення коефіцієнта кореляції, що його використання дасть змогу отримати таке саме значення середньої квадратичної похибки площі, як і із застосуванням коефіцієнтів кореляції кожної пари координат.

Приймемо, що коефіцієнт кореляції координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок дорівнює або близький за модулем до одиниці. У цьому випадку можна визначити формулу і побудувати лінію регресії. А що це дасть? Прогноз координат якихось нових кутів поворотів? Але ж це некоректно!

За результатами обчислень коефіцієнта кореляції за формулою (7) для різних за площею і конфігурацією земельних ділянок встановлено, що на значення коефіцієнта кореляції впливатиме орієнтування земельної ділянки, взаємне розташування кутів поворотів її межі, їх скупченість і значною мірою коефіцієнт видовженості земельної ділянки.

Тепер розглянемо геометричну суть величин, які входять у формулу обчислення коефіцієнта кореляції координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок (7). Середні значення абсцис і ординат – це фактично координати геометричного центра (центра тяжіння) земельної ділянки. Різниці в чисельнику, що перемножуються, – це відхилення абсцис і ординат від координат геометричного центра відповідно. Фактично це прирости координат точок кутів поворотів меж земельної ділянки (вершини багатокутника) відносно геометричного центра і їх сума дорівнює нулю. Значення відповідних добутків – це площі прямокутників відхилень, які можуть стикуватись між собою повністю або частково (рис. 2 і 3). Кількість прямокутників відхилень дорівнює кількості кутів поворотів земельної ділянки. На рис. 2 і 3 кожен прямокутник відхилення заштрихований у різних напрямах і різним кольором.

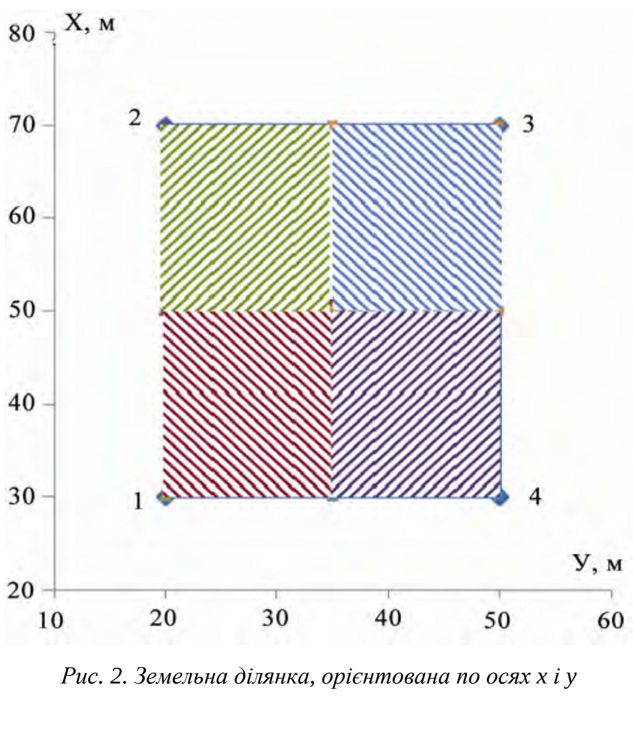

Рис. 2. Земельна ділянка, орієнтована по осях x і y

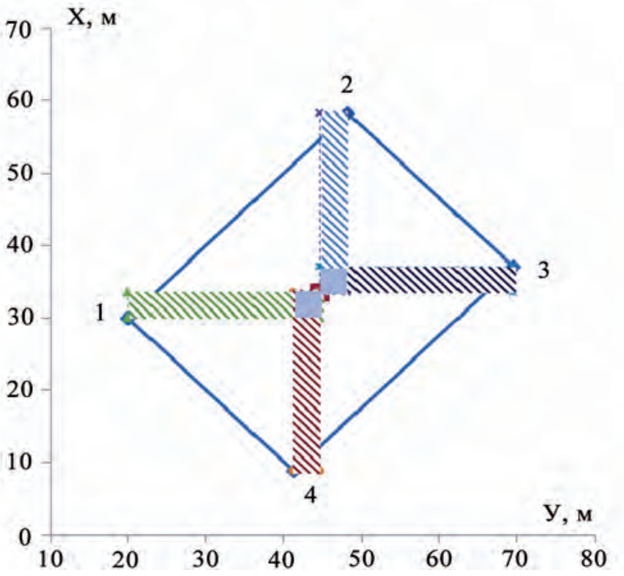

Рис. 3. Земельна ділянка з довільною орієнтацією по осях x і y

Якщо підсумувати площі цих прямокутників, то їх сумарна площа дорівнюватиме площі всієї ділянки (рис. 2) або буде меншою (рис. 3). Фактично сума площ цих прямокутників і визначає значення і знак коефіцієнта кореляції. Якщо земельна ділянка – правильний прямокутник і її сторони паралельні до осей координат, то ці прямокутники не виходять за межі земельної ділянки (рис. 2).

Розглянемо знаменник формули (7). Добуток середніх квадратичних відхилень по осях координат – також площа прямокутника. Його можна назвати середнім квадратичним прямокутником. А добуток кількості кутів поворотів на площу середнього квадратичного прямокутника дає середню квадратичну площу земельної ділянки.

Тепер уявимо, що сума площ прямокутників чисельника не дорівнює нулю. Тоді значення коефіцієнта кореляції показує відношення суми площ прямокутників чисельника до середньої квадратичної площі у знаменнику. Звісно, це відношення буде меншим від одиниці і може мати знак як мінус, так і плюс.

Крім такого тлумачення відношення значень чисельника і знаменника у формулі (7), можна розглянути і таке. Якщо суму площ прямокутників чисельника поділити на кількість кутів поворотів, то отримаємо значення площі середнього прямокутника. Після цього одержимо відношення площі середнього прямокутника до площі середнього квадратичного прямокутника. Але це вже більше стосується не визначення корельованості координат, а характеристики взаємного розташування кутів поворотів і конфігурації земельної ділянки. При цьому суму добутків різниць між координатами точок кутів поворотів і координатами геометричного центра можна брати без урахування знаків.

Розглянемо доведення формули обчислення середньої квадратичної похибки функції корельованих аргументів. Для скорочення (оскільки це відомо більшості читачів) наведемо тільки ту частину формули, де з'являється коефіцієнт кореляції.

Загальний вигляд будь-якої функції u такий:

$$u = f(x, y, z), \qquad (20)$$

де x, y, z – аргументи цієї функції.

Істинна похибка функції Δ_u дорівнює

$$\Delta_u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta_x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta_y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta_z, \quad (21)$$

де $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ – частинні похідні цієї функції по аргументах; Δ_x, Δ_y, Δ_z – істинні похибки аргументів x, y, z.

Прийнявши, що функція (21) обчислювалась n разів і частинні похідні по кожному аргументу дорівнюють одна одній, то після піднесення до квадрата і додавання, можна записати:

$$[\Delta_u\Delta_u] = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2[\Delta_x\Delta_x] + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2[\Delta_y\Delta_y] + \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2[\Delta_z\Delta_z] + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}[\Delta_x\Delta_y] + \ldots \quad (22)$$

Розділивши всі члени останнього рівняння на кількість вимірів аргументів та враховуючи формулу Гаусса, формулу (22) запишемо у вигляді:

$$m_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 m_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 m_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 m_z^2 + \\ + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{[\Delta_x\Delta_y]}{n} + \ldots \quad (23)$$

Після цього, враховуючи формулу обчислення коефіцієнта кореляції, приймемо такі припущення:

$$\Delta_x = x_i - X \cong x_i - \bar{x}, \\ \Delta_y = y_i - Y \cong y_i - \bar{y}, \quad (24) \\ \Delta_z = z_i - Z \cong z_i - \bar{z}$$

і також:

$$m_x = \sqrt{\frac{\Delta_x\Delta_x}{n}} \cong \sigma_x = \sqrt{\frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}}, \\ m_y = \sqrt{\frac{\Delta_y\Delta_y}{n}} \cong \sigma_y = \sqrt{\frac{(y_i - \bar{y})^2}{n}}, \quad (25) \\ m_z = \sqrt{\frac{\Delta_z\Delta_z}{n}} \cong \sigma_z = \sqrt{\frac{(z_i - \bar{z})^2}{n}}.$$

З урахуванням прийнятих припущень (24) і (25) одержуємо формулу (3).

Якщо відхилення аргументів від середніх значень цих аргументів незначні, то таке припущення можливе. Але прирівнювати відхилення абсцис і ординат точок кутів поворотів межі земельної ділянки від їх середніх значень до похибок цих координат, враховуючи їх величини, некоректно. Середнє значення абсцис і ординат не є тим значенням, яке найбільше наближене до істинного значення координат точок кутів поворотів. Зауважимо, що ці доведення стосуються тільки наведеного випадку.

Усе, наведене вище, розглядалось за припущення, що виконується умова (6), тобто абсциси і ординати точок кутів поворотів земельної ділянки визначені рівноточно. Але здебільшого значення середніх квадратичних похибок координат різні й це треба враховувати. Для цього, у випадку нерівноточних значень абсцис і ординат, для визначення коефіцієнта кореляції необхідно враховувати їх ваги.

Як відомо, крім класичного, є важливе визначення ваг вимірів, а саме: це такі величини (коефіцієнти), які дають змогу виконувати спільні математичні дії з результатами нерівноточних вимірів [11].

Якщо взагалі використовувати коефіцієнт кореляції та обчислювати його за координатами, тоді необхідно використовувати формулу загальної арифметичної середини і відповідні відхилення. Тут може постати питання: "А взагалі, якщо середні квадратичні відхилення у формулі (7) різні за точністю, то як це треба враховувати?". Можливі такі випадки:

1) усі величини координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок x і y визначено рівноточно;

2) величини x і y кожні окремо визначено рівноточно, а між собою – ні;

3) величини x і y між собою визначено рівноточно, а окремо – ні;

4) усі величини x і y визначено нерівноточно.

Якщо це так, то треба знайти ваги отриманих значень величин x і y. І тоді формула обчислення коефіцієнта кореляції у загальному вигляді може бути такою:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{P_{x_i}}(x_i - \bar{x}_з)\sqrt{P_{y_i}}(y_i - \bar{y}_з)}{n\sigma_x\sigma_y}, \quad (26)$$

де σ_x і σ_y – обчислюються за формулою загальної арифметичної середини:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{x_i}(x_i - \bar{x}_з)^2}{n}}, \quad (27)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}P_{y_i}(y_i - \bar{y}_з)^2}{n}}. \quad (28)$$

П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва та М.Д. Йосипчук у [10] пишуть: "Головне застосування кореляційного аналізу – розв'язання задач наукового прогнозу…". А який прогноз можна зробити, якщо коефіцієнт кореляції координат точок кутів поворотів меж земельних ділянок за результатами обчислень не дорівнюватиме нулю? Вочевидь, ніякого прогнозу.

Тому можна припустити, що під час обчислення середньої квадратичної похибки площі земельної ділянки подвоєні добутки і коефіцієнти кореляції враховувати не потрібно. Приклад такого підходу є. Це формула Гаусса для обчислення середньої квадратичної похибки вимірювання за істинними похибками. Гаусс відмовився від подвоєних добутків.

Наведене вище зовсім не означає, що коефіцієнт кореляції не потрібно враховувати в інших випадках. Щоразу це потрібно вирішувати індивідуально і роботи видатних вчених показують, що в багатьох випадках визначення коефіцієнта кореляції та його врахування має велике значення для прогнозування, розроблення методик, підвищення ефективності оцінки точності тощо.

Висновки та пропозиції

1. Сума квадратів і подвоєних добутків частинних похідних по координатах від площі у формулі (3) дорівнює нулю (без урахування значень середніх квадратичних

похибок абсцис і ординат та відповідних коефіцієнтів кореляції). Тому обґрунтування значення коефіцієнта кореляції, яке необхідно прийняти, обчислюючи допустиму середню квадратичну похибку площі, сьогодні залишається неможливим.

2. Обчислювати коефіцієнт кореляції за значеннями абсцис і ординат координат точок кутів поворотів межі земельної ділянки недоцільно і некоректно, оскільки при цьому його значення залежатиме від орієнтування земельної ділянки, її конфігурації, скупченості кутів поворотів межі земельної ділянки і коефіцієнта видовженості.

3. На підставі двох попередніх висновків можна обґрунтовано стверджувати, що для обчислення фактичної та допустимої середніх квадратичних площ земельної ділянки необхідно користуватись формулою (2).

Література

1. Большаков В.Д. Теория ошибок наблюдений: учебник для вузов / В.Д. Большаков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра, 1983. – 223 с.
2. Видуев Н.Г. Вероятностно-статистический анализ погрешностей измерений / Н.Г. Видуев, Г.С. Кондра. – М.: Недра, 1969. – 320 с.
3. Войтенко С.П. Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів: навч. посіб. / С.П. Войтенко. – К.: КНУБА, 2003. – 216 с.
4. Гайдаев П.А. Теория математической обработки геодезических измерений / П.А. Гайдаев, В.Д. Большаков. – М.: Недра, 1969. – 400 с.
5. Мазмишвили А.И. Теория ошибок и метод наименьших квадратов / А.И. Мазмишвили. – М.: Недра, 1978. – 311 с.
6. Маркузе М.Ю. Оценка точности определения площадей земельных участков застроенных территорий: автореф. … канд. техн. наук по специальности 05.24.04 – кадастр и мониторинг земель.
7. Маркузе Ю.И. Влияние корреляции координат вершин многоугольника на точность вычисления площадей / Ю.И. Маркузе [Текст] // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1998. – № 2.
8. Маслов А.В. Влияние корреляционной связи погрешностей положения точек контура на погрешность его площади / А.В. Маслов, А.Г. Юнусов [Текст] // Научные труды ГУЗ. – 1984.
9. Неумывакин Ю.К. О точности определения положения межевых знаков / Ю.К. Неумывакин, М.А. Мохаммед [Текст] // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 1993. – № 9.
10. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: навч. посіб. / П.М. Зазуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. – Львів: Растр-7, 2007. – 408 с.
11. Рябчій В.А. Теорія похибок вимірювань: навч. посіб. / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій. – Д.: Національний гірничий університет, 2006. – 166 с.
12. Рябчій В.А. Визначення допустимих значень середніх квадратичних похибок обчислення площ земельних ділянок у різних типах населених пунктів / В.А. Рябчій, В.В. Рябчій, М.В. Трегуб [Текст] // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – 2011. – Вип. 75. – С. 157–167.
13. Рябчій В.В. Дослідження та апроксимація функції визначення допустимих середніх квадратичних похибок площ земельних ділянок / В.В. Рябчій, М.В. Трегуб [Текст] // Геодезія, картографія та аерофотознімання. – 2012. – Вип. 76. – С. 117–126.
14. Смирнов Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика в приложении к геодезии / Н.В. Смирнов, Д.А. Белугин. – М.: Недра, 1969. – 379 с.
15. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей: учебник для геодезических вузов и факультетов / А.С. Чеботарев. – М.: Геодезиздат, 1958. – 606 с.

Деякі результати досліджень впливу коефіцієнта кореляції координат при обчисленні середніх квадратичних похибок площ земельних ділянок

В.А. Рябчій, В.В. Рябчій, М. Трегуб, А. Совгіренко

Наведено дослідження впливу коефіцієнта кореляції на обчислення середніх квадратичних похибок площ земельних ділянок. Визначити коефіцієнт кореляції між координатами точок кутів поворотів межі земельної ділянки практично неможливо. Обчислювати його за значеннями абсцис і ординат точок кутів поворотів межі земельної ділянки недоцільно і некоректно. Пропонується під час обчислення середньої квадратичної похибки площі земельної ділянки коефіцієнт кореляції не враховувати.

Некоторые результаты исследований влияния коэффициента корреляции координат при вычислении средних квадратических погрешностей площадей земельных участков

В.А. Рябчий, В.В. Рябчий, Н. Трегуб, А.Совгиренко

Приведены исследования влияния коэффициента корреляции при вычислении средних квадратических погрешностей площадей земельных участков. Определить коэффициент корреляции между координатами углов поворотов границы земельного участка практически невозможно. Вычислять его по значениям абсцисс и ординат углов поворотов границы земельного участка нецелесообразно и некорректно. Предлагается при вычислении средней квадратической погрешности площади земельного участка коэффициент корреляции не учитывать.

Some results of researches of influence coefficient of correlation of coordinates in the calculation of the mean square errors of land parcels areas

V.A. Riabchii, V.V. Riabchii, M. Trehub, A. Sovgirenko

Defined the problem of determination the coefficient of correlation for the calculation of mean square errors of land parcels areas. Found that nowadays the definition of the correlation coefficient of the boundaries marks coordinates is almost impossible. In addition it's calculation according to the values of coordinates abscissa and ordinate of the boundaries marks of land parcels is inappropriate and incorrect. Made suggestions to ignore the correlation coefficient of coordinates for calculations of the mean square errors of land parcels areas.