УДК 528.33:551.24

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФОРМУЛ ДЛЯ ПОТЕНЦІАЛУ ТА ЙОГО РАДІАЛЬНИХ ПОХІДНИХ ТРИШАРОВИХ КУЛЬОВИХ ТА ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПЛАНЕТ

М. Фис, Ю. Голубінка, М. Юрків
Національний університет "Львівська політехніка"

Ключові слова: потенціал, еліпсоїдальна планета, радіальна похідна, кульова планета.

Постановка проблеми

Для визначення внеску еліпсоїдальності планети в потенціал та його радіальні похідні необхідні формули для їх обчислення. Щоб перевірити отримані співвідношення, треба звірити їх з відомими виразами для кульової планети, які випливають з класичної теорії потенціалу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, які стосуються вирішення цієї проблеми

Потенціал однорідної кульової та еліпсоїдальної планети визначається за відомими формулами [4, 8]. Якщо розподіл мас всередині планети – кусково-неперервна функція, алгоритм визначення значно ускладнюється і для сферично-симетричного випадку він наведений у працях [2, 3]. Для еліпсоїда в статті [3] подано відповідні співвідношення, що визначають величину гравітаційного поля. Проте формули для радіальних похідних не наведено.

Постановка завдання

Визначити потенціал та його радіальні похідні до другого порядку включно для кульової та еліпсоїдальної планети і порівняти їх між собою.

Виклад основного матеріалу

Для планет земної групи (Земля, Марс, Венера) та супутника Місяця розподіл мас передбачається кусково-неперервною функцією, а кількість стрибків дорівнює трьом, тобто функція стрибків має вигляд

$$\delta = \begin{cases} \delta_1, & \rho \in G_1\left(0 = \rho_0 \le \rho \le \rho_1\right); \\ \delta_2, & \rho \in G_2\left(\rho_1 \le \rho \le \rho_2\right); \\ \delta_3, & \rho \in G_3\left(\rho_2 \le \rho \le \rho_3 = 1\right); \end{cases} \tag{1}$$

де ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3 – відносні радіуси залягання стрибків та точки $P\left(\rho,\theta,\lambda\right)$.

Виникає питання внеску такого розподілу як у внутрішній, так і у зовнішній потенціал планети. Для цього використовуємо методику, описану в статті [3]. Розпишемо її детальніше для цього випадку.

Потенціал V точки $P \in G_i$ кусково-неперервного розподілу мас надр планети є сумою внутрішнього потенціалу W_i^b в G_i, зовнішнього W_i^z для тіл G_i ($i < l$), а також постійного W_i^p в порожнинах сфероїдальних сегментів G_i ($i > l$):

$$W_i^z = f\sum_{i=1}^{l-1}\frac{M_{G_i}}{\rho \cdot R}, \; M_{G_i} = \delta_i\left(\rho_i^3 - \rho_{i-1}^3\right)V_k,$$

$$W_i^b = \frac{fV_k\delta_i}{2R}\left(3\rho_i^2 - \rho^2\right), \; W_i^p = \frac{3fV_k\delta_i}{2R}\left(\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2\right), \tag{2}$$

де V_k – об'єм кулі (для еліпсоїда – V_τ), f – гравітаційна стала, R – радіус кулі.

Для еліпсоїдальних тіл τ_i (для простоти розглядаємо еліпсоїд обертання) також вирізняють три типи потенціалів: внутрішній – $W_{\tau_i}^b\left(\delta_j\right)$, зовнішній – $W_{\tau_i}^z\left(\delta_j\right)$, постійний – $W_{G_i}^P\left(\delta_j\right)$ в порожнині еліпсоїдального сегмента $G_i\left(\rho_{i-1} \le \rho \le \rho_i\right)$:

$$W_{\tau_i}^b\left(\delta_j\right) = \frac{3fV_\tau}{4}\delta_j\left[\rho_i^2 M_{00}\left(0\right) - ,\right.$$

$$\left.-\rho^2\left[M_{10}\left(0\right)\sin^2\theta + M_{01}\left(0\right)\cos^2\theta\right]\right], \quad P \in \tau_i,$$

$$W_{\tau_i}^z\left(\delta_j\right) = \frac{3}{4}fV_\tau\delta_j\rho_i^3\left[M_{00}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right) - \right.$$

$$\left.-\rho^2\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta + M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\right]\right], \quad P \notin \tau_i, \tag{3}$$

$$W_{G_i}^P\left(\delta_j\right) = \frac{3fV_\tau}{4}\delta_j\left(\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2\right), \quad P \notin G_i \cap P \in \tau_{i-1}.$$

Для обчислення величин $M_{kt}\left(\xi\right)$ визначаємо корінь рівняння $\frac{x^2+y^2}{a^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1$, розв'язок якого в сферичній системі координат має вигляд:

$$\frac{\xi}{a^2} = \frac{\rho^2\left(\sin^2\theta + \gamma^2\cos\theta\right) - \left(1+\gamma^2\right)}{2} +$$

$$+\frac{\sqrt{\left(\rho^2\left(\sin^2\theta + \gamma^2\cos\theta\right) - \left(1+\gamma^2\right)\right)^2 - 4\gamma^2\left(1-\rho^2\right)}}{2},$$

$$\gamma = \frac{c}{a}. \tag{4}$$

Важливо зауважити, що еліпсоїдальна координата $\frac{\xi}{a_i^2}$ відносно еліпсоїда $\tau_i\left(0 \le \rho \le \rho_i\right)$ виражається щодо основного τ так:

$$\frac{\xi}{a_i^2} = \frac{\xi}{a^2}\left(\frac{1}{\rho_i}\right)^2. \tag{5}$$

Тоді величини $M_{kt}(\xi)$ запишуться так:

$$M_{kt}(\xi)=a^{2k}c^{2t}\int\limits_{0,\xi}^{\infty}\frac{du}{\left(a^2+u\right)^{k+1}\left(c^2+u\right)^{t+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\gamma^{2t}\int\limits_{0,\xi}^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u}{a^2}\right)^{k+1}\left(\gamma^2+\frac{u}{a^2}\right)^{t+\frac{1}{2}}a^3}=$$

$$=2\gamma^{2t}\int\limits_{\sqrt{\gamma^2+\frac{\xi}{a^2}}}^{\infty}\frac{dz}{z^{2t+1}\left(z^2+e^2\right)^{k+1}a}. \qquad (6)$$

Значення (6) можна знаходити за допомогою рекурентних співвідношень [6], проте доцільніше обчислювати їх розкладом у ряди. Тоді отримуємо:

$$M_{kt}(\xi)=\frac{2\gamma^{2t}}{(2k+2t+1)\xi^{\frac{2k+2t+1}{2}}}+$$

$$+\frac{2\gamma^{2t}}{(k)!}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\left(1-\gamma^2\right)^{2l}(k+l)!}{l!(2k+2t+2l+1)\left(\gamma^2+\frac{\xi}{a^2}\right)^{\frac{2k+2t+2l+1}{1}}}.$$

Випишемо потенціали кульової планети для різних випадків:

1. $P\in G_1=\tau_0$,

$$V_1=W_{G_1}^b+W_{G_2}^p+W_{G_3}^p=$$

$$=\frac{fV_k}{2R}\left[\left(\delta_1\left(3\rho_1^2-\rho^2\right)+3\sum_{i=2}^{3}\delta_i\left(\rho_i^2-\rho_{i-1}^2\right)\right)\right],$$

2. $P\in G_2$, $\quad V_2=W_{G_1}^z+W_{G_2}^b+W_{G_3}^p$, де

$$W_{G_1}^z=\frac{fM_{G_1}}{\rho R}=\frac{fV_k}{R}\frac{\delta_1\rho_1^3}{\rho},$$

$$W_{G_3}^p=\frac{3fV_k\delta_3}{2R}\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right),$$

$$W_{G_2}^b=W_{\tau_2}^b-W_{\tau_1}^z=\frac{fV_k}{2R}\left[\left(3\rho_2^2-\rho^2\right)\delta_2-\frac{\delta_2\rho_1^3}{\rho}\right].$$

3. $P\in G_3$, $\quad V_3=W_{G_1}^z+W_{G_2}^z+W_{G_3}^b$, де

$$W_{G_1}^z=\frac{fV_k}{R}\frac{\delta_1\rho_1^3}{\rho},\; W_{G_2}^z=\frac{fV_k}{\rho R}\left(\rho_2^3-\rho_1^3\right)\delta_2,$$

$$W_{G_3}^b=W_{\tau_3}^b-W_{\tau_2}^z=\frac{fV_k}{2R}\left[\left(3\rho_3^2-\rho^2\right)\delta_3-\frac{2\delta_3\rho_2^3}{\rho}\right].$$

4. $P\notin\tau$,

$$V_4=\frac{fV_k}{R\rho}\left[\delta_1\rho_1^3+\delta_2\left(\rho_2^3-\rho_1^3\right)+\delta_3\left(\rho_3^3-\rho_2^3\right)\right].$$

Отже, потенціал визначається так:

$$V=\begin{cases}\frac{1}{2}\frac{fV_k}{R}\left[\delta_1\left(3\rho_1^2-\rho^2\right)+3\sum\limits_{i=2}^{3}\delta_i\left(\rho_i^2-\rho_{i-1}^2\right)\right], & P\in G_1\left(0=\rho_0\le\rho\le\rho_1\right);\\ \frac{fV_k}{R}\left[\frac{(\delta_1-\delta_2)\rho_1^3}{\rho}+\frac{\delta_2\left(3\rho_2^2-\rho^2\right)}{2}+\frac{3\delta_3\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right)}{2}\right], & P\in G_2\left(\rho_1\le\rho<\rho_2\right);\\ \frac{fV_k}{R}\left[\frac{(\delta_1-\delta_2)\rho_1^3}{\rho}+\frac{(\delta_2-\delta_3)\rho_2^3}{\rho}+\frac{\delta_3}{2}\left(3\rho_3^2-\rho^2\right)\right], & P\in G_3\left(\rho_2<\rho\le\rho_2=1\right);\\ \frac{fV_k}{R}\left[\frac{\delta_1\rho_1^3+\delta_2\left(\rho_2^3-\rho_1^3\right)+\delta_3\left(\rho_3^3-\rho_2^3\right)}{\rho}\right], & P\in G_3\left(\rho_2<\rho\le\rho_2=1\right).\end{cases} \qquad (7)$$

Тоді його першу і другу похідні, відповідно, обчислюють так:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\begin{cases}-\frac{fV_k\delta_1}{R}\rho, & P\in G_1;\\ -\frac{fV_k}{R}\left[\frac{(\delta_1-\delta_2)\rho_1^2}{\rho^2}+\delta_2\rho\right], & P\in G_2;\\ -\frac{fV_k}{\rho^2R}\left[(\delta_1-\delta_2)\rho_1^2+\rho_2^2(\delta_2-\delta_3)+\delta_3\rho^3\right], & P\in G_3;\\ -\frac{fV_k}{\rho^2R}\left[\delta_1\rho_1^3+\delta_2\left(\rho_2^3-\rho_1^3\right)+\delta_3\left(\rho_3^3-\rho_2^3\right)\right], & P\in R^3\setminus\tau;\end{cases} \qquad (8)$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial\rho^2}=\begin{cases}-\frac{fV_k\delta_1}{R}, & P\in G_1;\\ \frac{fV_k}{R}\left[\frac{2(\delta_1-\delta_2)\rho_1^3}{\rho^3}-\delta_2\right], & P\in G_2;\\ \frac{fV_k}{R}\left[\frac{2\left((\delta_1-\delta_2)\rho_1^2+\rho_2^2(\delta_2-\delta_3)\right)}{\rho^3}-\delta_3\right], & P\in G_3;\\ \frac{fV_k}{R}\left[\frac{2\left(\delta_1\rho_1^3+\delta_2\left(\rho_2^3-\rho_1^3\right)\right)}{\rho^3}+\delta_3\left(\rho_3^3-\rho_2^3\right)\right] & P\in R^3\setminus\tau.\end{cases} \qquad (9)$$

Аналогічно визначаємо потенціал та його похідні кусково-неперервної функції розподілу мас еліпсоїдальної планети τ:

1. $V=W_{G_1}^b(\delta_1)+W_{G_2}^P(\delta_1)+W_{G_3}^P(\delta_1)$, $P\in G_1$. $\qquad$ (10)

2. $V=W^{z}_{G_1}(\delta_1)+W^{b}_{G_2}(\delta_2)+W^{P}_{G_3}(\delta_3)=$

$$=W^{z}_{\tau_0}(\delta_1-\delta_1)+W^{b}_{\tau_1}(\delta_2)+W^{P}_{G_3}(\delta_3),\quad P\in G_2. \qquad (11)$$

3. $V=W^{z}_{G_1}(\delta_1)+W^{z}_{G_2}(\delta_2)+W^{b}_{G_3}(\delta_3)=$

$$=W^{z}_{\tau_0}(\delta_1-\delta_2)+W^{z}_{\tau_1}(\delta_2-\delta_2)+W^{b}_{\tau}(\delta_3),\; P\in G_3. \qquad (12)$$

4. $V=W^{z}_{G_1}(\delta_1)+W^{z}_{G_2}(\delta_2)+W^{z}_{G_3}(\delta_3)=$

$$=W^{z}_{\tau_0}(\delta_1-\delta_2)+W^{z}_{\tau_1}(\delta_2-\delta_3)+$$
$$+W^{z}_{\tau}(\delta_3),\quad P\notin\tau. \qquad (13)$$

Запишемо вищенаведені формули (10)–(13) у розгорнутому вигляді:

$$V=\frac{3}{2}fV_\tau\begin{cases}\frac{\delta_1}{2}\left(\rho_1^2M_{00}(0)-\rho^2\left[M_{10}(0)\sin^2\theta+M_{01}(0)\cos^2\theta\right]\right)+\sum\limits_{i=2}^{3}\delta_i\left(\rho_i^2-\rho_{i-1}^2\right), & P\in G_1;\\ \frac{(\delta_1-\delta_2)\rho_1^3}{2}\left(M_{00}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)-\rho^2\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)\sin^2\theta+M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)\cos^2\theta\right]\right)+ & \\ +\frac{\delta_2}{2}\left(\rho_1^2M_{00}(0)-\rho^2\left[M_{10}(0)\sin^2\theta+M_{01}(0)\cos^2\theta\right]\right)+\delta_3\left(\rho_3^2-\rho_2^2\right), & P\in G_2;\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3}{2}\left(M_{00}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)-\rho^2\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta+M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\cos^2\theta\right]\right)+ & \\ \qquad +\frac{\delta_3}{2}\left(\rho_3^2M_{00}(0)-\rho^2\left[M_{10}(0)\sin^2\theta+M_{01}(0)\cos^2\theta\right]\right), & P\in G_3;\\ \sum\limits_{i=1}^{2}\frac{(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3}{2}\left(M_{00}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)-\rho^2\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta+M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\cos^2\theta\right]\right)+ & \\ \qquad +\frac{\delta_3}{2}\left(\rho_3^2M_{00}(\xi)-\rho^2\left[M_{10}(\xi)\sin^2\theta+M_{01}(\xi)\cos^2\theta\right]\right), & P\notin\tau.\end{cases} \qquad (14)$$

У диференціювання в (14) входить змінна інтегрування за допомогою такої рівності:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}p(x,u)\frac{du}{Q(u)}=\int\limits_{\varphi(x)}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}p(x,u)\frac{du}{Q(u)}-$$
$$-p(x,\varphi(x))\frac{1}{Q(\varphi(x))}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi(x)). \qquad (15)$$

Зауважимо, що, знаходячи першу похідну, нижню границю вважаємо постійною, оскільки $\varphi(x)$ визначається з рівняння:

$$p(x,\varphi(x))=$$
$$=\frac{x^2}{a^2+\varphi(x)}+\frac{y^2}{b^2+\varphi(x)}+\frac{z^2}{c^2+\varphi(x)}-1=0. \qquad (16)$$

На підставі цього для радіальної похідної запишемо:

$$\frac{\partial V}{\partial\rho}=\frac{3}{2}fV_\tau\rho\begin{cases}-\delta_1\left[M_{10}(0)\sin^2\theta+M_{01}(0)\cos^2\theta\right], & P\in G_1;\\ -\rho_1^3(\delta_1-\delta_2)\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)\sin^2\theta+M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)\cos^2\theta\right]- & \\ \qquad -\delta_2\left[M_{10}(0)\sin^2\theta+M_{01}(0)\cos^2\theta\right], & P\in G_2;\\ -\sum\limits_{i=1}^{2}(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta+M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\cos^2\theta\right]- & \\ \qquad -\delta_3\left[M_{10}(0)\sin^2\theta+M_{01}(0)\cos^2\theta\right], & P\in G_3;\\ -\sum\limits_{i=1}^{2}(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta+M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\cos^2\theta\right]- & \\ \qquad -\delta_3\left[M_{10}(\xi)\sin^2\theta+M_{01}(\xi)\cos^2\theta\right], & P\notin\tau.\end{cases} \qquad (17)$$

Знаходження другої похідної дещо складніше і громіздкіше, оскільки формула (15) використовується повністю. Отже,

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} = \frac{3}{2} f V_\tau \begin{cases}
-\delta_1\left[M_{10}(0)\sin^2\theta + M_{01}(0)\cos^2\theta\right], & P \in G_1; \\
-\rho_1^3(\delta_1-\delta_2)\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)\sin^2\theta + M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_1^2}\right)\cos^2\theta\right]- & \\
\quad -\delta_2\left[M_{10}(0)\sin^2\theta + M_{01}(0)\cos^2\theta\right]- & \\
\quad -\rho_1^3(\delta_1-\delta_2)\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\rho}{\left(1+\frac{\xi}{a^2}\right)\left(\gamma^2+\frac{\xi}{a^2}\right)}, & P \in G_2; \\
-\sum_{i=1}^{2}(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta + M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\cos^2\theta\right]- & \\
\quad -\sum_{i=1}^{2}(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\rho}{\left(1+\frac{\xi}{a^2}\right)\left(\gamma^2+\frac{\xi}{a^2}\right)}- & \\
\quad -\delta_3\left[M_{10}(0)\sin^2\theta + M_{01}(0)\cos^2\theta\right], & P \in G_3; \\
-\sum_{i=1}^{2}(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3\left[M_{10}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\sin^2\theta + M_{01}\left(\frac{\xi}{\rho_i^2}\right)\cos^2\theta\right]- & \\
\quad -\sum_{i=1}^{2}(\delta_i-\delta_{i+1})\rho_i^3\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\rho}{\left(1+\frac{\xi}{a^2}\right)\left(\gamma^2+\frac{\xi}{a^2}\right)}- & \\
\quad -\delta_3\left[M_{10}(\xi)\sin^2\theta + M_{01}(\xi)\cos^2\theta\right]- & \\
\quad -\frac{\partial\xi}{\partial\rho}\frac{\delta_3\rho}{\left(1+\frac{\xi}{a^2}\right)\left(\gamma^2+\frac{\xi}{a^2}\right)}, & P \notin \tau.
\end{cases} \tag{18}
$$

Величину $\frac{\partial\xi}{\partial\rho}$ визначаємо так:

$$
\frac{\partial\xi}{\partial\rho} = a^2\rho\left(\sin^2\theta+\gamma^2\cos\theta\right)\times\left(1+\frac{\left(\rho^2\left(\sin^2\theta+\gamma^2\cos\theta\right)-\left(1+\gamma^2\right)\right)+2\gamma^2}{\sqrt{\left(\rho^2\left(\sin^2\theta+\gamma^2\cos\theta\right)-\left(1+\gamma^2\right)\right)^2-4\gamma^2\left(1-\rho^2\right)}}\right). \tag{19}
$$

Параметри тришарової моделі густини одержимо для Землі, усереднюючи відому референцну модель PREM [2], а параметри еліпсоїда з [4]. Результати записуємо в табл. 1.

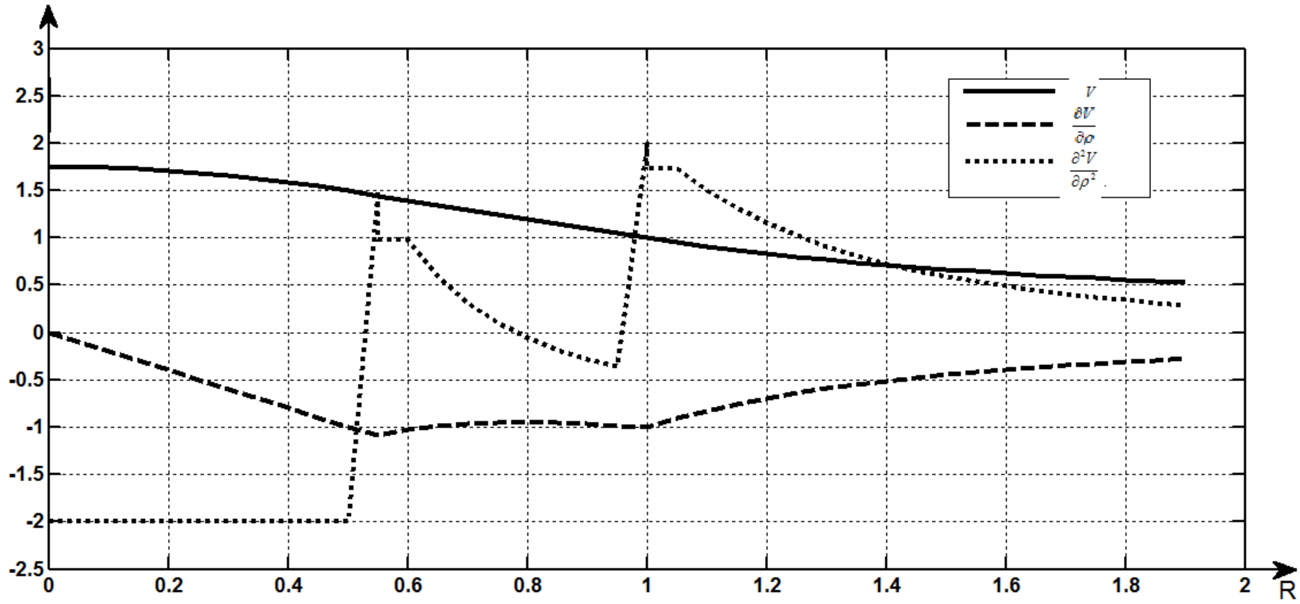
Графіки потенціалу та перших двох його радіальних похідних для вищенаведених планет подано на рисунку, а результати обчислень за формулами (7)–(9) та (14), (17), (18) збігаються, якщо $a = b = c = R$.

За формулами (14), (17), (18) вираховуємо значення потенціалу та його похідних для еліпсоїда, результати подаємо в табл. 2.

Таблиця 1

Основні параметри тришарової планети Земля

$fM \cdot 10^9$ $м^2/с^2$	$a_c \cdot 10^3$ $м$	Середня густина δ_c $г{\cdot}см^{-3}$	Середній радіус $R{\cdot}10^3 м$	Радіус ядра $R_я{\cdot}10^3 м$	Радіус ядра мантії $R_м{\cdot}10^3 м$	α	Значення густини $г{\cdot}см^{-3}$		
							в ядрі	в мантії	в корі
398603	6378	5,514	6371	3480	6346,6	1:298,256	10,998	4,4754	2,52



Графік потенціалу та перших двох його радіальних похідних для Землі

Таблиця 2

Різниця потенціалів еліпсоїдальної та кульової Землі

ρ	$V \cdot 0{,}625652 \cdot 10^8$ $м^2/с^2$	$\Delta V \cdot 0{,}625652 \cdot 10^8$ $м^2/с^2$					
		0°	30°	60°	90°	120°	150°
0	1.742804	0.003016	0.003016	0.003016	0.003016	0.003016	0.003016
0.1	1.732831	0.002915	0.002915	0.002915	0.002915	0.002915	0.002915
0.2	1.702912	0.002611	0.002611	0.002611	0.002610	0.002611	0.002611
0.3	1.653048	0.002105	0.002104	0.002103	0.002103	0.002103	0.002104
0.4	1.583239	0.001396	0.001395	0.001393	0.001392	0.001393	0.001395
0.5	1.493484	0.000485	0.000483	0.000480	0.000478	0.000480	0.000483
0.6	1.388607	0.002596	0.002595	0.002592	0.002590	0.002592	0.002595
0.7	1.289950	0.002060	0.002059	0.002057	0.002056	0.002057	0.002059
0.8	1.194651	0.001442	0.001441	0.001439	0.001437	0.001439	0.001441
0.9	1.098886	0.000742	0.000741	0.000737	0.000735	0.000737	0.000741
1	1.000367	0.000009	0.000011	0.000015	0.000018	0.000015	0.000011
1.1	0.909425	0.000010	0.000010	0.000011	0.000012	0.000011	0.000010
1.2	0.833639	0.000010	0.000009	0.000008	0.000008	0.000008	0.000009
1.3	0.769513	0.000010	0.000008	0.000006	0.000006	0.000006	0.000008
1.4	0.714548	0.000009	0.000007	0.000005	0.000004	0.000005	0.000007
1.5	0.666912	0.000009	0.000007	0.000004	0.000003	0.000004	0.000007

Висновки

Числові результати, отримані на основі вищенаведених формул, що ілюструються графіком, підтверджують властивості знайдених потенціалів та їхніх похідних: неперервність V та його радіальної похідної; розривність на глибинах зміни значень другої похідної, а також при переході через поверхню тіла. Обчислення за формулами для еліпсоїда збігаються з виконаними для кулі. Різниця між величинами потенціалів у кульовому та еліпсоїдальному випадку, яка наведена у табл. 2, підтверджує необхідність урахування еліптичності під час відповідних досліджень.

Література

1. Жарков В.Н. Физика планетарних недр / В.Н. Жарков, В.П. Трубицин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. – 448 с.
2. Marchenko A.N., Zayats A.S. Estimation of the potential gravitational energy of the Earth based on reference density models / A.N. Marchenko, A.S. Zayats // Geodynamika. – 2008. – № 1(7). – С. 5–24.
3. Фис М. Аналіз впливу еліпсоїдальності фігури Землі на її внутрішню структуру на прикладі моделі PREM / М. Фис, В. Нікулішин // Геодинаміка. – 2011. – № 1(10). – С. 17–21.
4. Грушинский Н.П. Основы гравиметрии / Н.П. Грушинский. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 352 с.
5. Dziewonski A.M. Preliminary reference Earth model / A.M. Dziewonski, D.L. Anderson // Physics of the Earth and Planet. Inter. – 1981. – № 25. – P.297–356.
6. Фис М.М. Про один комбінований метод знаходження потенціалу радіальної еліпсоїдальної планети / М.М. Фис, П.М. Зазуляк, О.С. Заяць // Геоінформаційний моніторинг навколишнього

середовища: зб. матер. Х ювілейного наук.-техн. симпозіуму 6–11 вересня 2005 р., Алушта (Україна, Крим). – С. 39–41.
7. Церклевич А.Л. Гравітаційні моделі тривимірного розподілу густини планет земної групи / А.Л. Церклевич, О.С. Заяць, М.М. Фис // Геодинаміка. – 2012. – №1(12). – С. 25–34.
8. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида / Р.З. Муратов. – М.: Атомиздат, 1976. – 144 с.

Порівняльний аналіз формул для потенціалу та його радіальних похідних тришарових кульових та еліпсоїдальних планет

М. Фис, Ю. Голубінка, М. Юрків

Виведено формули для потенціалу еліпсоїда і його радіальних похідних до другого порядку включно, виконано їх порівняння з відомими співвідношеннями для кульової планети.

Сравнительный анализ формул для потенциала и его радиальных производных трехслойных шаровидных и эллипсоидных планет

М. Фыс, Ю. Голубинка, М. Юркив

Выведены формулы для потенциала эллипсоида и его радиальных производных до второго порядка включительно, выполнено их сравнение с известными соотношениями для шаровидной планеты.

Comparative analysis of formulas for the potential and its radial derivatives for three-layered spherical and ellipsoidal planets

M. Fys, Yu. Holubinka, M. Yurkiv

Formulas are derived for the potential of ellipsoid and its radial derivatives up to the second order. Their comparison with the known relations for spherical planet has been done.