УДК 519.6 : 681.511.42

В.І. Мороз, М.І. Сольський
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра ЕПК

АНАЛІЗ ІСНУЮЧИХ МЕТОДІВ ОЦІНКИ ЧУТЛИВОСТІ КОРЕНІВ ПЕРЕДАТНИХ ФУНКЦІЙ ДО ЗМІН ЇХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Проаналізовано відомі методи оцінки чутливості коренів поліномів передатних функцій до змін їх коефіцієнтів. Особливу увагу звернено на випадок наявності кратних коренів поліномів, що призводить до різкого впливу найменшої похибки коефіцієнтів поліномів на результат знаходження їх коренів. Визначено основні математичні співвідношення, що описують міру чутливості коренів поліномів передатних функцій до змін їх коефіцієнтів.

Ключові слова: передатна функція, чутливість коренів, похибки коефіцієнтів поліному.

The existing methods for assessing of the sensitivity of the polynomials roots of the transfer functions to changes in their coefficients were analyzed in this article. Particular attention was paid to the case of the multiple polynomials roots of the transfer functions, leading to a drastic impact of slightest error in polynomial coefficients on result of their roots finding. The basic mathematical equations for assessing the sensitivity of polynomials roots of the transfer functions to changes in their coefficients were described.

Key words: transfer function, roots sensitivity, errors of polynomial coefficients.

Вступ

У зв’язку зі всебічним впровадженням цифрових систем керування в електромеханіці важливим є дослідження всіх впливів, що можуть спричинити некоректну роботу цих систем. У роботах [1, 2] розглянуто проблему впливу обмеженої розрядності даних, яка значною мірою впливає на синтез та практичну реалізацію цифрових систем. Пояснення цього явища таке: поліноми з кратними чи близькими коренями є дуже чутливими до похибок у задаванні коефіцієнтів. Зменшення кроку дискретизації призводить до переміщення всіх нулів і полюсів дискретної передатної функції до одиниці, тобто, всі корені поліномів чисельника і знаменника стають дуже близькими, внаслідок чого поліноми стають погано обумовленими і, як результат, чутливими до точності задавання коефіцієнтів. Зважаючи на це, важливим є здійснення аналізу відомих методів оцінки чутливості коренів поліномів дискретних передатних функцій до змін їх коефіцієнтів та визначення основних математичних співвідношень, що дають можливість оцінити міру чутливості коренів поліномів дискретних передатних функцій до змін їх коефіцієнтів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У роботах [1, 2] показано, що для зменшення впливу обмеженої розрядності даних у цифрових системах необхідно використовувати подання дискретної передавальної функції системи у формі нулів-полюсів. Також встановлено залежність між розрядністю апаратної частини цифрових систем та мінімально допустимим з умов реалізації кроком дискретизації. Показано, що у цифрових системах з обмеженою розрядністю існує мінімальний крок дискретизації, для якого виконується умова стійкості дискретної системи.

Незважаючи на вищезазначені рекомендації, проблема впливу обмеженої розрядності даних, яка значною мірою впливає на синтез і практичну реалізацію цифрових систем, не вирішена та потребує подальших досліджень з погляду як теорії синтезу цифрових систем, так і з погляду прикладної математики.

Мета статті

Аналіз існуючих методів оцінки чутливості коренів поліномів дискретних передатних функцій до змін їх коефіцієнтів, що здійснюється з метою пошуку шляхів вирішення проблеми впливу обмеженої розрядності даних на практичну реалізацію цифрових систем керування.

Матеріал і результати досліджень

Потрібно відзначити, що проблема числової нестійкості у разі обмеженої розрядності обчислень є відомою в прикладній математиці, зокрема є добре відомим той факт, що корені поліному (особливо, високого порядку) надзвичайно чутливі до збурень його коефіцієнтів. У роботі [3] описано один з методів оцінки чутливості коренів поліномів передатних функцій до змін їх коефіцієнтів відповідно до теорії А. Ралстона [4] та Дж. Вілкінсона [5].

У такому разі будь-який поліном з n нулями можна записати у вигляді

$$f(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k s^k, \tag{1}$$

або

$$f(s) = K\prod_{i=1}^{n}(s - s_i), \quad K = a_n; \tag{2}$$

та

$$f(s_i) = 0. \tag{3}$$

За наявності деякого збурення Дa_k коефіцієнта a_k поліном (1) запишемо у вигляді

$$\tilde{f}(s) = f(s) + \Delta a_k s^k. \tag{4}$$

Корені виразу (4) відрізняються від s_i на величину Δs_i, яка може бути як дійсною, так і комплексною:

$$\tilde{f}(s_i + \Delta s_i) = f(s_i + \Delta s_i) + \Delta a_k (s_i + \Delta s_i)^k = 0. \tag{5}$$

Отриманий вираз (5) можна спростити, використовуючи формулу Тейлора та враховуючи, що значення Δs_i і Δa_k є надзвичайно малими. У результаті отримаємо:

$$f'(s_i)\Delta s_i + \Delta a_k s_i^k \approx 0. \tag{6}$$

Рівняння (6) після математичних перетворень можна записати у вигляді:

$$\left|\frac{\Delta s_i}{s_i}\right| = S_{a_k}^{s_i}\left|\frac{\Delta a_k}{a_k}\right|, \tag{7}$$

де $S_{a_k}^{s_i}$ – чутливість похибки кореня s_i до збурень коефіцієнта a_k, визначається як

$$S_{a_k}^{s_i} = \left|\frac{a_k s_i^{k-1}}{f'(s_i)}\right| = \left|\frac{a_k s_i^{k-1}}{K\prod_{j\neq i}^{n}(s_i - s_j)}\right|. \tag{8}$$

Максимальне значення чутливості позначимо $S_{MAX} = \max(S_{a_k}^{s_i})$.

Потрібно відзначити, що одним з очевидних обмежень використання формули (8) для визначення чутливості коренів поліномів передатних функцій до змін їх коефіцієнтів є умова $f'(s_i) = 0$. У цьому випадку йдеться про наявність близьких або кратних коренів полінома.

Під час синтезу автоматичних систем керування поліноміальним методом вимогам щодо необхідних статичних і динамічних характеристик системи може задовольнити не один, а декілька поліномів [6]. Враховуючи цей факт, у роботі [6] автор пропонує здійснити параметричну оцінку чутливості поліномів за числом обумовленості їхніх супроводжуючих матриць.

Супроводжуючу матрицю (*companion matrix*) характеристичного полінома можна записати у вигляді:

$$G(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = a_0(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + 1) = a_0 G_0(p)\,, \qquad (9)$$

де $a_i = \alpha_i / a_0$ є матрицею стану системи в канонічній формі, а саме:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (10)$$

Чутливість до зміни коефіцієнтів з використанням вибраного методу стандартних форм поліномів досліджено на прикладі поліномів Грехема-Летропа і Бесселя третього-шостого порядків і продовжено дослідження на прикладі перехідних характеристик відповідних фільтрів. На основі результатів аналізу поведінки автор зазначає, що метод оцінки чутливості стандартних поліномів за числом обумовленості їхніх супроводжуючих матриць є неточним і може спричинити помилки. Особливо це стосується випадку швидкодіючої системи, оскільки чим більш швидкодіючою є система, тим більша її чутливість до зміни параметрів.

Зважаючи на вищезазначені рекомендації, у роботі [6] проаналізовано чутливість стандартних форм поліномів до зміни їх коефіцієнтів за допомогою методу траєкторної чутливості.

Відповідно до методу траєкторної чутливості математичний опис системи автоматичного керування, яка складається з досліджуваного об’єкта керування та моделі його траєкторної чутливості до змін параметра, матиме вигляд:

$$p\begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & 0 \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ A_\nu & \vdots & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \vdots \\ B_\nu \end{bmatrix} u;$$

$$\begin{bmatrix} y \\ \vdots \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & \vdots & 0 \\ \ldots & \vdots & \ldots \\ C_\nu & \vdots & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \vdots \\ \sigma \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Використовуючи рівняння (11) можна знайти траєкторну чутливість стандартного полінома до змін його коефіцієнтів. У роботі [6] на прикладі поліномів Грехема-Летропа і Бесселя третього-шостого порядків доведено, що будь-яка зміна коефіцієнтів цих поліномів призводить до негативних змін у перехідних процесах (їх затягування, збільшення перерегулювань тощо). Аналогічні результати показано у роботах [1, 2], коли при зменшенні кроку дискретизації цифрові системи стають нестійкими, а їхні перехідні процеси не відповідають перехідним процесам неперервних прототипів.

Функція абсолютної чутливості передатної функції до змін будь-якого її параметра визначається за формулою:

$$D_\nu^W = \lim_{\Delta\nu \to 0} \frac{\Delta W(p,\nu)}{\Delta\nu}\Big|_{\nu=\nu_n} = \frac{\partial W(p,\nu)}{\partial\nu}\Big|_{\nu=\nu_n}. \qquad (12)$$

Для передатної функції $W(p,a_i) = \dfrac{a_0}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_i p^i + \ldots + a_1 p + a_0}$ формула (12) матиме вигляд:

$$D_{a_i}^W = \frac{\partial W(p,a_i)}{\partial a_i}\Big|_{a_i=a_{i_n}} = -\frac{a_0 p^i}{(p^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_i p^i + \ldots + a_1 p + a_0)^2}. \qquad (13)$$

Висновки

Проведений аналіз показав, що відомо кілька методів оцінки чутливості коренів поліномів передатних функцій до змін їх коефіцієнтів та підтвердив актуальність пошуку шляхів вирішення проблеми впливу обмеженої розрядності даних на практичну реалізацію цифрових систем керування. Стосовно дискретних передатних функцій для малого кроку дискретизації, як показав аналіз публікацій, проблема залишається невирішеною.

Показано, що за необхідності знайти наближене значення кореня полінома будь-яким числовим методом, спочатку потрібно оцінити точність розрахунків – кількість значущих цифр проміжних результатів для гарантованої достовірності отриманих результатів.

Принциповим результатом є теорема про неперервну залежність коренів полінома від його коефіцієнтів – число дійсних коренів не зміниться за малих варіацій його коефіцієнтів. Як наслідок, дійсний корінь полінома з дійсними коефіцієнтами не може "зійти" з дійсної осі, поки не зіткнеться з іншим дійсним коренем, тобто не стане кратним.

1. Мороз В. І. Умови реалізації цифрових регуляторів на цифрових системах з обмеженою розрядністю / Мороз В.І., Сольський М.І., Головач І.Р // Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут". Тематичний випуск "Проблеми автоматизованого електроприводу. Теорія і практика". – Харків: НТУ "ХПІ", 2013. – № 36. – С. 313–314. 2. Moroz V. and Solskyi M. The investigation of the influence of data finite precision on realization of digital control systems // Computational problems of electrical engineering, vol. 3, no. 1, 2013, – P. 69–74. 3. Guillaume P., Schoukens J and Pintelon R. Sensitivity of roots to errors in the coefficient of polynomials obtained by frequency-domain estimation methods // IEEE Transactions on Instrumentation and measurement. – 1989, – Vol. 38, no. 6. – P. 1050–1056. 4. Ralstone A., First A Couse in Numerical analysis. – New York: McGrawe-Hill, 1965. – Ch.8, – P. 378–380. 5. Wilkinson J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford, U. K.: Clarendon, 1965. 6. Толочко О.И. Анализ методов оценки чувствительности стандартных полиномов к изменению их коэффициентов / Толочко О.И // Наукові праці ДонНТУ. – Електротехніка і енергетика. – 2003. – Вип. 67.– С. 126–131.