

БОНДАРЕНКО Б. Ф., САЩУК И. Н., ТИМЧУК В. Ю.

КАЧЕСТВО ОБНАРУЖЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНОЕ РАЗРЕШЕНИЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В ОБНАРУЖИТЕЛЯХ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМА КЕЙПОНА

Оценена предельная эффективность алгоритма Кейпона при обнаружении и разрешении коррелированных шумовых сигналов.

Алгоритм Кейпона является одним из известных алгоритмов высокого разрешения [1]. Этот алгоритм предполагает вычисление функции выходных сигналов цифровой линейной антенной решетки (ЦЛАР) вида:

$$F(\theta_0) = \frac{1}{\bar{v}_0^H (R^*)^{-1} v_0}, \quad (1)$$

где $R^* = \sum_{i=1}^n Y_i \cdot Y_i^H / n$ — оценочная корреляционная матрица (КМ) выходных сигналов ЦЛАР; Y_i

— вектор-столбец дискретных выборок выходных сигналов ЦЛАР; $v_0^H = [1 \ e^{-j\varphi} \ e^{-2j\varphi} \ \dots \ e^{-j(N-1)\varphi}]$ — оценочный вектор-строка; N — число приемных каналов ЦЛАР; $n \geq N$ — число сигнальных выборок, используемых для оценки КМ; $\varphi = \pi \cdot \sin \theta_0$; θ_0 — предполагаемая угловая координата цели (контролируемое направление); H — знак эрмитового сопряжения.

В дальнейшем, для удобства, функцию, определяемую соотношением (1), будем называть функцией Кейпона.

Постановка задачи. Вопросам, связанным с оценкой показателей качества обнаружения шумовых сигналов в обнаружителях, реализованных на основе алгоритма (1) уделяется достаточно серьезное внимание [2, 3]. Однако во всех известных работах речь идет об оценке показателей качества независимых шумовых сигналов. В тоже время в ряде реальных случаев (например, в РЛС с шумовым зондирующим сигналом) последнее условие может не выполняться. Вопрос, касающийся предельного разрешения коррелированных сигналов, вообще еще не рассматривался. Задача состоит в оценке влияния степени корреляции сигналов, подлежащих обнаружению, на показатели качества обнаружения и их предельное разрешение в РЛС с шумовым зондирующим сигналом и ЦЛАР, что и является целью данной статьи. Собственные шумы приемных каналов ЦЛАР при всем этом полагаются равномошными и независимыми. Статистические характеристики сигналов, отраженных от целей, считаются априори известными. Известным считается так же угловой разнос целей. При оценке

предельного разрешения полагается, что в (1) $n \rightarrow \infty$. Последнее условие означает правомочность замены в соотношении (1) оценочной КМ на статистическую.

Оценка показателей качества обнаружения коррелированных шумовых сигналов.

Введем по аналогии с [2] отношение $y = F / F_0$, которое можно рассматривать как “нормированное” значение функции Кейпона (здесь F_0 — значение функции Кейпона при условии, что число сигнальных выборок, используемых для оценки КМ, вполне достаточное для замены оценочной КМ на статистическую, аргумент θ_0 для сокращения записи опущен). Тогда вероятность превышения y порога h в обнаружителе на основе алгоритма Кейпона можно определить как

$$P(y \geq h / F_0) = \int_{h_n/b}^{\infty} p(y) \cdot dy,$$

где $p(y)$ — плотность распределения вероятностей “нормированного” значения функции Кейпона, имеющая, как показано в [2], вид

$$p(y) = \frac{y^{(k/2)-1} \cdot n^{k/2}}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} \cdot e^{-\frac{ny}{2}};$$

в этих соотношениях обозначено: $k = (n - N + 1)$ — число степеней свободы χ^2 распределения; $h = h_n / b$ — порог обнаружения; h_n — постоянный коэффициент, определяемый заданным значением вероятности ложной тревоги; $b = F_0(q_1 \neq 0) / F_0(q_1 = 0)$; $F_0(q_1 = 0)$ и $F_0(q_1 \neq 0)$ — значения функции Кейпона при условии, что на контролируемом направлении соответственно нет и есть цель; q_1 — отношение сигнал/шум в приемном канале ЦЛАР для цели, которая находится на контролируемом направлении.

Используя (1) и теорему об обращении модифицированной матрицы [4], можно показать, что при наличии в приемном канале ЦЛАР коррелированных сигналов от двух целей функция Кейпона $F_0(q_1 \neq 0)$ будет определяться соотношением

$$F_0(q_1 \neq 0) = \frac{1 + N \cdot (q_1 + q_2) + 2 \cdot N \cdot d_{12} \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} \cdot r \cdot \cos \xi + N^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - r^2) \cdot (1 - d_{12}^2)}{N \cdot [1 + q_{01} \cdot (1 - d_{01}^2) + q_{02} \cdot (1 - d_{02}^2) + \sqrt{q_{01} \cdot q_{02}} \cdot r \cdot a_1 \cdot \cos \xi + q_{01} \cdot q_{02} \cdot (1 - r^2) \cdot a_2]}, \quad (2)$$

где обозначено $d_{12} = \sin[N \cdot (\pi/2) \cdot (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)] / N \cdot \sin[(\pi/2) \cdot (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)]$ — коэффициент “корреляции” амплитудно-фазовых распределений, создаваемых отраженными от целей сигналами в раскрые ЦЛАР; $\xi = \frac{N-1}{2 \cdot \pi \cdot (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)} - \varphi$; θ_i — угловые координаты целей,

подлежащих обнаружению ($i = 1, 2$); φ — фазовый сдвиг сигналов s_1 и s_2 , подлежащих обнаружению; $q_{0i} = N \cdot q_i$ — интегральное отношение сигнал/шум на выходе ЦЛАР для i -го сигнала; $d_{0i} = \sin[N \cdot (\pi/2) \cdot (\sin \theta_i - \sin \theta_0)] / N \cdot \sin[(\pi/2) \cdot (\sin \theta_i - \sin \theta_0)]$; r — модульное значение

коэффициента корреляции сигналов целей в опорном приемном канале ЦЛАР; $a_1 = d_{12} - d_{01} \cdot d_{02}$;
 $a_2 = 1 - d_{12}^2 - d_{01}^2 - d_{02}^2 + 2 \cdot d_{12} \cdot d_{01} \cdot d_{02}$.

С учетом (2) получаем следующие соотношения для коэффициента b :

- для некоррелированных сигналов:

$$b_{\text{нек}} = \frac{1 + N \cdot (q_1 + q_2) + N^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - d_{12}^2)}{1 + N \cdot q_2}; \quad (3)$$

- для коррелированных сигналов:

$$b_{\text{кор}} = \frac{1 + N \cdot (q_1 + q_2) + 2 \cdot N \cdot d_{12} \cdot r \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} \cdot \cos \xi + N^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - r^2) \cdot (1 - d_{12}^2)}{1 + N \cdot q_2}. \quad (4)$$

При записи (3) и (4) учтено, что “в точке” $\theta_0 = \theta_1$ имеют место следующие равенства

$$d_{01} = 1; \quad d_{02} = d_{12}; \quad a_1 = 0; \quad a_2 = 0.$$

Отношение $L = b_{\text{нек}} / b_{\text{кор}}$ можно трактовать как потери в отношении сигнал/шум, обусловленные корреляцией сигналов, подлежащих обнаружению. С учетом (3) и (4) получаем следующее соотношение для расчета коэффициента потерь L :

$$L = \frac{1 + N \cdot (q_1 + q_2) + N^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - d_{12}^2)}{1 + N \cdot (q_1 + q_2) + 2 \cdot N \cdot d_{12} \cdot r \cdot \sqrt{q_1 \cdot q_2} \cdot \cos \xi + N^2 \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot (1 - r^2) \cdot (1 - d_{12}^2)}.$$

Используя последнее соотношение и результаты, приведенные в [2], получим выражения для расчета показателей качества обнаружения коррелированных сигналов в обнаружителе на основе алгоритма Кейпона:

- вероятность ложной тревоги:

$$P_{\text{лт}} = \frac{\Gamma\left[\frac{k}{2}, \frac{n}{2} \cdot h_{\text{н}}\right]}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}; \quad (5)$$

- вероятность правильного обнаружения:

$$P_{\text{обн}} = \frac{\Gamma\left[\frac{k}{2}, \frac{n}{2} \cdot h_{\text{н}} \cdot \frac{L}{b_{\text{нек}}}\right]}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \quad (6)$$

где $\Gamma(a, x)$ — неполная гамма функция.

На рис. 1—5 представлены зависимости коэффициента потерь L в отношении сигнал/шум от параметров сигналов, подлежащих обнаружению, и ЦЛАР (от коэффициента r корреляции сигналов ($N=10$) — рис. 1, от числа N приемных каналов ЦЛАР — рис. 2, от

фазового сдвига φ сигналов ($N=10$) — рис. 3. от отношения q_2/q_1 мощностей сигналов — рис. 4, от относительного углового разноса $\Delta\theta/\theta_{0,5P}$ целей — рис. 5).

Для графиков на рис. 1—3, 5 относительный угловой разнос источников коррелированных сигналов (целей с одинаковыми радиальными составляющими скорости движения) принят равным $\Delta\theta/\theta_{0,5P} = 0,5$ (здесь $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$, а $\theta_{0,5P}$ — ширина диаграммы направленности ЦЛАР по уровню половинной мощности). Все графики (за исключением графика на рис. 5) соответствуют случаю $q_1 = q_2 = 100/N$. Коэффициент корреляции сигналов, подлежащих обнаружению, на рис. 2—5 принят равным единице. Для всех рисунков, кроме рис. 3, фазовый сдвиг сигналов, подлежащих обнаружению, равен 90° .

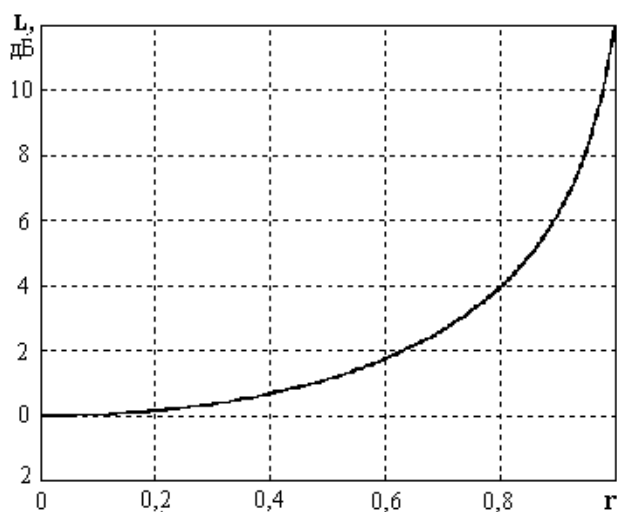


Рис. 1

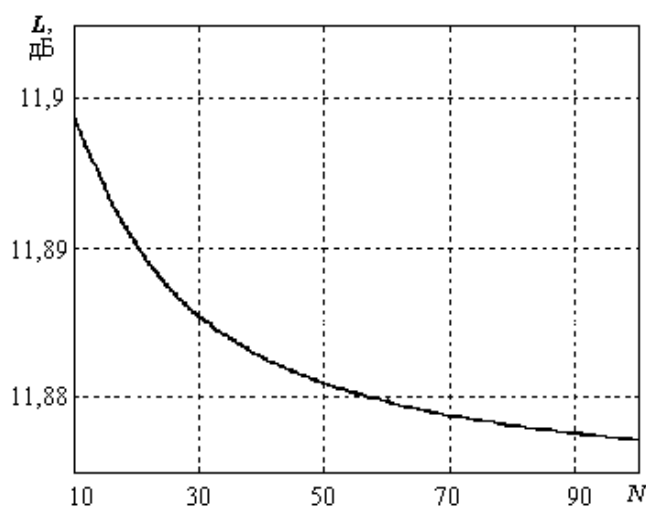


Рис. 2

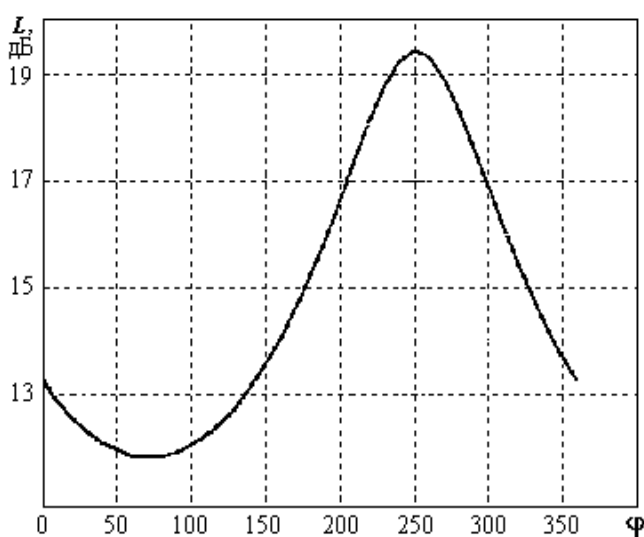


Рис. 3

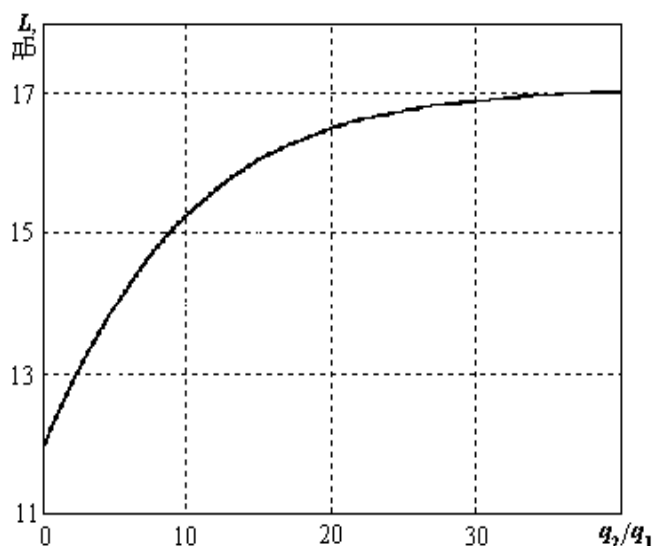


Рис. 4

Из рис. 1 видно, что потери в отношении сигнал/шум для полностью коррелированных сигналов ($r=1$) могут достигать 10 дБ и более.

Из рис. 2 следует, что потери при обнаружении полностью коррелированных сигналов достаточно слабо зависят от числа приемных каналов ЦЛАР.

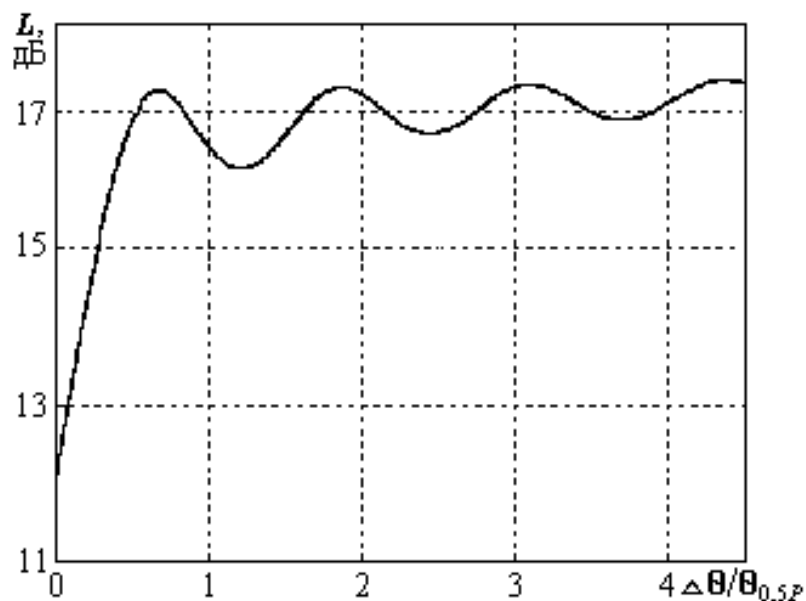


Рис. 5

Из рис. 5 следует, что при обнаружении коррелированных сигналов алгоритм Кейпона теряет селективные свойства (при угловом разnose целей, существенно превышающем ширину диаграммы направленности ЦЛАР, наличие второй цели приводит к значительному снижению качества обнаружения первой цели и наоборот).

Результаты статистического моделирования процесса обнаружения. Для подтверждения правомочности использования соотношений (5) и (6), полученные теоретические результаты проверялись с помощью метода статистического моделирования процесса обнаружения сигналов в обнаружителе на основе алгоритма Кейпона. На рис. 6 представлены кривые обнаружения, рассчитанные по формулам (5) и (6) (зависимости, изображенные сплошными линиями), и полученные по результатам статистического моделирования (зависимости, изображенные значком *). Принято, что $N=10$, $n=50$, $P_{лт}=10^{-4}$.

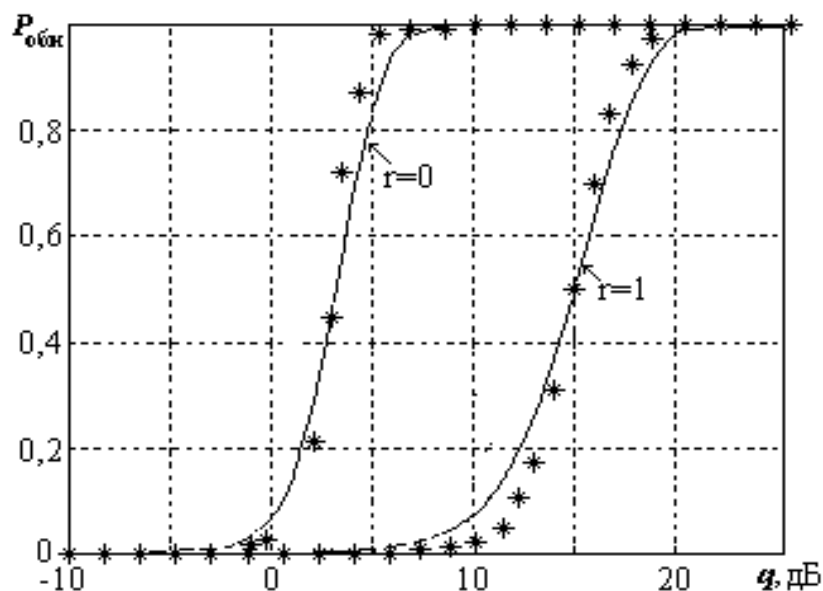


Рис. 6

Ось абсцисс на рис. 6 соответствует интегральному отношению сигнал/шум q_{01} для сигнала цели, находящейся на контролируемом направлении.

Анализ рис.6 позволяет сделать вывод о достаточно хорошем совпадении результатов теоретических расчетов и машинного эксперимента и, как следствие, о правомочности использования формул, приведенных в статье, для оценки показателей качества обнаружения коррелированных шумовых сигналов.

Оценка предельного разрешения. Используя условие раздельного наблюдения целей, сформулированное в [5], и выражение (2), можно найти значение отношения сигнал/шум, требуемое для предельного разрешения (определения состава групповой цели в импульсном объеме РЛС) при использовании алгоритма Кейпона в условиях наличия и отсутствия корреляции отраженных от целей сигналов:

$$q_{\text{тр}} \geq -(c_1 + 2 \cdot c_2 \cdot r \cdot \cos \xi) / [(1 - r^2) \cdot (c_1 - 2 \cdot a_2 \cdot d_{12})], \quad (7)$$

где $c_1 = 4 \cdot [(d'_{01})^2 + d_{01} \cdot d''_{01}]$; $c_2 = 2 \cdot [d_{01} \cdot d''_{01} - (d'_{01})^2]$; d'_{01} , d''_{01} — первая и вторая производные от d_{01} в “точке” $\theta_0 = (\theta_1 + \theta_2) / 2$. При записи (7) для упрощения выкладок, связанных с вычислением производных, полагалось, что $(\theta_1 + \theta_2) / 2 = 0$.

На рис. 7 и 8 представлены семейства зависимостей, иллюстрирующих влияние корреляции сигналов на предельные возможности алгоритма Кейпона по разрешению коррелированных сигналов.

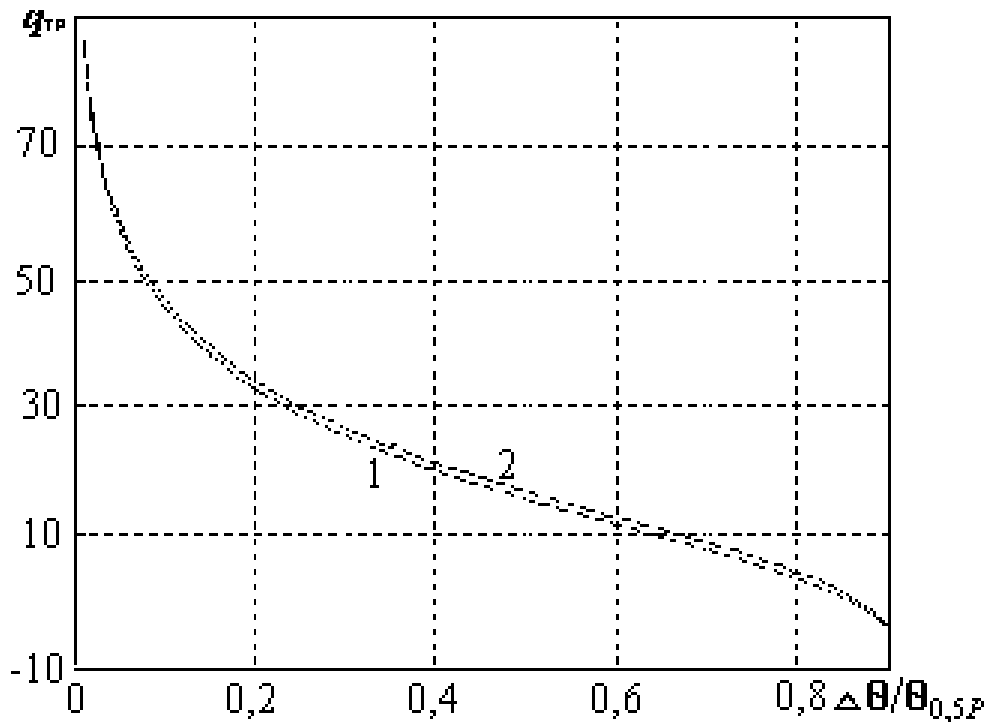


Рис. 7. Условие раздельного обнаружения двух целей ($r=0$ и $r=0,5$)

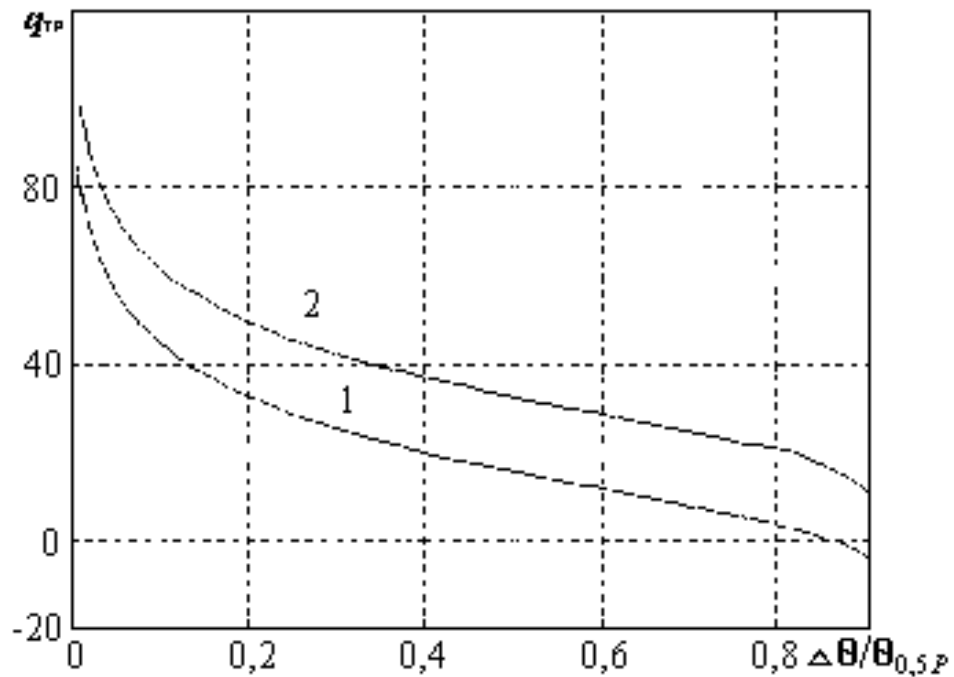


Рис. 8. Условие раздельного обнаружения двух целей ($r=0$ и $r=0,99$).

Цифрой 1 на обоих рисунках изображена зависимость отношения сигнал/шум, требуемого для раздельного обнаружения двух некоррелированных сигналов. Цифрой 2 на рис. 7 изображена соответствующая зависимость для $r=0,5$, а на рис. 8 для $r=0,99$. Фазовый сдвиг сигналов оказывает существенное влияние на требуемое отношение сигнал/шум только при

$r \rightarrow 1$. При $r \leq 0,6$ влиянием фазового сдвига и корреляции сигналов на качество обнаружения и разрешения целей можно пренебречь.

Выводы. При определенных условиях алгоритм Кейпона обеспечивает достаточно хорошие характеристики обнаружения и разрешения некоррелированных шумовых сигналов, однако этот алгоритм мало пригоден для решения задачи обнаружения и (или же) разрешения сигналов, коэффициент корреляции которых близок к единице.

В условиях коррелированных сигналов теряется прямая связь выхода обнаружителя на основе алгоритма Кейпона с мощностью сигнала в приемном канале ЦЛАР.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кейпон Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением // ТИИЭР.— 1978.— Т. 66.— №1.— С. 60—96.

2. Бондаренко Б. Ф., Сацук И. Н., Тимчук В. Ю. Показатели качества обнаружения шумовых сигналов в системе обработки на основе алгоритма Кейпона. // Радиоэлектроника, 2003 (в печати)

3. Леховицкий Д. И., Флексер П. М., Атаманский Д. В., Кириллов И. Г. Статистический анализ сверхразрешающих методов пеленгации источников шумовых излучений в АР при конечном объеме выборки // Антенны.— 2000.— №2 (45).— С. 23—39.

4. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления.— М.: Наука, 1984.— 320 с.

5. Бондаренко Б. Ф., Платонов С. Ю., Сацук И. Н. Разрешающая способность алгоритма MUSIC. // Радиоэлектроника. 2001.— том 44.— №1 — С. 51—60. (Изв. высш. учеб. заведений).

Бондаренко Б. Ф.

Сацук И. Н.

Тимчук В. Ю.