УДК 004.4’232

О. Овсяк*, В. Овсяк, Ю. Петрушка
*Київський національний університет культури і мистецтв, Львівська філія,
Українська академія друкарства

НЕСУПЕРЕЧНІСТЬ АЛГЕБРИ СЕКВЕНЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ

Несуперечність алгебри секвенційних алгоритмів, за умов логічних значень змінних і функціональних змінних та наявності тільки одного індексу порядку, доведена зведенням операцій алгебри секвенційних алгоритмів до операцій несуперечної логіки предикатів.

Ключові слова: алгебра алгоритмів, несуперечність, логіка предикатів, операція, предикат.

Sequential consistency algebra algorithms under logical variables and functional variables and there is only one index procedure proved mixing operations algebra sequential algorithms for operations consistent logic.

Key words: algebra algorithms, consistency, logic predicates, operation predicate.

Вступ і формулювання задачі

Аксіоматичний метод [1] використовується для дефініції наукових теорій запровадженням їх початкових положень, які утворюють систему аксіом. Дуже важливим питанням, яке ставиться до побудованих аксіоматичним методом теорій, є питання їх несуперечності [2–4]. Система аксіом вважається суперечливою, якщо з неї виводиться формула та її заперечення [2, 3] або більш загально – вивідність кожної формули цієї системи [4]. Відомі методи доведення несуперечності побудовою моделі її або безпосереднього доведення несуперечності з використанням теорії доведень [5]. Доведення несуперечності теорії будь-яким з цих методів, тією чи іншою мірою, використовує засоби іншої завідомо несуперечної теорії [4]. Власне тому несуперечність досліджуваної теорії може бути доведена зведенням її до відомої несуперечної [4].

Відомі алгебра секвенційних алгоритмів [6] та її модифікація [7–9]. Означені вони з використанням аксіоматичного методу. У зв’язку з цим для алгебри секвенційних алгоритмів та її модифікації постає питання дослідження їхньої несуперечності. Розв’язання цієї задачі і є предметом статті.

Дослідження несуперечності алгебри секвенційних алгоритмів

Алгебра секвенційних алгоритмів утворена операціями секвентування, елімінування, паралелення, реверсування та циклічних секвентування, елімінування і паралелення [6].

Операції виконуються над знаками, якими можуть бути цифри, числа, логічні значення, змінні, функції абстрактні і предметні знаки і послідовності знаків алфавітів мов людського спілкування і технічних мов тощо.

Обов’язковими знаками є логічні значення і логічні змінні, які використовуються в операції елімінування. У зв’язку з цим, що теорія предикатів оперує логічними значеннями, змінними і предикатами, вона є несуперечною [2, 3]. Доцільно у частковому випадку звести алгебру секвенційних алгоритмів до теорії предикатів, що і буде зроблено.

Теорема. Алгебра секвенційних алгоритмів несуперечлива.

Доведення. Відомо [2, 3], що логіка предикатів є несуперечною. Для зведення алгебри секвенційних алгоритмів до логіки предикатів необхідно зробити два обмеження. По-перше, допустити у ролі знаків, над якими будуть виконуватися операції алгебри алгоритмів, тільки логічні знаки 0 та 1, логічні змінні та предикати. По-друге, увести обмеження на кількість індексів порядку α та β логічних значень, логічних змінних і предикатів. Допускаємо тільки індекс порядку α. З метою спрощення отримуваних виразів індекс порядку α опускатемо.

Для двох індексів порядку α та β і двох змінних означення операцій секвентування, паралелення й реверсування над логічними змінними x і y матиме вигляд, наведений у табл. 1 (Зм. –змінні та індекси і № – порядкові номери комбінацій значень змінних).

Таблиця 1

Істинносне означення операцій логічного секвентування, паралелення і реверсування для двох змінних і двох індексів порядку

Зм. / №	Індекс α		Індекс β		$\overset{\frown}{x_\alpha,y_\alpha}$	$\overset{\frown}{x_\alpha,y_\beta}$	$\lceil x_\alpha,y_\alpha \rceil$	$\lceil x_\alpha,y_\beta \rceil$	$\overline{\lceil x_\alpha,y_\beta \rceil}$	$\overline{\lceil x_\alpha,y_\alpha \rceil}$	$\overset{\frown}{y_\alpha,x_\beta}$
	Змінні		Змінні								
	x_α	y_α	x_β	y_β							
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1
7	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1
8	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
9	1	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0
10	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0
11	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
12	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0
14	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1

З уведеним спрощенням, яке полягає у наявності одного індексу порядку (тільки індекс порядку α), табл. 1 трансформується до табл. 2.

Таблиця 2

Істинносне означення операцій логічного секвентування, паралелення і реверсування для двох змінних і одного індексу порядку

Зм. / №	Індекс α		$\overset{\frown}{x_\alpha,y_\alpha}$	$\lceil x_\alpha,y_\alpha \rceil$	$\overline{\lceil x_\alpha,y_\alpha \rceil}$	$\overline{\overset{\frown}{y_\alpha,x_\alpha}}$
	Змінні					
	x_α	y_α				
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0

У табл. 3 наведено істинносне означення логічних операцій кон'юнкції, диз'юнкції та інвертування.

Таблиця 3

Істинносне означення логічних операцій

	x	y	$x\&y$	xVy	$\overline{xVy}$	$\overline{x\&y}$
0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1
2	1	0	0	1	0	1
3	1	1	1	1	0	0

Порівнюючи табл. 2 і 3, бачимо, що

$$\overset{\frown}{x_\alpha, y_\alpha} = x\&y\text{, а } \overline{x_\alpha, y_\alpha} = xVy \text{ та } \overline{\overline{x_\alpha, y_\alpha}} = \overline{xVy} \text{ і } \overline{\overset{\frown}{x_\alpha, y_\alpha}} = \overline{x\&y}.$$

Отож, для заданих умов операція секвентування алгебри алгоритів є операцією кон’юнкції логіки предикатів, а операція паралелення – операцією диз’юнкції і операція реверсування – операцією інвертування.

Означення операції елімінування над логічними змінними наведено у табл. 4.

Таблиця 4

Операція логічного елімінування над істинносними змінними

Зм. / №	x	y	u	$\overline{x; y; u\text{-}?}$	$\overline{x; y; 0\text{-}?}$	$\overline{x; y; 1\text{-}?}$	$\overline{x; y; *\text{-}?}$
0	0	0	0	0	0	0	$\lceil 0,0 \rceil$
1	0	0	1	0	0	0	$\lceil 0,0 \rceil$
2	0	1	0	1	1	0	$\lceil 0,1 \rceil$
3	0	1	1	0	1	0	$\lceil 0,1 \rceil$
4	1	0	0	0	0	1	$\lceil 1,0 \rceil$
5	1	0	1	1	0	1	$\lceil 1,0 \rceil$
6	1	1	0	1	1	1	$\lceil 1,1 \rceil$
7	1	1	1	1	1	1	$\lceil 1,1 \rceil$

Тепер, дамо істинносне означення формул логіки предикатів у вигляді табл. 5.

Таблиця 5

Формули логіки предикатів

Зм. / №	x	y	u	$x\&u \; V \; y\&\overline{u}$	$x\&0 \; V \; y\&\overline{0}$	$x\&1 \; V \; y\&\overline{1}$	xVy
0	0	0	0	0	0	0	0*V*0
1	0	0	1	0	0	0	0*V*0
2	0	1	0	1	1	0	0*V*1
3	0	1	1	0	1	0	0*V*1
4	1	0	0	0	0	1	1*V*0
5	1	0	1	1	0	1	1*V*0
6	1	1	0	1	1	1	1*V*1
7	1	1	1	1	1	1	1*V*1

Порівнюючи табл. 4 і 5, бачимо, що справедливі такі рівності:

$$\overline{x; y; u\text{-}?} = x\&u \; V \; y\&u, \overline{x; y; 0\text{-}?} = x\&0 \; V \; y\&0, \overline{x; y; 1\text{-}?} = x\&1 \; V \; y\&1 \text{ і } \overline{x; y; *\text{-}?} = xVy.$$

З цих рівностей випливає, що для заданих умов операція елімінування алгебри алгоритмів є замінимою формулою логіки предикатів.

Для заданих умов порівняємо операції циклічних секвентування, паралелення і елімінування алгебри алгоритмів із кванторними операціями загальності та існування логіки предикатів.

На підставі властивостей операції циклічного секвентування [6–9] маємо

$$\not\subset xF(x) = \overset{\frown}{F(i): \overset{\frown}{F(j): \overset{\frown}{F(k): \ldots}}}\text{, для } x \in Q = \overset{\frown}{i: \overset{\frown}{j: \overset{\frown}{k: \ldots}}}$$

Отже, ця операція є узагальненням операції секвентування на нескінченну кількість значень предметної змінної функціонального унітерму.

Відомо [2], що кванторна операція для усіх є узагальненням операції кон’юнкції на нескінченну кількість значень предметної змінної предиката.

Оскільки для заданих умов операція секвентування алгебри алгоритмів є операцією кон'юнкції, то узагальнення операції секвентування дорівнюватиме узагальненню операції кон'юнкції на нескінченну кількість значень предметної змінної. Отже, для заданих умов операцію циклічного секвентування алгебри алгоритмів можна замінити операцією загальності логіки предикатів.

Аналогічно замінимості операцій циклічного секвентування і кванторної операції загальності встановлюється замінимість операції циклічного паралелення алгебри алгоритмів і кванторної операції існування логіки предикатів.

Операція циклічного елімінування є узальненням на нескінченну кількість значень предметної змінної операції елімінування, що видно на підставі властивості

$$\not\supset u_x F(x) = \overline{F(i);\ \overline{F(j);\ \overline{F(k);\ldots u_k\text{-}?};u_j\text{-}?};u_i\text{-}?}\ , \text{ для } x \in Q = \overset{\frown}{i:\ \overset{\frown}{j:\ \overset{\frown}{k:\ \ldots}}}$$

Крім того, операцію циклічного елімінування можна замінити формулою

$$\not\supset u_x F(x) = \varnothing u_x\, \overline{\overset{\frown}{u_x\ ;F(x)},\ \overset{\frown}{\overline{u_x}\ ;F^1(x)},}$$

у якій функціональний унітерм $F^1(x)$ є формулою паралелення, яка розкривається з розкриттям циклу операції циклічного паралелення. Операцію циклічного паралелення алгебри алгоритмів, як це було показано вище, можна замінити кванторною операцією існування логіки предикатів, а операції секвентування і паралелення – операціями кон'юнкції і диз'юнкції відповідно. Отож, операцію циклічного елімінування для заданих умов можна замінити операціями логіки предикатів.

На підставі виконаного аналізу встановлено, що для логічних значень змінних і функціональних унітермів та одного індексу порядку можна замінити усі операції алгебри алгоритмів операціями логіки предикатів. Оскільки логіка предикатів є несуперечливою, то несуперечливою є і алгебра алгоритмів. Теорему доведено.

Теорема. Модифікована алгебра секвенційних алгоритмів несуперечлива.

Доведення несуперечливості модифікованої алгебри алгоритмів аналогічне доведенню несуперечливості алгебри алгоритмів.

Висновок

Алгебра секвенційних алгоритмів та модифікована алгебра секвенційних алгоритмів є несуперечливими.

1. Математическая энциклопедия. – Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1977. – 1152 с. 2. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Мир, 1982. – 556 с. 3. Новиков П.С. Элементы математической логики. – М.: Наука, 1973. 4. Математическая энциклопедия. – Т.3. – М.: Советская энциклопедия, 1982. – 1184 с. 5. Такеути Г. Теория доказательств. – М.: Мир, 1978. – 412 с. 6. Овсяк В.К. Засоби еквівалентних перетворень алгоритмів інформаційно-технологічних систем // Доповіді Національної академії наук України, № 9, 1996. – С. 83–89. 7. Owsiak W., Owsiak A. Rozszrzerzenie algebry algorytmów // Pomiary, automatyka, kontrola. – 2010. – № 2. – S. 184–188. 8. Овсяк О.В. Мінімізація формули алгоритму транслятора електромеханічних схем друкарських машин // Збірник праць наук.-техн. конф. "Обчислювальні методи і системи перетворення інформації", 7–8 жовтня 2010. – Львів: ФМІ, 2010. – С. 256–259. 9. Ovsyak A., Ovsyak V. The extended algebra of algorithms with additional cycle elimination axiomats // Conference "Intelligent Information and Engineering Systems" (INFOS 2011), September 19–23, 2011, Polańczyk, Poland. – P. 23–34.