

# ЗАСОБИ ВИМІРЮВАНЬ ЕЛЕКТРИЧНИХ І МАГНІТНИХ ВЕЛИЧИН

УДК 536

## ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДТВОРЕННЯ РОЗПОДІЛУ ПРОВІДНОСТІ В ЕЛЕКТРИЧНІЙ ТОМОГРАФІЇ НА ОСНОВІ ВИКОРИСТАННЯ ОБЕРНЕНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАННЯ

© Дорожовець Михайло<sup>1,2</sup>, Пригородський Антон<sup>1</sup>, 2011

<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”, вул. С. Бандери, 12, Львів, Україна  
dorozhovets@polynet.lviv.ua  
prygodsky.anton@gmail.com

<sup>2</sup>Ряшівська політехніка, вул. В. Поля, 2В, 35-959, Ряшів, Польща  
michdor@prz.rzeszow.pl

*Наведено алгоритм відтворення розподілу провідності, який ґрунтується на використанні обернених результатів вимірювань напруг. Ефективність досліджуваного алгоритму порівняна із прямим та непрямим алгоритмами реконструкції. Результати моделювання показують, що досліджуваний алгоритм забезпечує кращу збіжність ітераційних процедур розв’язання оберненої задачі томографії.*

*Представлен алгоритм воспроизведения распределения проводимости, который базируется на использовании обратных результатов измеренных напряжений. Эффективность исследованного алгоритма сравнена с прямым и косвенным алгоритмами реконструкции. Результаты моделирования показывают, что исследованный алгоритм обеспечивает лучшую сходимость итерационных процедур решения обратной задачи томографии.*

*In this paper the conductivity distribution reconstruction algorithm based on usage of inverse measured voltage is presented. Efficiency of the investigated algorithm compared with direct and indirect reconstruction algorithms. Modeling results shows that investigated algorithm provide better convergence of the iteration process of solving the inverse tomography problem.*

**1. Вступ.** Метою томографії провідності є отримання інформації про розподіл провідності  $g(x, y)$  у досліджуваному середовищі [2]. Для цього об’єкт дослідження збуджують через електроди, розміщені на краях досліджуваної області (наприклад, на стінці труби) струмом або напругою та вимірюють, відповідно, напругу або струм.

Знаходження просторового розподілу електричної провідності за суттю є нелінійною задачею. Для розв’язання такої задачі застосовують апроксимацію електричних параметрів досліджуваного середовища та електричного поля в ньому. Так задачу зводять до системи нелінійних рівнянь. Основними методами розв’язування таких систем є методи ньютонівського типу та оптимізаційні методи. Обидва методи є ітера-

ційними. Щоб знайти наступне наближення шуканих величин, у цих методах на кожній ітерації необхідно обчислювати матриці похідних, зокрема, матриці Якобі – у ньютонівських методах та градієнтів – у оптимізаційних [1, 3].

Відтворення провідності реалізується на основі попереднього розрахунку матриці чутливостей результатів вимірювань до зміни провідності елементів:

$$J_{U_{i,j}}(\mathbf{g}_j) = \frac{\partial U_{meas,i}}{\partial g_j}, \quad (1)$$

де  $J_{i,j}(\mathbf{g}_j)$  – елемент матриці чутливостей;  
 $U_{meas,i} = F(\mathbf{g}(x, y))$  – виміряне значення напруги як функція від шуканого розподілу провідності  $g(x, y)$ .

В загальному випадку провідне середовище описується рівнянням Ома у диференціальній формі [1, 3–4]:

$$j(x, y) = g(x, y)E(x, y) = -g(x, y)gradj(x, y), \quad (2)$$

де  $j(x, y)$  – розподіл густини струму;  $E(x, y)$  – вектор напруження електричного поля;  $j(x, y)$  – розподіл електричного потенціалу.

У [5] ми показали, що якщо провідність об'єкта дослідження масштабно збільшується (або зменшується) у певну кількість разів ( $k$ ), то за сталого струмового збудження об'єкта ( $I_0$ ) значення напруги (вимірюваних різниць потенціалів) зменшується (збільшується) у відповідну кількість разів:

$$U_{meas,n} = \frac{U_{meas}}{k}, \quad (3)$$

а елементи матриці чутливостей зменшуються у квадратичній залежності:

$$J_{U_{i,ni,j}}(g_{nj}) = \frac{\partial U_{meas,ni}}{\partial g_{nj}} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial U_{meas,i}}{\partial g_j} = \frac{1}{k^2} \cdot J_{i,j}(g_j), \quad (4)$$

де  $g_n(x, y) = kg(x, y)$  – новий розподіл провідності;  $U_{meas,n} = F_n(g_n(x, y))$  – нове значення вимірюваної напруги як функція від нового значення провідності;  $J_{U_{i,ni,j}}(g_{nj})$  – нове значення елементів матриці чутливостей як функція від нового значення провідності.

Квадратична залежність чутливості від змін провідності свідчить про істотну нелінійність задачі електричної томографії. На практиці рідко відбувається масштабна зміна провідності досліджуваного середовища. Частіше такі зміни поодинокі. Але характер залежностей (3) та (4) загалом зберігається. В зв'язку з цим розв'язок такої нелінійної задачі суттєво залежить від правильності початкового наближення і належної регуляризації [5].

**Мета роботи** – дослідити можливість лінеаризації задачі електричної томографії і на основі цього – покращити відтворення розподілу провідності. Пропонований підхід ґрунтується на використанні обернених результатів вимірювання напруг.

**2. Відтворення провідності на основі обернених результатів вимірювання напруг.** Нехай ми маємо

результати вимірювань напруг, які є функцією від розподілу провідності:

$$U_{meas,i} = F(g(x, y)). \quad (5)$$

Означимо нову функцію  $V_{meas,i}$  як обернену до  $U_{meas,i}$ :

$$V_{meas,i} = \frac{1}{U_{meas,i}} = \frac{1}{F(g(x, y))} = \Phi(g(x, y)). \quad (6)$$

Тоді коефіцієнти матриці чутливостей обернених результатів вимірювання до змін провідності визначатимуться виразом:

$$J_{V_{i,i,j}}(g_j) = \frac{\partial V_{meas,i}(g_j)}{\partial g_j} = -\frac{1}{U_{meas,i}^2(g_j)} \frac{\partial U_{meas,i}(g_j)}{\partial g_j} = -\frac{1}{U_{meas,i}^2(g_j)} \cdot J_{U_{i,i,j}}(g_j). \quad (7)$$

Якщо провідність об'єкта дослідження збільшиться у  $k$  разів, то, згідно з (3), значення вимірюваних напруг зменшаться у відповідну кількість, а значення нашої функції  $V_{meas}$ , як і провідність, зростатимуть в  $k$  разів. Це відображає лінійнішу залежність між оберненими результатами вимірювань та провідністю об'єкта.

Натомість коефіцієнти матриці чутливостей для нових значень провідності взагалі залишаються незмінними:

$$J_{V_{i,i,j}}(kg_j) = \frac{\partial V_{meas,i}(kg_j)}{\partial kg_j} = -\frac{1}{U_{meas,i}^2(kg_j)} \frac{\partial U_{meas,i}(kg_j)}{\partial kg_j} = -\frac{k^2}{U_{meas,i}^2(g_j)} \cdot \frac{1}{k^2} \frac{\partial U_{meas,i}(g_j)}{\partial g_j} = -\frac{1}{U_{meas,i}^2(g_j)} \cdot J_{U_{i,i,j}}(g_j) = J_{V_{i,i,j}}(g_j) \quad (8)$$

де  $V_{meas,i}(kg_j)$  – обернені результати вимірювання як функція нових значень провідності.

Із виразу (8) видно, що елементи матриці чутливостей для обернених значень напруги не залежать від масштабних змін провідності, що дає змогу вибирати початкове наближення значень провідності довільним. Завдяки цим властивостям функції  $V_{meas,i} = \Phi(g(x, y))$  слід очікувати значно кращих результатів щодо збіжності ітераційних процедур розв'язання оберненої задачі томографії.

**3. Числове моделювання.** Для встановлення ефективності запропонованого методу виконано числове моделювання. Для спрощення моделювання здійснено для шестигранного об'єкта, дискретизованого 96 однаковими трикутними апроксимаційними елементами для різних моделей зміни провідності. Початкове наближення провідності для розв'язання прямої задачі прийнято однорідним та дорівнює 1 См, а початкове значення провідності об'єкта дослідження –  $g_{m0} = 0,001$  См збільшувалося на 100 % (до значення 0,002 См) для елементів, прийнятих для конкретної моделі зміни провідності.

Моделювання виконано для таких моделей:

- зміна провідності одного елемента в центральній частині об'єкта (рис. 1, а);
- зміна провідності одного елемента на краю об'єкта (рис. 2, а);
- зміна провідності двох сусідніх елементів у центральній частині об'єкта (рис. 3, а);
- зміна провідності двох сусідніх елементів на краю об'єкта (рис. 4, а);
- зміна провідності групи з шести елементів, які утворюють шестикутник у центральній частині об'єкта (рис. 5, а);
- зміна провідності групи з шести елементів, які утворюють шестикутник на краю об'єкта (рис. 6, а);
- зміна провідності десяти випадкових елементів (рис. 7, а).

Умовою збіжності ітераційного процесу було досягнення меншого за максимальну похибку значення. Щоб оцінити ефективність відтворення провідності досліджуваним алгоритмом результати порівнювали із

результатами прямого відтворення провідності. Також для порівняння наведено результати методу непрямого відтворення, у якому для лінеаризації задачі електричної томографії використано проміжне відтворення резистивності. Детальніше цей метод ми описали в [5].

Максимальні за модулем зведені похибки знаходження значень провідності обчислено згідно з виразом:

$$g_{gi\max} = \left| \frac{g_{rec,i,it} - g_{m0,i}}{g_{m0,i}} \cdot 100\% \right|, \quad (9)$$

де  $g_{rec,i,it}$  – реконструйоване значення провідності  $i$ -го апроксимаційного елемента на ітерації з номером  $it$  ( $it=1, 2, 3, \dots$ );  $g_{m0,i}$  – значення провідності  $i$ -го елемента об'єкта.

На рис. 1, б – 7, б наведено графічні залежності значень максимальної похибки на кожній ітерації для трьох методів для кожної з описаних вище моделей.

Оскільки прийнято початкове наближення 1 См, що у 1000 більше за провідність об'єкта (0,001 См), пряме відтворення провідності за методом Ньютона з регуляризациєю взагалі не забезпечує автоматичного відтворення. Тому значення максимальної похибки відтворення провідності на першій ітерації для прямого алгоритму є дуже великим. Лише застосування масштабування до заданого початкового наближення після першої ітерації забезпечує збіжність процесу для цього алгоритму. Натомість алгоритми, які реалізують непряме відтворення та відтворення на основі використання обернених результатів вимірювань напруг, забезпечують автоматичне масштабування. Це підтверджує незалежність елементів матриці чутливостей обернених напруг від масштабних змін провідності об'єкта.

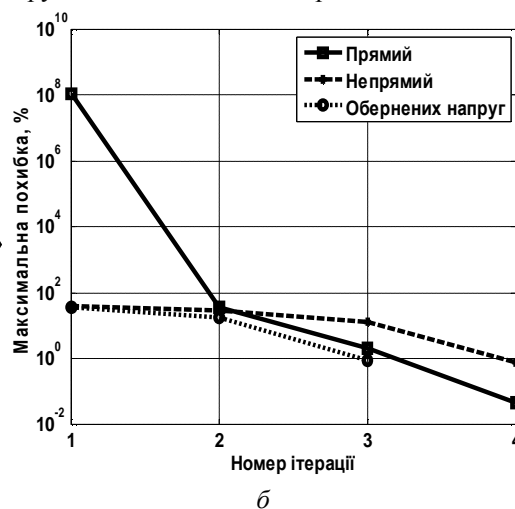
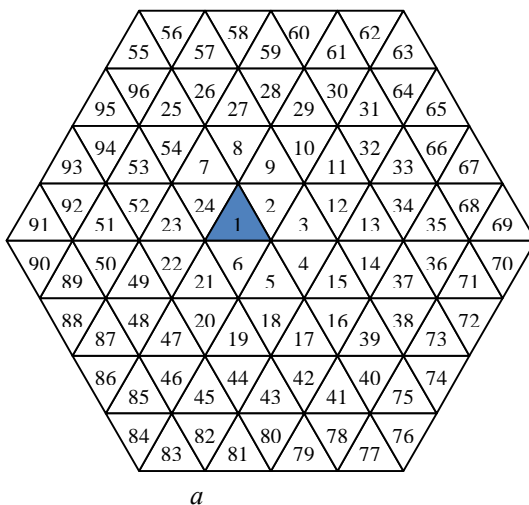


Рис. 1. Модель (а) та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності одного елемента в центральній частині об'єкта

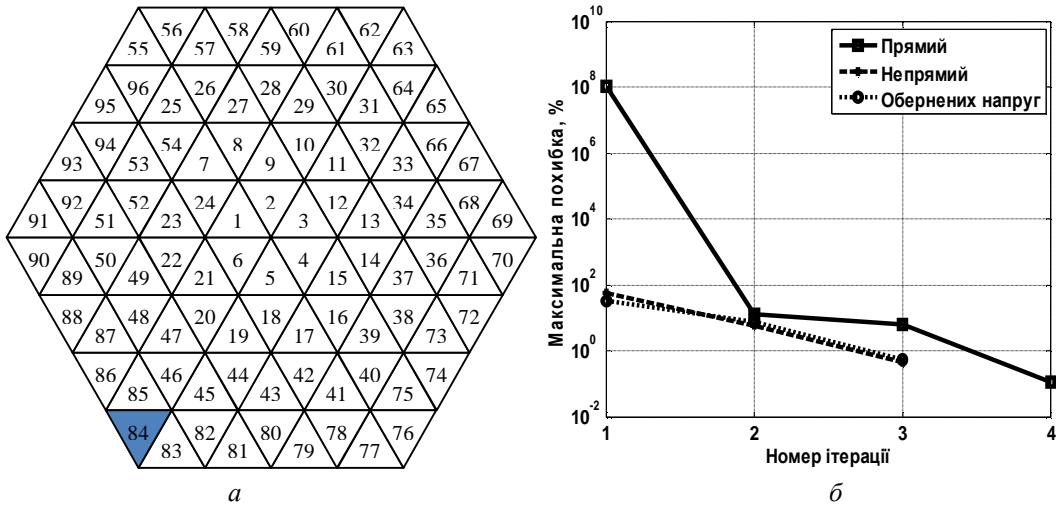


Рис. 2. Модель (а) та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності одного елемента на краю об'єкта

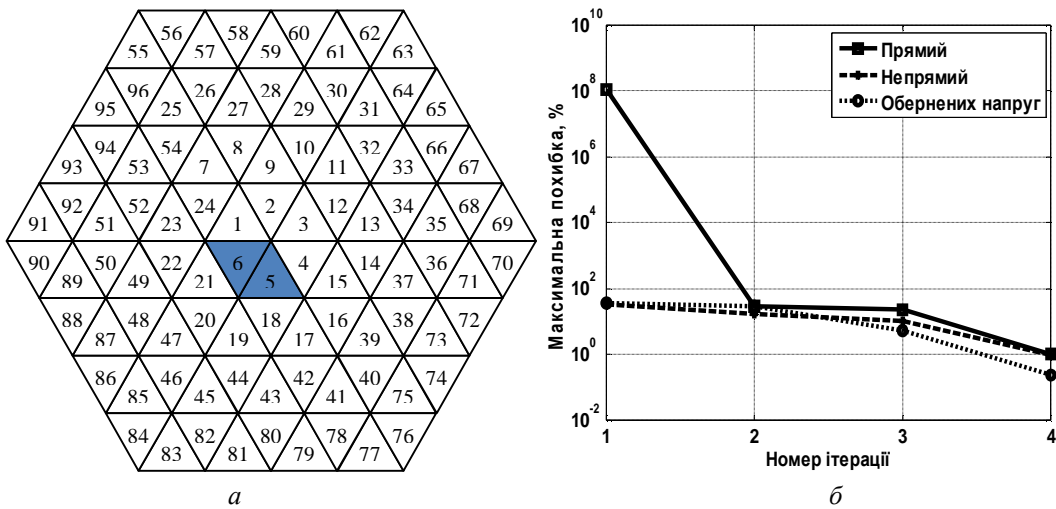


Рис. 3. Модель (а) та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності двох сусідніх елементів у центральній частині об'єкта

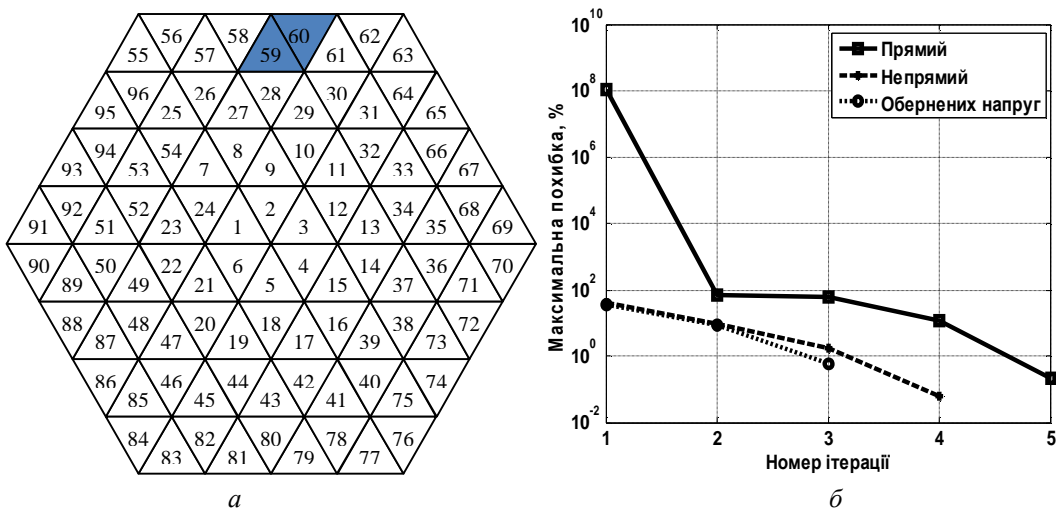


Рис. 4. Модель та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності двох сусідніх елементів на краю об'єкта

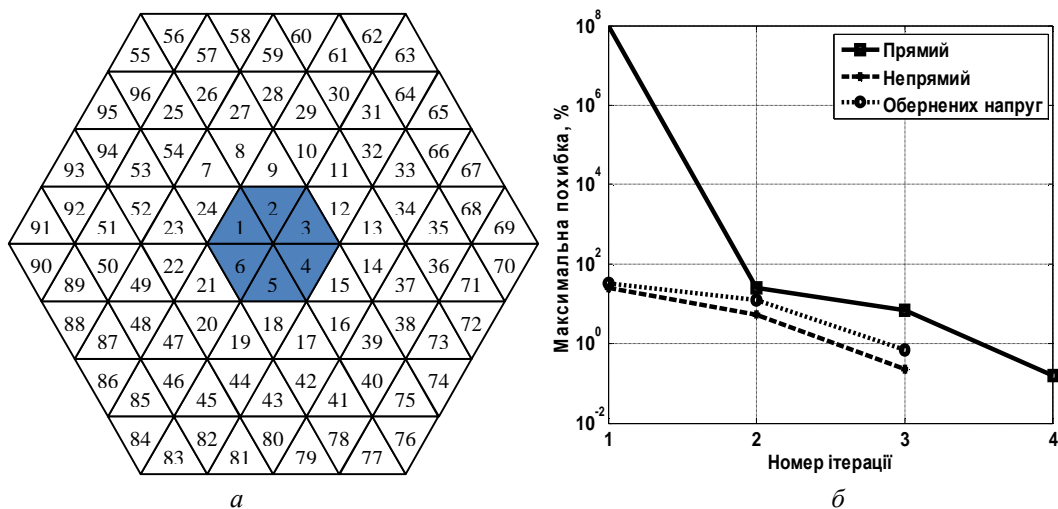


Рис. 5. Модель (а) та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності шести елементів у центральній частині об'єкта

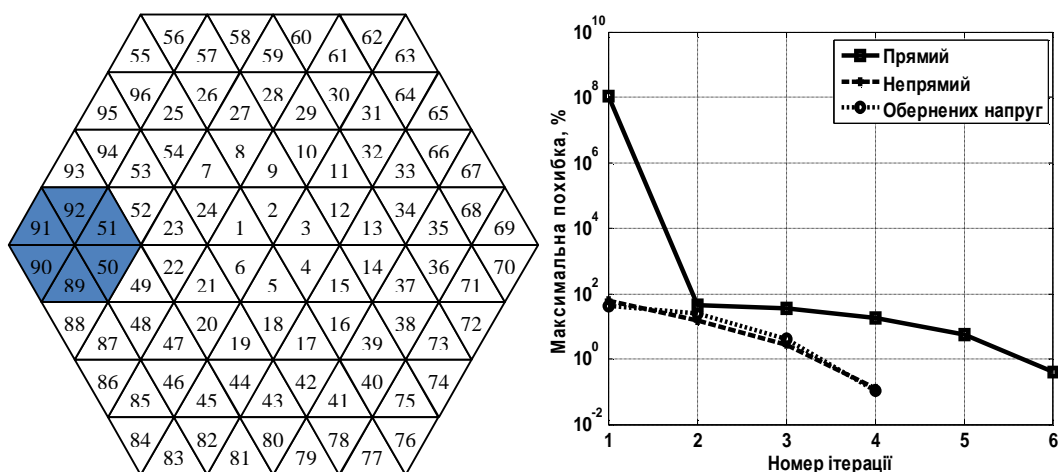


Рис. 6. Модель (а) та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності шести елементів на краю об'єкта

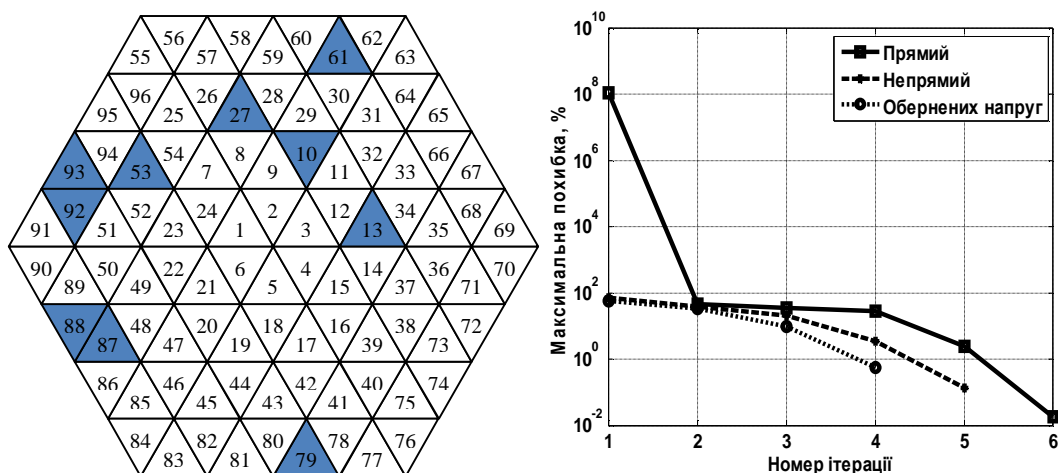


Рис. 7. Модель (а) та максимальна похибка відтворення на кожній ітерації (б) для зміни провідності десяти елементів із випадковим номером

Як видно із наведених рисунків, для переважної більшості моделей досліджуваний алгоритм забезпечує кращу збіжність ітераційних процедур порівняно із прямим (класичним) алгоритмом відтворення розподілу провідності.

**5. Висновки.** Запропонований алгоритм відтворення провідності, який ґрунтується на використанні обернених результатів вимірювань напруг, забезпечує кращу збіжність ітераційних процедур розв'язання оберненої задачі томографії провідності. Це зумовлено лінійнішою залежністю змін функції обернених напруг до змін провідності об'єкта. Цей алгоритм не вимагає точних апріорних знань про провідність досліджуваного об'єкта і дає змогу вибрати початкове наближення провідності довільним.

*1. Дорожовець М.М. Томографічні вимірювання просторового розподілу фізичних величин на прикладах*

*електричної та акустичної томографії: дисертація доктора технічних наук. – Львів, 2001. – 335 с.*  
*2. Primrose K., Qiu C. Performance and Application Studies of an Electrical Resistance Tomography System // 1<sup>st</sup> World Congress on Industrial Process Tomography, Buxton, Greater Manchester, April 14-17, 1999. pp. 133-139.*  
*3. Дорожовець М.М. Використання теореми варіацій для розрахунку матриці Якобі для оберненої задачі електричної томографії // Вісник Держ. ун-ту “Львівська політехніка”, “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. – 2003. – № 479. – С. 67–71.*  
*4. Brydak K., Dorozhovets M. Szybka metoda rozwiazania zagadnienia odwrotnego tomografii elektrycznej // Pomiar, Automatyka, Kontrola. N9\_bis, 2007, T.II. – S.425–428.*  
*5. Дорожовець М.М., Пригородський А.Б. Прямий та опосередкований методи відтворення провідності в електричній томографії // Вимірювальна техніка та метрологія. – 2010. – № 71. – С. 3–7.*

УДК 621.317.38

## ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОХИБОК ВИМІРЮВАННЯ СКЛАДОВИХ ПОТУЖНОСТІ У ВИСОКООМНИХ КОМПЛЕКСНИХ ОПОРАХ МЕТОДОМ ЗМІЩЕННЯ СИСТЕМИ КООРДИНАТ ЗА НАПРУГОЮ

© Грибок Микола, 2011

Національний університет “Львівська політехніка”, кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,  
 вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

*На основі математичної моделі вимірювального кола за допомогою імітаційного моделювання одержано залежності похибок вимірювання складових потужності від впливних факторів.*

*Исходя из математической модели измерительной цепи, путем имитационного моделирования получены зависимости погрешностей измерения составляющих мощности от влияющих факторов.*

*Based on the mathematical model of measuring circle by imitation design, depends of errors influences on measuring of active and reactive power are got.*

**1. Вступ.** Методи вимірювання складових потужності [1– 4, 7], основані на використанні вольтметрів діючого значення напруги, забезпечують високу точність вимірювань лише у випадку, коли вхідний імпеданс вольтметра набагато більший від імпедансу об'єкта досліджень. Якщо вимірювання виконують у широкому діапазоні частот, імпеданс об'єкта досліджень і вхідний імпеданс вольтметра стають співмірними, що призводить до зростання методичної похибки вимірювання складових потужності.

**2. Мета дослідження.** Розробити метод та схему вимірювання складових потужності у високоомних об'єктах досліджень. За допомогою імітаційного моделювання одержати числові значення похибок вимірювань залежно від впливних факторів.

**3. Схема вимірювання та основні математичні співвідношення.** Узагальнена структурна схема вимірювання (рис. 1) містить джерело напруги ДН, комутатор К, блок управління БУ, аналогово-цифровий