УДК 536.2

Б.С. Воробець*, Р.В. Лампіка
Національний університет «Львівська політехніка»,
кафедра електронного машинобудування,
*Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
кафедра фундаментальних дисциплін

ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ПОКРИТТЯМИ

Для стрижневих трубчастих елементів з нанесенням на їхні поверхні теплопровідних покриттів, що знаходяться в умовах конвективного теплообміну із оточуючим середовищем; виведено рівняння та сформульовано відповідні крайові умови, які описують процес теплопровідності у таких елементах. Розглянуто також випадок наявності всередині елемента теплопровідного наповнювача.

Differential equations are shown out and boundary and initial terms which describe the process of unstationary heat conductivity of tubular bar elements at their convection heat exchange with an environment are formulated, which take into account a presence: inflicted on its external and internal surfaces of coverage from other materials; heat conductivity stuff into an element. In partial case, from the got equations of heat conductivity swim out for: tubular elements with one-side coverage and continuous round bar with coverage.

Постановка проблеми. Трубчасті елементи з покриттями є складовими машин і апаратів, теплоенергетичного обладнання, інженерних теплових мереж, пожежної техніки тощо. Переважно такі елементи працюють в умовах інтенсивного нагрівання і нанесені на них покриття дають змогу впливати на їхні температурні поля. Це, своєю чергою, дає можливість оптимізувати режими нагрівання трубчастих елементів, що веде до підвищення термінів їх експлуатації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Теплопровідність трубчастих елементів без покриттів була розглянуто в праці [1], де показано, що тепловий стан таких елементів повністю визначається температурою, усередненою по площі поперечного перерізу.

Формулювання мети досліджень. Мета роботи – отримати співвідношення, які описують процес нестаціонарної теплопровідності стрижневих трубчастих елементів з нанесеними на їхні поверхні теплопровіднми покриттями з іншого матеріалу, а також наявності всередині них теплопровідного наповнювача.

Викладення основного матеріалу досліджень. Приймемо за вихідне рівняння просторової нестаціонарної задачі теплопровідності, яке в циліндричних координатах у разі осьової симетрії має вигляд [3]:

$$\frac{\lambda_r}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial r}\right)+\lambda_s\frac{\partial^2 t}{\partial s^2}=c\frac{\partial t}{\partial \tau}, \tag{1}$$

де t – температура; r, s – радіальна та осьова координати; τ – час; λ_r, λ_s і c – коефіцієнти теплопровідності та теплоємність матеріалу трубчастого елемента.

Введемо у розгляд усереднену характеристику температурного поля трубчастого елемента

$$T = \frac{1}{F}\iint\limits_{(F)} t dF, \tag{2}$$

де F – область поперечного перерізу елемента.

Розв'язок рівняння (1) шукатимемо операторним методом [2], який не потребує попередніх допущень щодо розподілу температури у стрижневих трубчастих елементах. Цей розв'язок запишемо у вигляді

$$t = J_0\left(p_* r\right)\cdot A + Y_0\left(p_* r\right)\cdot B, \tag{3}$$

$$p_*^2 = \frac{1}{\lambda_r}\left(\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial s^2} - c\frac{\partial}{\partial \tau}\right), \tag{4}$$

де A, B – функції від s і τ, які підлягають визначенню; $J_n(x)$ і $Y_n(x)$ – функції Бесселя дійсного аргументу x першого і другого роду порядку n.

Підставимо у співвідношення (2) замість t його вираз (3), у результаті одержимо:

$$T = 2\left[p_*\left(R_a^2 - R_b^2\right)\right]^{-1}\left\{\left[R_a J_1\left(p_* R_a\right) + R_b J_1\left(p_* R_b\right)\right]\cdot A + \left[R_a Y_1\left(p_* R_a\right) + R_b Y_1\left(p_* R_b\right)\right]\cdot B\right\}, \tag{5}$$

де R_a, R_b – зовнішній та внутрішній радіуси трубчастого елемента.

I. Розглянемо стрижень трубчастого поперечного перерізу, на поверхнях якого – зовнішній $r=R_a$ і внутрішній $r=R_b$ – нанесені тонкі покриття з іншого матеріалу. На поверхні розділу «стрижень-покриття» існує ідеальний тепловий контакт, а на межі «покриття-середовище» відбувається теплообмін за законом Ньютона.

У працях [4, 5] для тіл з покриттями одержано узагальнені граничні умови теплообміну на поверхнях контакту «тіло-покриття», що враховують наявність покриттів. Для стрижня, що розглядається, ці умови мають вигляд:

$$\left[\left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right)\left(\lambda_r \frac{\partial t}{\partial r}\right) - 2\lambda_1^{(r)} h_1\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right)p_{*1}^2 t + \varepsilon_1^{(c)}\left(t - t_1^{(c)}\right)\right]_{r=R_a} = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right)\left(\lambda_r \frac{\partial t}{\partial r}\right) - 2\lambda_2^{(r)} h_2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_2^{(c)}}\right)p_{*2}^2 t - \varepsilon_2^{(c)}\left(t - t_2^{(c)}\right)\right]_{r=R_b} = 0; \tag{6}$$

$$p_{*i}^2 = \frac{1}{\lambda_i^{(r)}}\left(\lambda_i^{(s)} \frac{\partial^2}{\partial s^2} - c_i \frac{\partial}{\partial \tau}\right), \quad r_i = \frac{2h_i}{\lambda_i^{(r)}}, \quad r_i^{(c)} = \frac{1}{\varepsilon_i^{(c)}}, \quad i = 1,2, \tag{7}$$

де $\lambda_i^{(r)}$, $\lambda_i^{(s)}$ і c_i – коефіцієнти теплопровідності та теплоємність матеріалу покриття; h_i – товщина шару покриття; r_i – внутрішній термоопір покриття; $\varepsilon_i^{(c)}$ – коефіцієнт теплопровідності з вільної поверхні покриття; $r_i^{(c)}$ – опір теплообміну цієї поверхні; $t_i^{(c)}$ – температура середовища, що омиває вільну поверхню покриття. Тут і далі індекс $i=1,2$ відносить відповідні величини до покриттів, що прилягають до поверхонь $r=R_a$ і $r=R_b$.

Вважатимемо, що на торцевих поверхнях стрижня $s=s^{\pm}$ виконуються умови конвективного теплообміну:

$$\left[\lambda_s \frac{\partial t}{\partial s} \pm \varepsilon_c^{\pm}\left(t - t_c^{\pm}\right)\right]_{s=s^{\pm}} = 0, \tag{8}$$

де $\varepsilon_c^{\pm}$ – коефіцієнт тепловіддачі з торцевих поверхонь; $t_c^{\pm}$ – температури середовищ, що омивають ці поверхні.

Підставимо у співвідношення (6) замість t його значення (3), в результаті одержимо систему рівнянь для визначення величин A і B. Якщо знайдені із цієї системи значення A і B внести у формулу (5), то прийдемо до такого операторного рівняння безмежно високого порядку на усереднену температуру T:

$$\frac{1}{2} p_* \left(R_a^2 - R_b^2\right) D(p_*) T = D_1(p_*) \varepsilon_1^{(c)} t_1^{(c)} + D_2(p_*) \varepsilon_2^{(c)} t_2^{(c)}, \tag{9}$$

$$D(p_*) = \left[\varepsilon_1^{(c)} - 2\lambda_1^{(r)} h_1 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) p_{*1}^2\right]\left[\varepsilon_2^{(c)} - 2\lambda_2^{(r)} h_2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) p_{*2}^2\right] H_{00}(R_a, R_b) +$$

$$+ \left(1 + \frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right)\left[\varepsilon_1^{(c)} - 2\lambda_1^{(r)} h_1 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) p_{*1}^2\right] \lambda_r p_* H_{01}(R_a, R_b) - \tag{10}$$

$$- \left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right)\left[\varepsilon_2^{(c)} - 2\lambda_2^{(r)} h_2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) p_{*2}^2\right] \lambda_r p_* H_{10}(R_a, R_b) - \left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right)\left(1 + \frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) \lambda_r^2 p_*^2 H_{11}(R_a, R_b);$$

$$D_1(p_*) = \left(1 + \frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) \lambda_r p_* R_a H_{11}(R_a, R_b) + \left[\varepsilon_2^{(c)} - 2\lambda_2^{(r)} h_2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) p_{*2}^2\right]\left[R_a H_{10}(R_a, R_b) - \frac{2}{\pi p_*}\right];$$

$$D_2(p_*) = \left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) \lambda_r p_* R_b H_{11}(R_a, R_b) + \left[\varepsilon_1^{(c)} - 2\lambda_1^{(r)} h_1 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) p_{*1}^2\right]\left[R_b H_{01}(R_a, R_b) + \frac{2}{\pi p_*}\right];$$

$$H_{ij}(R_a, R_b) = J_i(p_* R_a) Y_j(p_* R_b) - Y_i(p_* R_a) J_j(p_* R_b), \quad (i, j = 0,1). \tag{11}$$

Розкладемо оператори (10), які входять у рівняння (9), в ряди за степенями R_a і R_b, а потім відкинемо треті і вищі степені цих параметрів. У результаті одержимо:

$$\left[\lambda_r \left(R_a^2 - R_b^2\right) p_*^2 + 4\lambda_1^{(r)} h_1 R_a p_{*1}^2 + 4\lambda_2^{(r)} h_2 R_b p_{*2}^2\right] T(s,\tau) +$$

$$+ 2\lambda_r \left[Bi_a Bi_b \ln R_* - \left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) Bi_b - \left(1 + \frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) Bi_a\right] T(s,\tau) = \tag{12}$$

$$= 2\lambda_r \left\{\left[\left(1 + \frac{r_2}{r_2^{(c)}}\right) - Bi_b \left(\frac{\ln R_*}{1 - R_*^2} + \frac{1}{2}\right)\right] Bi_a t_1^{(c)} + \left[\left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) + Bi_a \left(\frac{R_*^2 \ln R_*}{1 - R_*^2} + \frac{1}{2}\right)\right] Bi_b t_2^{(c)}\right\};$$

$$Bi_a = \frac{\varepsilon_1^{(c)} R_a}{\lambda_r}; \quad Bi_b = \frac{\varepsilon_2^{(c)} R_b}{\lambda_r}; \quad R_* = \frac{R_b}{R_a}, \tag{13}$$

де Bi_a, Bi_b – критерії Біо.

Рівняння (12) потрібно доповнити граничними та початковими умовами. Для цього проінтегруємо по області F поперечного перерізу співвідношення (8). Тоді матимемо

$$\left[\lambda_s \frac{\partial T}{\partial s} \pm \varepsilon_s^{\pm} T\right]_{s=s^{\pm}} = \frac{1}{F} \iint_{(F)} t_s dF . \tag{14}$$

Аналогічно одержуємо початкову умову

$$T(s,0) = \frac{1}{F} \iint_{(F)} t_0 dF, \tag{15}$$

де t_0 – початковий розподіл температур.

Отже, для визначення середньої температури T трубчастого елемента потрібно розв'язати рівняння (12) за умов (14) і (15).

Зауважимо, що рівняння (12) дає змогу записати відповідні рівняння для трубчастого стрижня з однобічним покриттям. Для цього достатньо покласти у рівнянні (12) $h_1=r_1=0$ чи $h_2=r_2=0$. У разі відсутності покриттів ($h_1=h_2=r_1=r_2=0$) з рівняння (12) випливає рівняння, одержане у [2].

Розглянемо ще один частковий випадок, що випливає з рівняння (12). Якщо в ньому спрямувати R_b до нуля і покласти $h_2=r_2=0$, то з врахуванням другої рівності (13) одержимо рівняння теплопровідності для середньої температури T стрижня круглого суцільного перерізу з покриттям:

$$\left(\lambda_r R_a^2 p_*^2 + 4\lambda_1^{(r)} h_1 R_a p_{*1}^2\right)T - 2\lambda_r Bi_a (T - t_1^{(c)}) = 0. \tag{16}$$

Граничними і початковими умовами для цього рівняння будуть рівності (14) і (15).
Якщо у рівнянні (1) покласти $h_1=0$, то одержимо рівняння теплопровідності для суцільного стрижня без покриття, виведене у [3, 6].

II. Розглянемо випадок, коли всередині трубчастого стрижневого елемента міститься теплопровідний наповнювач. Згідно з [5] область $r\le R_b$, що зайнята наповнювачем, можна виключити з розгляду, прийнявши на внутрішній поверхні таку граничну умову:

$$(\lambda_r \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{2}\lambda_0^{(r)} R_b p_{*0}^2 t)_{r=R_b} = 0, \tag{17}$$

де оператор p_{*0}^2 має вигляд (7), якщо у ньому покласти $i=0$. Тут і надалі індекс «0» відносять до розглядуваної величини щодо наповнювача.

Якщо в умову (17) та першу з умов (6) замість t внесемо його вираз (3) і визначимо з одержаної системи рівнянь A і B, після чого підставимо їх значення у співвідношення (5), то матимемо

$$\frac{1}{2} p_* \left(R_a^2 - R_b^2\right)\Delta\left(p_*\right)T = \Delta_1\left(p_*\right)\varepsilon_1^{(c)} t_1^{(c)}; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \Delta(p_*) = {}& \lambda_r \left(1 + \frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) p_* \left[p_* H_{11}(R_a, R_b) - \frac{1}{2}\lambda_0^{(r)} p_{*0}^2 R_b H_{10}(R_a, R_b)\right] - \\ & - \lambda_r \left[\varepsilon_1^{(c)} - 2\lambda_1^{(\gamma)} h_1 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) p_{*1}^2\right] p_* H_{01}(R_a, R_b) + \\ & + \frac{1}{2}\lambda_0^{(r)} R_b p_{*0}^2 \left[\varepsilon_1^{(c)} - 2\lambda_1^{(\gamma)} h_1 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{r_1}{r_1^{(c)}}\right) p_{*1}^2\right] H_{00}(R_a, R_b); \\ \Delta_1(p_*) = {}& -\lambda_r p_* R_a H_{11}(R_a, R_b) + \frac{1}{2}\lambda_0^{(r)} R_b p_{*0}^2 \left[R_a H_{10}(R_a, R_b) - \frac{2}{\pi p_*}\right]. \end{aligned} \tag{19}$$

Розкланемо оператори (19), що входять у рівняння (18), в ряди за степенями R_a і R_b та відкинемо в одержаних розкладах члени, які містять треті і вищі степені цих параметрів. У результаті одержимо таке диференціальне рівняння для визначення середньої температури T елемента:

$$\left[\lambda_r \left(R_a^2 - R_b^2\right) p_*^2 + \lambda_0^{(r)} R_b^2 p_{*0}^2 + 4\lambda_1^{(\gamma)} h_1 R_a p_{*1}^2\right]T - 2\lambda_r Bi_a \left(T - t_1^{(c)}\right) = 0. \tag{20}$$

Граничними і початковими умовами для цього рівняння будуть рівності (14) та (15).

Зауважимо, що рівняння (20) за R_b®0 переходить у рівняння теплопровідності (16) для суцільного стрижня з покриттям.

Висновки. Виведені диференціальні рівняння та сформульовані граничні і початкові умови, що описують процес нестаціонарної теплопровідності трубчастих стрижневих елементів за їх конвективного теплообміну з довкіллям, які враховують наявність: нанесених на їх зовнішню і внутрішню поверхні покриттів з інших матеріалів; теплопровідного наповнювача всередині елемента.

У частковому випадку з одержаних рівнянь випливають рівняння теплопровідності для трубчастих елементів з однобічним покриттям і суцільного круглого стрижня з покриттям.

Зауважимо, що розрахункові формули, одержані у виведених рівняннях, дають змогу проаналізувати вплив теплофізичних і геометричних параметрів покриттів і наповнювача на розподіл температурних полів у трубчастих елементах. Це стане підставою вибору раціональних розмірів і матеріалів покриття і наповнювача щодо забезпечення оптимальних параметрів нагрівання трубчастих елементів конструкції.

1. Воробець Б.С., Мочернюк Д.Ф., Чернуха Ю.А. Теплопровідність трубчастих елементів // Вісн. Львівського політехнічного ін-ту. – 1974. –№ 84. – С. 124–128. 2. Підстригач Я.С., Ярема С.Я. Температурні напруження в оболонках. – К.: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с. 3. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.-Л.: Наука, 1964. – 488 с. 4. Коляно Ю.М., Хомякевич Е.П. Граничные условия для определения обобщенных динамических температурных напряжений в телах с покрытиями // Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций: Сб. научн. тр. – К., 1978. – С. 43–50. 5. Подстригач Я.С., Воробец Б.С.,Чернуха Ю.А. Температурные поля оболочек с покрытиями и заполнителем // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. –Вып. 19. – С. 49–54. 6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.

УДК 534.111

Т.Є. Данилевич, Б.І. Сокіл, В.Г. Топільницький *
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра теоретичної механіки,
*кафедра електронного машинобудування

ВПЛИВ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ СИПКЕ СЕРЕДОВИШЕ-ВЕРТИКАЛЬНИЙ СТРИЖЕНЬ НА ЗГИННІ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ

Для гасіння нелінійних згинних коливань вертикального стрижня, що знаходиться під дією поперечного періодичного збурення, запропоновано використовувати пасивний поглинач коливань (сипке середовище). Сипке середовище (металеві кульки чи скляний бій, гравій тощо) моделюється у вигляді нашарувань плоских пружних балок. На основі отриманих диференціальних рівнянь руху системи сипке середовище-вертикальний стрижень проаналізовано для резонансного випадку вплив фізико-механічних і геометричних параметрів системи на амплітуду коливань стрижня.

For extinguishing of vibrations of bends of vertical billows their passive absorber which shows by itself a friable environment is offered (metallic or glass marbles, hoggin and others like that). The last is designed as stratifications of flat resilient beams. At the indicated terms differential equalizations of motion of the system are got billow-absorber of vibrations. On the basis of the first approaching of decision of these equalizations correlations which determine influence of physica-mechanical descriptions of billow and environment of passive absorber on peak-frequency description (AFC) of vibrations of billow are got.

Актуальність дослідження. Резонансні коливання різноманітних механічних систем, які зводяться до моделі вертикального стрижня (опори, вертикальні приводи, вишки зв’язку тощо), що викликані дією різних періодичних сил, є дуже небажаними, а подеколи недопустимими, оскільки у багатьох випадках можуть викликати їх швидку поламку, зниження експлуатаційних функцій або й