

1. Ротач В.Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами. – М., 1985. 2. Ковела І.М. Параметричний синтез неперервних і цифрових автоматичних систем регулювання з ПІ- та ПІД-регуляторами // Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2002. – № 450. – С. 38–50. 3. Ковела І.М., Рудяк П.В., Іванюк В.М. Синтез АСР з цифровими ПІ-регуляторами за заданими запасами стійкості по модулю та фазі // Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2004. – № 500. – С. 101–107. 4. Ковела І.М., Іванюк О.О. Синтез цифрових каскадних АСР у просторі параметрів настроювання регуляторів // Вісн. Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2004. – № 506. – С. 207–218.

УДК 621.373.54

Л.В. Мороз, М.Ю. Стахів

Національний університет “Львівська політехніка”,  
кафедра автоматики і телемеханіки

## ПОХИБКИ ДВІЙКОВОГО ЧИСЛО-ІМПУЛЬСНОГО ПОМНОЖУВАЧА

© Мороз Л.В., Стахів М.Ю., 2005

**Досліджено похибки структури на основі двійкових число-імпульсних помножувачів при їх каскадному увімкненні в режимі множення.**

**The error researches of structures based on binary rate multipliers cascade connected in multiply mode has been made in this paper.**

### Вступ

Сьогодні одним з основних елементів число-імпульсних функціональних перетворювачів є двійковий число-імпульсний помножувач (ЧІП) (binary rate multiplier). Цей пристрій використовується для множення цілого числа на сталий дробовий коефіцієнт, добуток в якому зображається цілим числом. Такий помножувач є одним із варіантів спрощеної структури класичного дробового двійкового помножувача (fractional multiplier).

Двійковий ЧІП реалізує функцію

$$y_T = x \cdot \frac{z}{N_m}, \quad (1)$$

де  $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i$  – ціле число, задане послідовністю входних імпульсів;  $z = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$  – керуюче

число помножувача, задане позиційним кодом, причому для кожного  $z = \overline{1, N_m - 1}$  діапазон зміни  $x = \overline{1, N_m}$ ;  $N_m = 2^n$ , де  $n$  – кількість двійкових розрядів помножувача.

Функцію (1) можна зобразити у вигляді

$$y_T = x \cdot z', \quad (2)$$

де  $z' = \frac{z}{N_m}$  – дробовий коефіцієнт.

Із урахуванням (1) рівняння (2) можна записати так:

$$y_T = \sum_{i=0}^{n-1} x b_i 2^{i-n} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \right) \left( \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^{i-n} \right). \quad (3)$$

У класичному дробовому двійковому помножувачі функція множення реалізується так.

Кожен із співмножників представлений  $n$ -розрядним числом, а добуток –  $2n$ -розрядним числом, причому результат складається із  $n$  розрядів, що є цілою частиною добутку, та  $n$  розрядів дробової частини добутку.

Одним із можливих способів спрощення структури класичного дробового двійкового помножувача є зображення результату тільки цілою частиною добутку, тобто  $n$  старшими розрядами

$$y_R = \text{ent}[x \cdot z'] = \text{ent} \left[ \sum_{i=0}^{n-1} x b_i 2^{i-n} \right], \quad (4)$$

де  $\text{ent}[\ ]$  – ціла частина.

Можливий інший варіант спрощення схеми помножувача, в якому добуток зображається також цілим числом (тобто  $n$  старшими розрядами), однак кожен із часткових добутків (3) округлюється до найближчого цілого числа, а результат дорівнює сумі округлених часткових добутків.

Тобто

$$y_R = \sum_{i=0}^{n-1} A_i, \quad (5)$$

де

$$A_i = \text{ent} \left[ x \cdot b_i 2^{i-n} + \frac{1}{2} \right] = \text{ent} \left[ x \cdot 2^{i-n} + \frac{1}{2} \right] b_i, \quad (6)$$

Помножувач, котрий працює за алгоритмом (5), (6), називають ще звичайним двійковим помножувачем (conventional binary gate multiplier) [12]. Існують також інші назви цього помножувача: цифрочастотний помножувач, двійковий помножувач, інтегратор з послідовним перенесенням [5, 7]. Функціональна схема такого типу помножувача зображена на рис. 1.

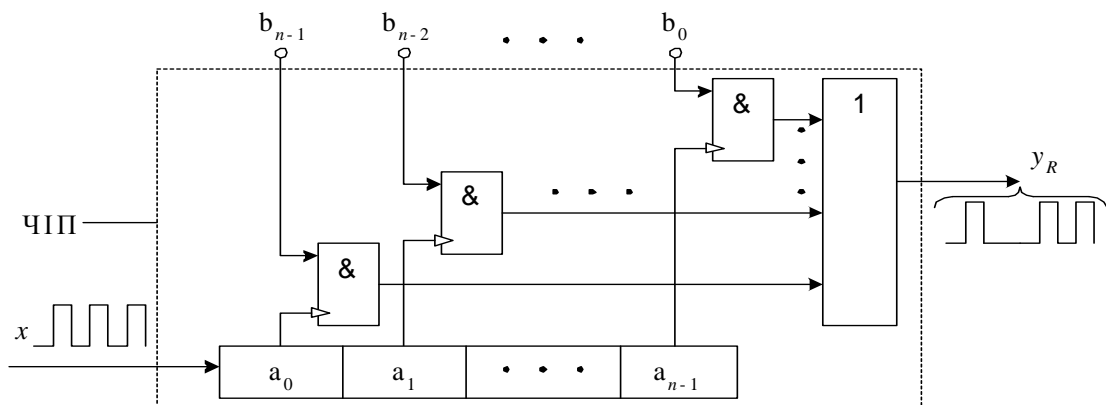


Рис. 1. Функціональна схема звичайного двійкового помножувача

Основна відмінність двійкового число-імпульсного помножувача від класичного дробового двійкового помножувача полягає в тому, що в класичному помножувачі обидва співмножники задаються позиційним кодом, а в число-імпульсному один із співмножників задається позиційним кодом (дробовий коефіцієнт), а другий – цілою кількістю імпульсів.

Можливий також варіант побудови спрощеного дробового двійкового помножувача, добуток в якому зображується цілим числом, що працює за таким алгоритмом

$$y_R = \text{ent} \left[ x \cdot z' + \frac{1}{2} \right] = \text{ent} \left[ \left( \sum_{i=0}^{n-1} x \cdot b_i 2^{i-n} \right) + \frac{1}{2} \right], \quad (7)$$

тобто добуток класичного дробового двійкового помножувача округлюється до найближчого цілого числа.

В літературі такий число-імпульсний помножувач називають accumulator rate multiplier, або помножувач на основі нагромаджувального суматора, або інтегратор з паралельним перенесенням. Одна із можливих функціональних схем такого помножувача зображена на рис. 2 [1, 12, 14, 16].

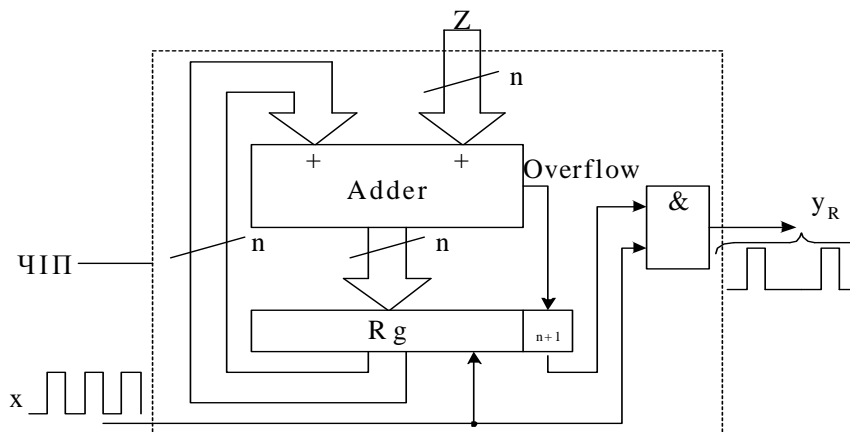


Рис. 2. Функціональна схема помножувача на основі нагромаджувального суматора

Треба відзначити, що алгоритм (5) реалізується таким помножувачем, якщо перед початком роботи записати в старший розряд регістра Rg логічну 1, тобто  $Rg(0) = 2^{-1}$ .

Якщо ж перед початком роботи  $Rg(0) = 0$ , то помножувач буде працювати за алгоритмом (4). Зауважимо також, що при  $Rg(0) = 0$  можлива реалізація алгоритму (3) за умови, що цілу частину добутку фіксують за допомогою підсумовувального лічильника, підключеного до виходу схеми &, а дробову – в регістрі Rg.

Підсумовуючи викладене, можна зробити такі висновки. Двійковий ЧПП є спрощеним варіантом класичного дробового двійкового помножувача. Якщо в класичному дробовому двійковому помножувачі результат множення n-розрядного цілого числа на n-розрядний дробовий коефіцієнт зображається 2n-розрядним числом, n-розрядів якого являють собою цілу частину добутку, а ще n розрядів – дробову, то у двійковому ЧПП результат множення зображається цілим n-розрядним числом (n-старшими розрядами). Причому двійковий ЧПП може працювати як за алгоритмом (5), (6), так і за алгоритмом (4), (7).

Двійкові ЧПП реалізовані у вигляді інтегральних схем середнього ступеня інтеграції. Наприклад, помножувачі, що працюють за алгоритмом (5), (6), випускають у двох варіантах – з  $n = 4$  (CD 4089) та  $n = 6$  (SN 7497, K155IE8).

Прикладом інтегрального виконання помножувача, що працює за алгоритмом (4), (7), може бути мікросхема, описана в [12].

Аналіз похибок двійкового ЧПП, побудованого на базі лічильника або суматора, виконано у [1–8; 15; 17]. Однак всі ці роботи стосуються аналізу похибок помножувачів в режимі додавання, тобто при реалізації залежності (1). Тому доцільно буде розглянути похибки двійкового ЧПП в режимі множення.

Метою роботи є аналіз похибок двійкового ЧПП, побудованого на базі лічильника або нагромаджувального суматора, в режимі множення при каскадному увімкненні.

### Виклад основного матеріалу

При каскадному увімкненні розрізняють два режими роботи двійкових ЧПП в інтегральному виконанні – режим підсумовування (add mode) та режим множення (multiply mode) [12].

В режимі додавання при каскадному увімкненні, наприклад, двох інтегральних ЧПП, що мають по n двійкових розрядів кожний [9, 17], реалізується залежність:

$$y = x \cdot \frac{z_1}{2^n} + \frac{x}{2^n} \cdot \frac{z_2}{2^n} = x \cdot \frac{z_1 2^n + z_2}{2^{2n}} = x \cdot \frac{z}{2^{2n}}, \quad (8)$$

тобто в режимі додавання керуюче число  $z$  розділяється на два числа  $z_1$  та  $z_2$  (відповідно старші та молодші розряди числа  $z$ )

$$z = z_1 2^n + z_2, \quad (9)$$

а пристрій фактично реалізує функцію (1).

Режим множення відрізняється тим, що у такому разі вхідним число-імпульсним кодом наступного каскаду є вихідний число-імпульсний код попереднього (рис.3).

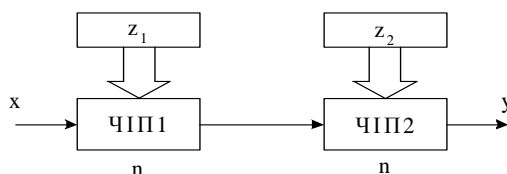


Рис. 3 Каскадне увімкнення двох інтегральних ЧІП

Наприклад, пристрій, що зображений на цьому рисунку, реалізує функцію

$$y = x \cdot \frac{z_1}{2^n} \cdot \frac{z_2}{2^n} = \frac{x \cdot z_1 z_2}{2^{2n}}. \quad (10)$$

Враховуючи те, що похибки двійкового ЧІП в режимі множення практично не розглядались, буде доцільно їх дослідити, наприклад, при відтворенні залежності (10).

Очевидно, що можна було б дослідити похибки пристрою рис. 3 за допомогою імітаційного моделювання на ЕОМ, як це зроблено для режиму додавання у [6]. Однак реальні можливості сучасних комп'ютерів для моделювання режиму множення у разі повного перебору всіх можливих комбінацій не дають змоги піднятися вище від значень  $n = 8 \dots 10$ , тому що при зростанні розрядності  $n$  на одиницю кількість варіантів перебору зростає приблизно у 16 разів.

Перш ніж перейти до аналізу похибок структури, що призначена для реалізації функції (10), розглянемо деякі базові поняття, що стосуються відтворення функції (1).

За абсолютну похибку двійкового ЧІП при відтворенні функції (1) будемо вважати величину

$$\Delta = y_R - y_T, \quad (11)$$

де  $y_R$  – кількість імпульсів на виході двійкового ЧІП при поданні на його вхід  $x$  імпульсів при керуючому числі  $z$ ;  $y_T$  – теоретична функція перетворення двійкового ЧІП (1–3).

Значення  $\Delta$  виражають в одиницях молодшого розряду для  $n$ - розрядного двійкового ЧІП. Особливий інтерес становлять екстремальні значення похибок залежно від значення  $n$ .

Якщо двійковий ЧІП працює за алгоритмом (5), (6), тобто побудований на основі лічильника (рис.1). то складова формули (11)  $y_R$  буде мати такий вигляд [1–8]:

$$y_R = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \sum_{i=0}^{n-1} S_i \cdot b_i, \quad (12)$$

де

$$S_i = a_{n-i-1} + \sum_{k=0}^{i-1} a_{n+k-i} \cdot 2^k, \quad (13)$$

а  $y_T$  визначається з (3).

Поточне значення похибки  $\Delta$  описується рівнянням:

$$\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-1-i} \left( \frac{b_i}{2} - \sum_{k=1}^i 2^{-(k+1)} \cdot b_{i-k} \right), \quad (14)$$

або рівносильним йому рівнянням

$$\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} b_{n-1-i} \left( \frac{a_i}{2} - \sum_{k=1}^i 2^{-(k+1)} \cdot a_{i-k} \right). \quad (15)$$

Доведено [1,5,8,11], що для будь-якого  $n \geq 3$  при заданому значенні  $z$  умовою виникнення максимуму додатної похибки є

$$a_{n-1-i} = b_i; \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (16)$$

а від'ємної похибки:

$$a_{n-1-i} = 1 - b_i; \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (17)$$

Екстремуми додатної похибки для будь-якого  $n \geq 3$  виникають двічі: при керуючому числі  $z_1^+$  та відповідному йому  $x_1^+$  і при керуючому числі  $z_2^+$  та  $x_2^+$  (з урахуванням (16)):

$$z_1^+ = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}; \quad (18)$$

$$x_1^+ = 3 \cdot 2^{n-2} + \frac{2^{n-2}(-1)^n - 1}{3}; \quad (19)$$

$$\text{та } z_2^+ = \frac{5 \cdot 2^{(n-1)} - (-1)^n}{3}; \quad (20)$$

$$x_2^+ = 3 \cdot 2^{n-2} + \frac{2^{n-2}(-1)^{n+1} + 1}{3}. \quad (21)$$

Визначимо тепер значення  $y_R$  згідно з (12), (13), наприклад, для  $z_1^+$  та  $x_1^+$  з (18), (19), позначивши його через  $y_{R1}^+$ .

Знайдемо, що для будь-якого  $n \geq 3$  при  $x = x_1^+$

$$S_i = 3 \cdot 2^{(i-2)} + \frac{(-1)^{n+1-i}}{3} + \frac{(-1)^n}{12} \cdot 2^i, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (22)$$

Звідси  $y_{R1}^+ = A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i = A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} S_i b_i$  і враховуючи, що

$$A_0 = a_{n-1} \cdot b_0 = 1,$$

знайдемо

$$y_{R1}^+ = \frac{7}{36} + \frac{1}{6}n + 2^{(n-1)} + \frac{(-1)^n}{18} 2^n + \frac{(-1)^n}{4}. \quad (23)$$

Аналогічно для  $z_2^+$  та  $x_2^+$  маємо

$$y_{R2}^+ = 5 \cdot 2^{(n-3)} + \frac{1}{6}n + \frac{25}{36} + \frac{(5 \cdot 2^{(n-1)} + 9)(-1)^{n+1}}{36}. \quad (24)$$

Звідси неважко знайти відповідно  $y_{T1}^+$  та  $y_{T2}^+$  згідно з (3)

$$y_{T1}^+ = 2^{(n-1)} - \frac{7}{36} + \frac{(9 + 2^{(n+1)})(-1)^n}{36} + \frac{(-1)^{n+1}}{9 \cdot 2^n}; \quad (25)$$

$$y_{T1}^+ = 5 \cdot 2^{(n-3)} + \frac{11}{36} + \frac{(5 \cdot 2^{n-1} + 9 + 2^{(-n+2)})(-1)^{n+1}}{36}. \quad (26)$$

Підставляючи в (11) відповідно значення  $y_{R1}^+$  та  $y_{T1}^+$  і  $y_{R2}^+$  та  $y_{T2}^+$ , одержимо в обох випадках

$$\max_{n \geq 3} \Delta^+ = \frac{1}{6}n + \frac{7}{18} + \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^n}, \quad (27)$$

що збігається з результатами робіт [1-8].

Аналогічно можна знайти екстремум від'ємної похибки, котрий теж виникає двічі:

$$z_1^- = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3}; \quad (28)$$

$$x_1^- = 2^{n-2} + \frac{2^{(n-2)} \cdot (-1)^{n+1} + 1}{3}; \quad (29)$$

$$\text{та } z_2^- = \frac{2^n - (-1)^n}{3}; \quad (30)$$

$$x_2^- = 2^{n-2} + \frac{2^{(n-2)} \cdot (-1)^n - 1}{3}. \quad (31)$$

Тепер одержимо, що

$$y_{R1}^- = \frac{5}{36} - \frac{n}{6} + \frac{2^{(n-2)}(-1)^{(n+1)}}{18} + \frac{2^{(n-3)}}{3} + \frac{(-1)^n}{12}; \quad (32)$$

$$y_{R2}^- = -\frac{1}{36} - \frac{n}{6} + \frac{2^n(-1)^n}{36} + \frac{2^{(n-2)}}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{12}; \quad (33)$$

$$\text{та } y_{T1}^- = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{(n-2)}}{18} + \frac{1}{36} + \frac{2^{(n-3)}}{3} + \frac{(-1)^n}{12} + \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^n}; \quad (34)$$

$$y_{T2}^- = \frac{(-1)^n \cdot 2^{(n-2)}}{9} - \frac{5}{36} + \frac{2^{(n-2)}}{3} + \frac{(-1)^{n+1}}{12} + \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^n}. \quad (35)$$

Підставляючи в (11) значення  $y_{R1}^-$  та  $y_{T1}^-$  і  $y_{R2}^-$  та  $y_{T2}^-$ , знайдемо, що в обох випадках

$$\max_{n \geq 3} \Delta^- = \frac{1}{9} - \frac{n}{6} - \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^n}. \quad (36)$$

При відтворенні функції (1) за допомогою помножувача на основі нагромаджувального суматора можливі, як вже згадувалось, варіанти роботи (4) або (7).

У разі реалізації алгоритму (4) неважко знайти, що [1]

$$\max \Delta^+ = 0, \quad (37)$$

оскільки йде відсікання дробової частини добутку, а

$$\max \Delta^- = -\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right) = 2^{-n} - 1. \quad (38)$$

Якщо ж реалізується алгоритм (7), то очевидно, що максимальне значення абсолютної похибки помножувача не може перевищувати 0,5 одиниці молодшого розряду через округлення добутку до найближчого цілого числа:

$$\max \Delta^+ = 0.5; \quad (39)$$

$$\max \Delta^- = 2^{-n} - \frac{1}{2}. \quad (40)$$

Отже, при відтворенні функції (1) на помножувачі з нагромаджувальним суматором не відбувається збільшення абсолютної похибки із зростанням кількості  $n$  двійкових розрядів. В цьому полягає основна відмінність між двома типами помножувачів, увімкнених в режимі додавання.

При каскадному увімкненні  $k$  помножувачів в режимі множення відтворюється залежність

$$y_T = x \frac{z_1}{N_m} \cdot \frac{z_2}{N_m} \cdot \dots \cdot \frac{z_k}{N_m} = x \frac{z_1 z_2 \dots z_k}{N_m^k} = x \frac{\prod_{v=1}^k z_v}{N_m^k}, \quad (41)$$

причому

$$z_v = \overline{1, N_m - 1}, \quad x = \overline{1, N_m^k}.$$

При відтворенні цієї залежності поточне значення абсолютної похибки можна записати як

$$\Delta = y_R - y_T, \quad (42)$$

де  $y_R$  – кількість імпульсів на виході пристрою (тобто на виході останнього  $k$ -го помножувача) при поданні на вхід пристрою  $x$  імпульсів при керуючих кодах  $z_v$  для  $v$ -го помножувача;  $y_T$  – теоретична функція перетворення (41).

Величину  $y_R$  можна зобразити як

$$y_R = y_k = y_{R(k-1)} \cdot \frac{z_k}{N_m} + \Delta_k, \quad (43)$$

де  $y_{R(k-1)}$  – кількість імпульсів на вході ( $k - 1$ -го помножувача, котре є вхідною кількістю імпульсів для  $k$ -го помножувача;  $\Delta_k$  – поточне значення абсолютної похибки  $k$ -го ЧП.

Виконуючи аналогічні перетворення для решти помножувачів, одержимо, що

$$y_R = x \cdot \frac{\prod_{v=1}^k z_v}{N_m^k} + \Delta_1 \frac{z_2 z_3 \dots z_k}{N_m^{(k-1)}} + \Delta_2 \frac{z_3 z_4 \dots z_k}{N_m^{(k-2)}} + \dots + \Delta_v \frac{z_{v+1} z_{v+2} \dots z_k}{N_m^{(k-v)}} + \dots + \Delta_{k-1} \frac{z_k}{N_m} + \Delta_k \quad (44)$$

Отже, рівняння (42) можна записати:

$$\Delta = \Delta_1 \frac{z_2 z_3 \dots z_k}{N_m^{(k-1)}} + \Delta_2 \frac{z_3 z_4 \dots z_k}{N_m^{(k-2)}} + \dots + \Delta_v \frac{z_{v+1} z_{v+2} \dots z_k}{N_m^{(k-v)}} + \dots + \Delta_{k-1} \frac{z_k}{N_m} + \Delta_k = \sum_{i=1}^k \Delta_i \cdot \frac{\prod_{v=i+1}^k z_v}{N_m^{(k-i)}}. \quad (45)$$

Розглянемо тепер похибки при  $k = 2$ , тобто при двокаскадному увімкненні двійкового ЧП (рис.3).

Із (45) випливає, що при відтворенні залежності (10) поточне значення абсолютної похибки описується рівнянням:

$$\Delta = \Delta_1 \frac{z_2}{N_m} + \Delta_2. \quad (46)$$

Максимальне значення виразу (46) виникає при максимальних значеннях похибки  $\Delta_1$  помножувача ЧП1 і похибки  $\Delta_2$  для відповідного  $z_2$  для другого помножувача ЧП2. Розглянемо похибки перетворювача, коли обидва помножувачі ЧП1 та ЧП2 побудовані на основі лічильника. Спочатку дослідимо максимальне значення додатної похибки виразу (46) у такому разі.

Як впливає з раніше викладеного матеріалу, максимальне значення додатної похибки  $\Delta_1$  виникає при двох різних значеннях керуючого коду  $z_1$  і відповідних значеннях числа  $x_1$ , що записане в лічильнику помножувача ЧП1.

Позначимо їх відповідно через  $z_{11}$  та  $z_{12}$  і  $x_{11}$  та  $x_{12}$  (див. (18) – (21)):

$$z_{11}^+ = \frac{1}{3} \cdot 2^{(n+1)} + \frac{1}{3} (-1)^n; \quad x_{11}^+ = 3 \cdot 2^{(n-2)} + \frac{1}{3} \cdot 2^{(n-2)} \cdot (-1)^n - \frac{1}{3}; \quad (47)$$

$$z_{12}^+ = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 2^{(n-1)} - \frac{1}{3} (-1)^n; \quad x_{12}^+ = 3 \cdot 2^{(n-2)} + \frac{1}{3} \cdot 2^{(n-2)} \cdot (-1)^{(n+1)} + \frac{1}{3}. \quad (48)$$

Для цих обох випадків максимальне значення додатної похибки  $\Delta_1$  описується виразом (27):

$$\max \Delta_1^+ = \frac{1}{6} n + \frac{7}{18} + \frac{1}{9} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}. \quad (49)$$

Максимальне значення похибки  $\Delta_2$  другого помножувача ЧП2 виникає при відповідних значеннях керуючого коду  $z_2^+$

$$z_2^+ = \frac{11}{3} \cdot 2^{(n-2)} + \frac{1}{3} \cdot (-1)^n \quad (50)$$

та коду  $x_2^+$ , записаного в лічильнику другого помножувача:

$$x_2^+ = 3 \cdot 2^{(n-2)} + \frac{2^{(n-2)} \cdot (-1)^n + 5}{3} \quad (51)$$

Значення реальної та теоретичної функції перетворення ЧП2 будуть мати вигляд:

$$y_{R2}^+ = 11 \cdot 2^{(n-4)} + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n + \frac{11}{9} \cdot 2^{(n-4)} \cdot (-1)^n + \frac{67}{36} + \frac{1}{6}n; \quad (52)$$

$$y_{T2}^+ = 11 \cdot 2^{(n-4)} + \frac{11}{9}(-1)^n + \frac{56}{36} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{5 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n} \quad (53)$$

Максимальне значення додатної похибки  $\max \Delta_2^+$  буде таким:

$$\max \Delta_2^+ = y_{R2}^+ - y_{T2}^+ = \frac{11}{36} + \frac{1}{6}n - \frac{5}{9} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} \quad (54)$$

Отже, враховуючи вирази (49) та (54), можна записати, що максимальне значення додатної похибки при двокаскадному увімкненні двійкового ЧП на базі лічильника виникає двічі – при  $z_{11}^+$ ,  $x_{11}^+$ ,  $z_2^+$ ,  $x_2^+$  [див. (47), (50), (51)] та при  $z_{12}^+$ ,  $x_{12}^+$ ,  $z_2^+$ ,  $x_2^+$  [див. (48), (50), (51)] і описується виразом :

$$\begin{aligned} \max^+ \Delta &= \max^+ \Delta^+ \cdot \frac{z_2^+}{N_m} + \max \Delta_2^+ = \\ &= \frac{143}{216} + \frac{23 \cdot n}{72} + \frac{(6n - 35) \cdot (-1)^n}{108 \cdot 2^n} + \frac{1}{27 \cdot 2^{2n}} \end{aligned} \quad (55)$$

Максимальне значення від'ємної похибки при двокаскадному увімкненні двійкового ЧП на базі лічильника також виникає при двох різних значеннях керуючого коду ЧП1 і числа, записаного в лічильнику, тобто при  $z_{11}^-$  та  $x_{11}^-$  і при  $z_{12}^-$  та  $x_{12}^-$  [див. (28), (29), (30), (31)]:

$$z_{11}^- = \frac{2^{n-1} + (-1)^n}{3} \quad x_{11}^- = 2^{n-2} + \frac{2^{(n-2)} \cdot (-1)^{n+1} + 1}{3}; \quad (56)$$

$$z_{12}^- = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad x_{12}^- = 2^{n-2} + \frac{2^{(n-2)} \cdot (-1)^n - 1}{3} \quad (57)$$

Максимальне значення похибки ЧП1 в цих обох випадках описується виразом (36):

$$\max \Delta_1^+ = \frac{1}{9} - \frac{n}{6} - \frac{(-1)^n}{9 \cdot 2^n} \quad (58)$$

Однак максимальне значення від'ємної похибки перетворювача (рис. 3) виникає при різних значеннях керуючого коду  $z_2$  та відповідних  $x_2$  для помножувача ЧП2 залежно від значень  $n$  (тут подають відповідні значення  $y_{T2}$  та  $y_{R2}$ ):

$$n = 4..6 \quad z_2^- = \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3} \quad x_2^- = \frac{2}{3} \left[ 2^{n-3} (3 - (-1)^n) - 1 \right]; \quad (59)$$

$$n = 7..12 \quad z_2^- = \frac{5 \cdot 2^{n-1} - (-1)^n}{3} \quad x_2^- = \frac{4}{3} \left[ 2^{n-4} (3 + (-1)^n) - 1 \right]; \quad (60)$$

$$n = 13..24 \quad z_2^- = \frac{1}{3} (11 \cdot 2^{n-2} + (-1)^n) \quad x_2^- = \frac{8}{3} \left[ 2^{n-5} (3 - (-1)^n) - 1 \right]; \quad (61)$$

$$n = 25..48 \quad z_2^- = \frac{1}{3} (23 \cdot 2^{n-3} - (-1)^n) \quad x_2^- = \frac{16}{3} \left[ 2^{n-6} (3 + (-1)^n) - 1 \right]; \quad (62)$$



$$\begin{aligned}
n = 4..6 \quad y_{T2}^- &= \frac{1}{9} 2^{n-1} (3 - (-1)^n) - \frac{4}{9} - \frac{3 \cdot (-1)^n}{36} - \frac{1}{36} - \frac{2 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n}; \\
y_{R2}^- &= \frac{2}{9} 2^{n-2} (3 + (-1)^{n+1}) - \frac{4}{9} - \frac{2 \cdot n - 3 + (-1)^{n+1}}{12}; \\
\max \Delta_2^- &= y_{R2}^- - y_{T2}^- = \frac{5}{18} - \frac{n}{6} + \frac{2 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n};
\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
n = 7..12 \quad y_{T2}^- &= \frac{5}{9} 2^{n-3} (3 + (-1)^n) - \frac{10}{9} + \frac{3 \cdot (-1)^n}{36} - \frac{1}{36} + \frac{4 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n}; \\
y_{R2}^- &= \frac{5}{9} 2^{n-3} (3 + (-1)^n) - \frac{10}{9} - \frac{2 \cdot n - 5 + (-1)^n}{12}; \\
\max \Delta_2^- &= y_{R2}^- - y_{T2}^- = \frac{8}{18} - \frac{n}{6} + \frac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{9 \cdot 2^n};
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
n = 13..24 \quad y_{T2}^- &= \frac{11}{9} 2^{n-4} (3 - (-1)^n) - \frac{22}{9} - \frac{3 \cdot (-1)^n}{36} - \frac{1}{36} - \frac{8 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n}; \\
y_{R2}^- &= \frac{11}{9} 2^{n-4} (3 + (-1)^{n+1}) - \frac{22}{9} - \frac{2 \cdot n - 7 + (-1)^{n+1}}{12}; \\
\max \Delta_2^- &= y_{R2}^- - y_{T2}^- = \frac{11}{18} - \frac{n}{6} + \frac{8 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n};
\end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned}
n = 25..48 \quad y_{T2}^- &= \frac{23}{9} 2^{n-5} (3 + (-1)^n) - \frac{46}{9} - \frac{3 \cdot (-1)^n}{36} - \frac{1}{36} - \frac{16 \cdot (-1)^n}{9 \cdot 2^n}; \\
y_{R2}^- &= \frac{23}{9} 2^{n-5} (3 + (-1)^n) - \frac{46}{9} - \frac{2 \cdot n - 9 + (-1)^n}{12}; \\
\max \Delta_2^- &= y_{R2}^- - y_{T2}^- = \frac{14}{18} - \frac{n}{6} + \frac{16 \cdot (-1)^{n+1}}{9 \cdot 2^n}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Максимальне значення від'ємної похибки всього перетворювача знаходять за формулою

$$\max \Delta^- = \max \Delta_1^- \frac{Z_2^-}{N_m} + \max \Delta_2^- \cdot 4 \tag{67}$$

$$n = 4..6 \quad \max \Delta^- = \frac{19}{54} - \frac{5 \cdot n}{18} + \frac{5 \cdot (-1)^n}{27 \cdot 2^n} - \frac{n \cdot (-1)^n}{18 \cdot 2^n} - \frac{1}{27 \cdot 2^{2n}}; \tag{68}$$

$$n = 7..12 \quad \max \Delta^- = \frac{19}{54} - \frac{11 \cdot n}{36} - \frac{31 \cdot (-1)^n}{54 \cdot 2^n} + \frac{n \cdot (-1)^n}{18 \cdot 2^n} + \frac{1}{27 \cdot 2^{2n}}; \tag{69}$$

$$n = 13..24 \quad \max \Delta^- = \frac{77}{108} - \frac{23 \cdot n}{72} + \frac{89 \cdot (-1)^n}{108 \cdot 2^n} - \frac{n \cdot (-1)^n}{18 \cdot 2^n} - \frac{1}{27 \cdot 2^{2n}}; \tag{70}$$

$$n = 25..48 \quad \max \Delta^- = \frac{191}{216} - \frac{47 \cdot n}{144} - \frac{415 \cdot (-1)^n}{216 \cdot 2^n} + \frac{n \cdot (-1)^n}{18 \cdot 2^n} + \frac{1}{27 \cdot 2^{2n}}. \tag{71}$$

## Висновки

Виконано порівняльний аналіз похибок ЧПП на основі лічильника і на основі нагромаджувального суматора в режимі додавання. Виведені формули для обчислення екстремальних

похибок перетворювача, в якому обидва помножувачі побудовані на основі лічильника, і працюють в режимі множення. Це дає змогу значно зменшити час комп'ютерного моделювання цієї структури на ЕОМ при достатньо великих розрядностях двійкових ЧПП, які входять до складу наведеної схеми.

1. Воронов А.А., Гарбузов А.Р. и др. Цифровые аналоги для систем автоматического управления. Л., 1960. 2. Dunworth A., Roche J.I. The error characteristics of the binary rate multiplier // *IEEE Transactions on Computers*, 1969, 18, №8. – P. 741 – 745. 3. Lancaster D.J. Matrix representation of the multiplying properties of binary rate multipliers // *IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentations*, 1976, 23, №1. – P. 70 – 75. 4. Struger O. Error analysis of pulse rate multipliers when used as function generators for linear 2-dimensional travel control of machine tools // *Elektrotechnik und Maschinenbau*, 1972, 89 № 10. P. 412 – 422. 5. Браго Е.Н., Аронзон Н.З. Вопросы теории алгоритмических погрешностей двоичных умножителей. – М., 1977. 6. Boghosian D.H., Abdul – Karim M.A.H. Determination of binary rate multiplier error utilizing a digital computing programme // *Computers and Electrical Engineering*, 1978, 5 №2, 151 – 158. 7. Баранов В.П. О погрешности цифро-частотного интегрирования. – *Автоматрия*, 1981, №2, с. 100 – 103. 8. Сізов Б.О. Підвищення точності роботи цифрового інтегратора, побудованого на основі дільника частоти // *Автоматика*, № 1, 1963. 9. Pulse control method and system using multiplier. Tsujikado S., Kamiya M., US Patent 6054830, Apr.25,2000. 10. Antaneh Alamu Abbo Design & Implementation of MLS Data Demodulation and Processing Unit (ASIC for an Integrated Navigation Receiver). Technical Report no TWAIO –96-03. Delft, October 1996. 11. Храпченко В.М. Об оценке двоичного умножения // *Проблемы кибернетики/ Под ред. А.А. Ляпунова*. – М, 1963. – Вып.10. – С.165–177. 12. Den Dulk R.C., Stuyt J.J. Versatile CMOS Rate Multiplier/Variable Divider. “*IEEE Journal of Solid – State Circuits*”. Vol. SC –18, NO.3, June 1983. – P. 267 – 272. 13. Максимович В.Н. Число-импульсные функциональные преобразователи с импульсными обратными связями: Автореф.дис. канд.тех.наук. – Львов, 1993. 14. J. Nieznanski. An Alternative Approach to the ROM-less Direct Digital Synthesis/ *IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS*, VOL.33, NO. 1, JANUARY 1998. – P.169–171. 15. Nieznanski J. Maximum pulse-position and counting error of binary rate multipliers/ *IEE PROCEEDINGS*, Vol.136, Pt. E, No.4, JULY 1989 M. – P.296–305. 16. Nosaka H., Yamaguchi Yo, Muraguchi A Wide – Bandwidth – Output Direct Digital Synthesizer with Multiple Delay Generators // *Japanese Journal of Applied Physics v.39 (2000) 2268-2272 Part 1, No. 4B, 30 April 2000*. 17. Паламарюк Г.О., Котов Н.И. Об исследовании основных статистических характеристик выходного сигнала блока // *Электронное моделирование*. – 1985. Т. 7. – № 1. – С. 52–56.

УДК 536.532

Я.Т. Луцик<sup>1</sup>, Б.І. Стадник<sup>1,2</sup>, С.П. Яцишин<sup>1</sup>, Т.І. Домініук<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Національний університет “Львівська політехніка”

<sup>2</sup>Ряшівська політехніка, Польща

## ВПЛИВ ПОРУВАТОСТІ НА ЗМІНИ ТЕРМО-ЕРС ТЕРМОМЕТРИЧНИХ МАТЕРІАЛІВ

© Луцик Я.Т., Стадник Б.І., Яцишин С.П., Домініук Т.І., 2005

Досліджено зміни термоелектричних властивостей у зв'язку з поруватістю термометричних матеріалів.

The thermoelectric properties of thermoelectric materials were investigated in complex with their porosity.

### Вступ

Найкращими матеріалами високотемпературної термометрії вважають монокристалічні матеріали, які характеризуються найвищою стабільністю термоелектричних та інших електричних