

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ НАМОТУВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ З БАРАБАНАМИ В ФОРМІ ПРАВИЛЬНИХ ПРИЗМ І ПОСТУПАЛЬНИМ КОМПЕНСАТОРОМ

© Будзан В.І., Віннік В.М., Коцюмбас О.Й., 2009

Встановлено залежності між геометричними, кінематичними та силовими параметрами намотувальної системи з двома барабанами в формі правильних призм і встановленим під довільним кутом поступальним компенсатором.

Dependences are set between the geometrical, kinematics and power parameters of the winding system with two drums in the form of correct prisms and forward compensate set under an arbitrary corner.

Постановка проблеми. Аналіз та синтез обладнання, в якому використовуються намотувальні системи, завжди потребують вивчення динамічних явищ, що притаманні цим системам. Конструктивні втілення таких систем різноманітні: від звичайних пасових та ланцюгових передач для приводу волоочильних станів до установок виготовлення обмоток електроелементів. Використання різноманітних компенсаторів (поступальних, коромислових) зумовлює дослідження впливу параметрів системи на величину натягу матеріалу, його стабільність, рівномірність руху тощо. Математична модель роботи намотувальних систем з компенсаторами і призматичними барабанами авторам невідома.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Довговимірні намотувальні системи з різними особливостями вивчені ґрунтовно. Менше досліджені системи із співвимірними значеннями розмірів поперечних перерізів барабанів і міжцентровими відстанями.

У роботах [1, 2, 3] розглянуті або системи з некруговими барабанами без компенсаторів, або системи з компенсаторами, але з круговими циліндричними барабанами. Дослідження динаміки систем з призматичними барабанами і компенсатором має не тільки теоретичне, але й прикладне значення, бо динамічні явища навіть квазістаціонарних режимів існують не тільки при класичному намотуванні, наприклад, електротехнічних котушок, а й роботі ланцюгових передач.

Мета статті. Мета статті полягає в побудові схеми одержання загальних залежностей між геометричними, кінематичними та силовими параметрами відкритої намотувальної системи з двома барабанами в формі правильних призм з підпружиненим поступальним компенсатором.

Виклад матеріалу. Розглядається відкрита намотувальна система з провідним (прийомним) та веденим (віддаючим) барабанами в формі правильних призм і поступальним підпружиненим компенсатором з циліндричною робочою поверхнею. Під час дослідження здебільшого дотримуємося позначень і послідовності аналізу, застосованих у нашій статті [3].

Розглянемо геометричні співвідношення.

Нехай $j = 1, 2$ – номер провідного та веденого барабанів;

r_j – радіуси кіл, вписаних в поперечні перерізи барабанів;

z_j – кількість граней призм;

r_0 – радіус робочої поверхні компенсатора;

ψ_1, ψ_2, β – кути нахилу контактних радіус-векторів барабанів та компенсатора до міжосьової лінії;

α_w – міжосьова відстань між барабанами;

x_0, y_0 – координати точки O – початку напрямної опори компенсатора (взята на його осьовій лінії) в системі з початком в центрі осі першого барабана та віссю абсцис, напрямленою вздовж міжцентрової лінії барабанів;

\tilde{r}_j – еквівалентний радіус (радіус кола, довжина якого дорівнює периметра поперечного перерізу барабанів)

$$\tilde{r}_j = \frac{r_j z_j \operatorname{tg}(\pi/z_j)}{\pi}. \quad (1)$$

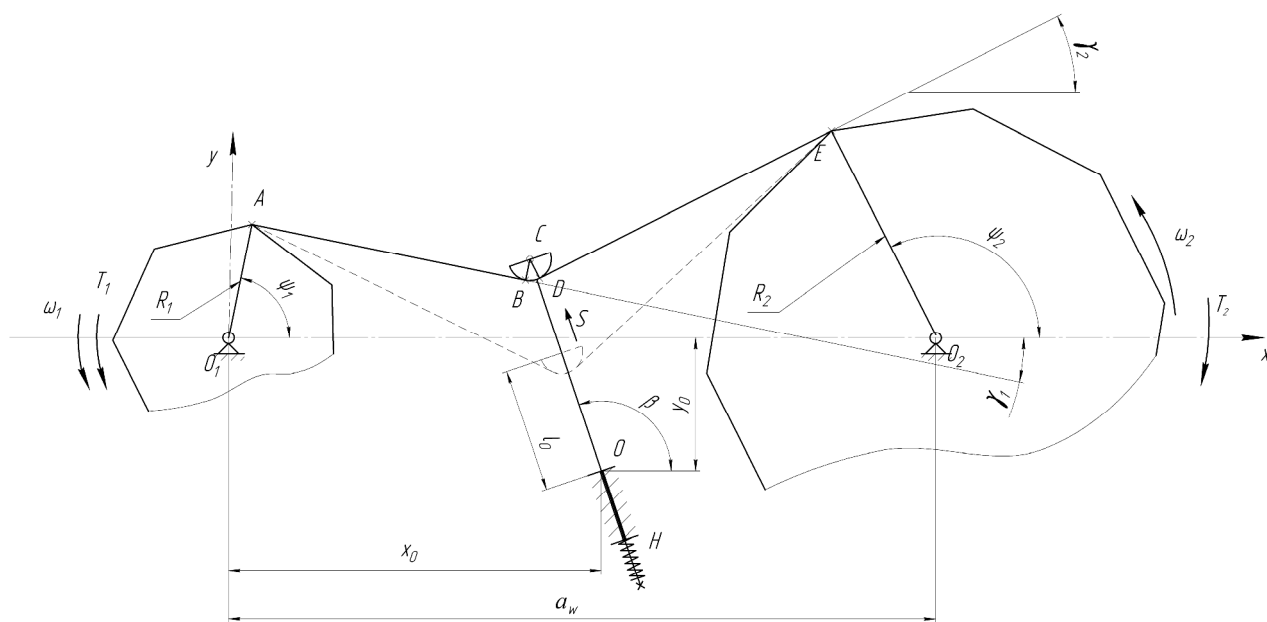


Схема намотувальної системи з призматичними барабанами

Як очевидно з виразу, при $z \rightarrow \infty$ $\tilde{r}_j = r_j$, тобто намотувальна система перетворюється в систему з круговими циліндричними барабанами, яка досліджена в [3].

Використовуємо результати розв'язку дослідженої математичної моделі з циліндричними барабанами як наближення системи з призматичними барабанами (надалі ці наближені параметри відзначені знаком “титли”):

$\tilde{r}_j, \tilde{\psi}_j, \tilde{\varphi}_j, \tilde{s}, \tilde{\gamma}_j, \tilde{F}_j$ – радіуси і кути нахилу радіус-векторів, кути повороту барабанів, переміщення компенсатора, кути нахилу намотуваного матеріалу до осі абсцис та зусилля в матеріалі на відповідних ділянках.

Визначимо довжини ділянок матеріалу між барабанами і компенсатором та матеріалу, що контактує з робочою циліндричною (фрикційною або поверхнею ролика) компенсатора

$$l_j^2 = (x_j - x_0)^2 + y_0^2 + R_j^2 + 2R_j((x_j - x_0)\cos\beta - y_0\sin\beta) - r_0^2 + (l_0 \pm s)^2 - 2(l_0 \pm s)((x_j - x_0)\cos\beta - y_0\sin\beta + R_j\cos(\psi_j - \beta)), \quad (2)$$

Тут x_j – абсциси центрів осей барабанів; $R_j = \frac{r_j}{\cos(\pi/z_j)}$ – радіуси описаних кіл трапеції; s – переміщення компенсатора в напрямку до граничного положення матеріалу від стану тільки при запасовці (без натягу); l_0 – довжина консольної частини компенсатора при $s = 0$.

Довжину матеріалу між барабанами та робочою поверхнею компенсатора можна одержати розкладенням виразу l_j в ряд Тейлора в околиці наближених значень:

$$l_j = \tilde{l}_j + \lambda_{j\psi}(\psi_j - \tilde{\psi}_j) + \lambda_{js}(s - \tilde{s}) \quad (3)$$

або

$$l_j = \tilde{l}_j + \lambda_{jT}(\sin \psi_j - \sin \tilde{\psi}_j) + \lambda_{js}(s - \tilde{s}). \quad (3a)$$

Тут \tilde{l}_j – довжини матеріалу між круговими еквівалентними барабанами і компенсатором

$$\tilde{l}_j = \left((x_j - x_C)^2 + y_C^2 - (r_j + r_0)^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

де згідно з [3]

$$\tilde{l}_j = l_{j0} + \lambda_{js} \tilde{s},$$

$$l_{j0} = \left((x_0 - x_j)^2 + y_0^2 + l_0^2 + 2l_0((x_0 - x_j)\cos\beta + y_0 \sin\beta) - (\tilde{r}_j + r_0)^2 \right)^{1/2}; \quad (4a)$$

$$\lambda_{js} = \mathbf{m} \frac{l_0 + (x_0 - x_j)\cos\beta + y_0 \sin\beta}{l_{j0}}.$$

Можна обмежитися тільки одним членом розкладення (3) або (3a) в ряд

$$\lambda_{j\psi} = - \frac{R_j(x_j - x_0)\sin \tilde{\psi}_j + y_0 \cos \tilde{\psi}_j + (l_0 \pm \tilde{s})\sin(\tilde{\psi}_j - \beta)}{\tilde{l}_j} \quad (5)$$

$$\lambda_{js} = \mathbf{m} \frac{(l_0 \pm \tilde{s}) + (x_j - x_0)\cos\beta - y_0 \sin\beta + R_j(\tilde{\psi}_j - \beta)}{\tilde{l}_j} \quad (6)$$

$$\lambda_{jT} = \frac{\lambda_{j\psi}}{\cos \psi_j}. \quad (7)$$

У залежностях (2)–(6), як і в [3], знак “плюс” відповідає односторонньому розміщенню осей барабанів та опори компенсатора відносно граничного розміщення матеріалу; “мінус” – різносторонньому.

Значення тригонометричних параметрів кутів радіус-векторів циліндричних барабанів мають вигляд

$$\sin \tilde{\psi}_j = \frac{(\tilde{r}_j + r_0)(y_0 + (l_0 \pm \tilde{s})\sin\beta) + (-1)^j(x_j - x_0 - (l_0 \pm \tilde{s})\cos\beta)\tilde{l}_j}{\tilde{l}_j^2 + (\tilde{r}_j + r_0)^2}, \quad (8)$$

$$\cos \tilde{\psi}_j = \frac{(-1)^j(x_j - x_0 - (l_0 \pm \tilde{s})\cos\beta)(\tilde{r}_j + r_0) - (y_0 + (l_0 \pm \tilde{s})\sin\beta)\tilde{l}_j}{\tilde{l}_j^2 + (\tilde{r}_j + r_0)^2}. \quad (9)$$

Величини реальних кутів нахилу ведучого та веденого радіус-векторів призматичних барабанів до осі абсцис можна подати в такій формі:

$$\psi_j = \tilde{\psi}_j(s) + \nu_j(s) - \pi/z_j + \varphi_j + \psi_{пj} - (\tilde{\psi}(s_{п}) + \nu(s_{п}) - \pi/z_j).$$

Після спрощення

$$\Psi_j = \tilde{\Psi}_j(s) + \nu_j(s) + \Phi_j + \Delta_j. \quad (10)$$

Тут Φ_j – кут повороту відповідного барабана – лінійна кусково-періодична функція з періодом $2\pi/z_j$; $\tilde{\Psi}_j(s)$ – поточне значення Ψ_j для переміщення s ; ν_j – значення кута, який існував би між радіус-векторами кругового барабана з еквівалентним та апофемальним радіусами поперечного перерізу

$$\nu_j = \arcsin \frac{(\tilde{l}_j^2 + \tilde{r}_j^2 - r_j^2 + 2r_0(\tilde{r}_j - r_j))^{1/2}(\tilde{r}_j + r_0) - \tilde{l}_j(r_j + r_0)}{\tilde{l}_j^2 + (r_0 + r_j)^2},$$

після розкладення цього виразу в ряд по r_j в околиці \tilde{r}_j встановлюється

$$\nu_j \cong \frac{\tilde{r}_j - r_j}{\tilde{l}_j} = \frac{\tilde{r}_j - r_j}{l_{j0} + \lambda_j \tilde{s}}; \quad (11)$$

$\Psi_{Пj}$ – початкові значення кутів нахилу радіус-векторів (що відповідають початковому значенню переміщення $s_{П}$), очевидно, $\Psi_{Пj} \geq \tilde{\Psi}(s_{П}) + \nu(s_{П}) - \pi/z_j$;

$$\Delta_j = \Psi_{Пj} - \tilde{\Psi}_j(s_{П}) - \nu(s_{П}). \quad (12)$$

Представлення Ψ_j у формі (10) дає змогу виразити значення кутів нахилу радіус-векторів у формі неперервних функцій від кутів повороту барабанів у вигляді ряду Фур'є.

Враховуючи, що $\nu_j(s)$ і $\nu_j(s_{П})$ практично не відрізняються, що очевидно з (11), бо мало відрізняються $\tilde{l}_j(\tilde{s})$ і $\tilde{l}_j(\tilde{s}_{П})$, значення кутів нахилу робочих радіус-векторів зобразимо у формі

$$\Psi_j = \tilde{\Psi}_j(s) - \delta_j + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kz_j} \sin kz_j (\Phi_j + \delta_j), \quad (13)$$

де $\delta_j = \Psi_{Пj} - \tilde{\Psi}_j(s_{П})$.

Відповідно знаходимо і значення тригонометричних функцій

$$\begin{aligned} \sin \Psi_j = \frac{\sin(\pi/z_j)}{(\pi/z_j)} & \left[\sin \tilde{\Psi}_j \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(kz_j)^2 - 1} \cos kz_j (\Phi_j - \delta_j) \right) + \right. \\ & \left. + 2 \cos \tilde{\Psi}_j \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{kz_j}{(kz_j)^2 - 1} \sin kz_j (\Phi_j - \delta_j) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \cos \Psi_j = \frac{\sin(\pi/z_j)}{(\pi/z_j)} & \left[\cos \tilde{\Psi}_j \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(kz_j)^2 - 1} \cos kz_j (\Phi_j + \delta_j) \right) - \right. \\ & \left. - 2 \sin \tilde{\Psi}_j \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{kz_j}{(kz_j)^2 - 1} \sin kz_j (\Phi_j + \delta_j) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

З (12), (13) і (14) очевидно, що при $z \rightarrow \infty$ ці залежності перетворюються в залежності для намотувальної системи з циліндричними барабанами. Крім того, очевидно, що можна скористатися тільки першим членом ряду Фур'є.

Значення $\sin \tilde{\Psi}_j$ та $\cos \tilde{\Psi}_j$ знаходяться за виразами (8) та (9).

Довжина ділянки матеріалу на робочій поверхні компенсатора визначається через нахил матеріалу до міжосьової лінії

$$l_3 = r_0(\gamma_1 - \gamma_2), \quad (16)$$

значення кутів γ_j знаходяться за значеннями їх синусів та косинусів

$$\sin \gamma_j = \frac{(-1)^j (x_j + R_j \cos \psi_j - (x_0 + (l_0 \pm s) \cos \beta)) r_0 + l_j (R_j \sin \psi_j - (y_0 + (l_0 \pm s) \sin \beta))}{l_j^2 + r_0^2}; \quad (17)$$

$$\cos \gamma_j = \frac{l_j (x_j + R_j \cos \psi_j - (x_0 + (l_0 \pm s) \cos \beta)) - (-1)^j r_0 (R_j \sin \psi_j - (y_0 + (l_0 \pm s) \sin \beta))}{l_j^2 + r_0^2}. \quad (18)$$

Ці тригонометричні параметри зазначених кутів подані в загальній формі і для практичного застосування потрібно використовувати їхні наближені значення, одержані розкладенням виразів у ряди Тейлора в околицях параметрів намотувальної системи з циліндричними барабанами

Знаючи геометричні залежності (3), (4), (5), (8), (9), (13)...(18), встановлюємо силові співвідношення в системі.

Рівняння руху барабанів

$$\begin{cases} T_1 - I_1 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} - F_1 \sin(\gamma_1 - \psi_1) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} F_2 \sin(\psi_2 - \gamma_2) - T_2 - I_2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = 0, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} m \ddot{s} + cs + F_0 = F_1 \cos(\gamma_1 - \beta) + F_2 \cos(\beta - \gamma_2), \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} F_1 = F_2 e^{f(\gamma_1 - \gamma_2)} \end{cases} \quad (22)$$

Тут позначення, прийняті в [3], φ_j , I_j , T_j – кути повороту, моменти інерції барабанів та крутні моменти, до них прикладені; F_1 , F_2 – зусилля натягу між компенсатором та провідним і веденим барабанами; c – коефіцієнт жорсткості пружини; m – маса рухомої частини компенсатора; F_0 – сила опору в корпусі компенсатора; f – коефіцієнт тертя (або зведений коефіцієнт) між матеріалом та робочою поверхнею компенсатора.

Два останні параметри проаналізовані в [3].

Як бачимо, навіть за наявності геометричних залежностей (3), (4), (13), (14), (15), (17), (18) систему рівнянь (19)–(22) потрібно доповнити ще однією залежністю. Взагалі кажучи, такою залежністю може бути рівняння балансу змотаного та намотаного матеріалу, поданого в диференціальній формі

$$R_1 d\varphi_1 - R_2 d\varphi_2 = dl_1 + dl_2 + dl_3 + d\left(\frac{l_1 F_1}{\alpha}\right) + d\left(\frac{l_2 F_2}{\alpha}\right). \quad (23)$$

Тут $\alpha = E \cdot A$ – жорсткість поперечного перерізу матеріалу на розтяг. Очевидно, три останні члени правої частини (23) – малі величини і ними переважно можна знехтувати (беручи до уваги значну податливість пружини порівняно з податливістю матеріалу).

Після підстановки (3) в (23) та диференціювання по часові знаходиться необхідна залежність

$$R_1 \omega_1 - R_2 \omega_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{d\tilde{s}}{dt} + \frac{d}{dt} (\lambda_{1\psi} (\psi_1 - \tilde{\psi}_1) + \lambda_{1s} (s - \tilde{s})) + \frac{d}{dt} (\lambda_{2\psi} (\psi_2 - \tilde{\psi}_2) + \lambda_{2s} (s - \tilde{s})), \quad (24)$$

де $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$, $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$ – кутові швидкості барабанів.

Висновки. Одержана система рівнянь (19)–(22), (24) – математична модель динаміки намотувальної системи в загальному вигляді. Складність її полягає в загальності постановки задачі і характерній формі барабанів. Але після числових розрахунків параметрів очевидні спрощення задачі.

1. Будзан В.І., Віннік В.М. Методика знаходження силових та кінематичних співвідношень у намотувальних системах з двома некруглими барабанами // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2005. – № 539: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – С. 8–12.
2. Будзан В.І., Віннік В.М., Винник В.В. Представлення кінематичних співвідношень в системах зовнішнього намотування барабанами у формі прямокутників з круговим спряженням кутів // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2006. – № 556: Динаміка, міцність та проектування машин і приладів. – С. 18–23.
3. Віннік В.М., Будзан В.І., Коцюмбас О.Й. Кінематичні та силові співвідношення в намотувальній системі з поступальним підпружиненим компенсатором // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка” – 2008. – № 42: Автоматизація виробничих процесів в машинобудуванні та приладобудуванні. – С. 58–64.

УДК 621.825.5

О.І. Ворона*, В.М. Гелетій, Я.М. Новіцький

*ВАТ “Проектно конструкторський інститут конвеєробудування”,
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра деталей машин

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНОК НЕСУЧИХ КОНСТРУКЦІЙ КОНВЕЄРІВ

© Ворона О.І., Гелетій В.М., Новіцький Я.М., 2009

Розглянуті питання комп'ютерного моделювання процесів статичного і динамічного навантаження конвеєрів. Досліджені особливості застосування сучасних програмних продуктів розрахунку несучих конструкцій конвеєрів.

The long-sized metal constructions of conveyers and computer simulation of its static and dynamical processes are considered. The paper concerns the features of application of software products are for calculations of bearings constructions of conveyers

Постановка проблеми. Несучі балки довгомірних стрічкових конвеєрів, які проектуються для експлуатації в кар'єрах, мають довжину до 50 – 70 м і, як правило, виконуються у вигляді ферм. Розрахунки таких ферм відомими методами будівельної механіки є дуже громіздкими і особливо незручними у випадку оптимізації конструкції. Популярні сучасні програмні продукти проектування металоконструкцій і аналізу їх напружено-деформованого стану виконують поставлену задачу з різним ступенем адекватності і ефективності виконання.

Аналіз відомих досліджень та публікацій та постановка задачі. Розрахункові модулі програмних продуктів моделювання металоконструкцій як правило базуються на основі методу скінченних елементів. Необхідно враховувати неминучі під час застосування числових алгоритмів прийняті допущення і похибки. Незважаючи на наявну документованість числових методів програмних продуктів, вони залишаються в значному ступені чорними скриньками з певною непередбаченістю результатів і можливістю дещо по-різному їх трактувати. Тому питання оцінювання адекватності результатів аналізу напружено-деформованого стану металоконструкцій є завжди важливим і актуальним.