

ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТ І ФОРМ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ СКЛАДЕНОГО СТРИЖНЯ ЯК ТРИШАРОВОЇ КОНСТРУКЦІЇ

© Харченко Є.Ю., Підгайний Т.Ю., 2009

Розглядаються вільні коливання механічної системи у вигляді двох паралельних балок, з'єднаних між собою стрижневою ґраткою. За розрахункову модель системи приймається тришарова конструкція, в якій взаємодія основних балок (поясів) здійснюється через неперервний пружний шар та через дискретні пружні зв'язки. Алгоритм розрахунку власних частот і форм коливань системи ґрунтується на застосуванні технічної теорії згину і матричного методу початкових параметрів.

Free oscillations of mechanical system in the form of two beams, which are connected among themselves by a rod lattice are considered. As a computational model it is accepted the three-layer construction in which interacting of the basic beams (belts) is carried out through a continuous elastic layer and through discrete elastic links. The algorithm of calculation of fundamental frequencies and shapes of oscillations of system is founded on application of the engineering theory of curving and a matrix method of initial parameters.

Постановка проблеми. У сучасних машинах і спорудах широко застосовують складені стрижні, основними елементами яких є пояси, з'єднані між собою стрижневою ґраткою або іншим пружним заповнювачем. Детальний динамічний розрахунок таких тришарових конструкцій здебільшого пов'язаний з числовим інтегруванням систем диференціальних рівнянь високого порядку, що значно утруднює розв'язання інженерних задач. Ефективні підходи до виконання досліджень динамічних явищ у згаданих системах ґрунтуються на застосуванні континуалізованих розрахункових моделей. Найпростішою моделлю складеного стрижня є звичайний брус, деформований стан якого описується із застосуванням технічної теорії згину. Точніші результати розрахунків вільних і вимушених коливань можна одержати, застосовуючи теорію балок С.П. Тимошенка, оскільки в цьому випадку додатково враховується податливість з'єднувальної ґратки на зсув та інерція обертальних рухів поперечних перерізів. Однак для кожного типу інженерних конструкцій придатність континуалізованої моделі і точність отримуваних результатів повинні визначатися на основі виконання точніших розрахунків або експериментально. Зокрема актуальним завданням є встановлення меж придатності для інженерної практики континуалізованої розрахункової моделі кузова автобуса, особливістю конструкції якого є істотна відмінність жорсткісних властивостей основи і даху.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. Основи розрахунків конструкцій із застосуванням засобів континуалізації широко висвітлені в літературі [1, 2, 3, 4]. Практичне застосування такого підходу використане для дослідження динамічних процесів у несівних конструкціях бурових вишок [5, 6, 7], кузовів автомобілів [8, 9] та автобусів [10, 11] тощо. Сучасні дослідження власних коливань шаруватих конструкцій [12, 13, 14, 15, 16] виконують з метою їх віброзахисту, вивчення впливу граничних умов на амплітудно-частотні характеристики, діагностики технічного стану. Для цього застосовують як дискретні, так і континуально-дискретні розрахункові моделі. Однак вільні та вимушені коливання складених стрижневих конструкцій, пояси яких в загальному випадку мають різну жорсткість і взаємодіють між собою одночасно через пружний шар і дискретні зв'язки,

вивчені недостатньо. Потребують спеціального опрацювання алгоритми динамічного розрахунку таких механічних систем.

Постановка задачі. У цій статті пропонується математична модель поздовжньо-поперечних коливань складених стрижнів, пояси яких мають значну жорсткість як на розтяг, так і на згин, а з'єднувальна ґратка (заповнювач) є достатньо густою і може бути ототожнена з неперервним пружним шаром.

Основний матеріал. Розрахункова схема складеного стрижня подана на рис. 1, де поздовжні розміри ділянок поясів позначаємо як $l_{11}, l_{12}, \dots, l_{1,n-1}, l_{21}, l_{22}, \dots, l_{2,n-1}$. На кінцях та у стиках ділянок з металокопункцією жорстко зв'язані вантажі масами $m_{11}, m_{12}, \dots, m_{1n}, m_{21}, m_{22}, \dots, m_{2n}$ і моментами інерції $J_{11}, J_{12}, \dots, J_{1n}, J_{21}, J_{22}, \dots, J_{2n}$. Ексцентриситети центрів мас вантажів щодо осей поясів становлять $\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{1n}, \epsilon_{21}, \epsilon_{22}, \dots, \epsilon_{2n}$. Перерізи поясів, які є межами ділянок, зв'язані між собою пружними ланками 1, 2, ..., n , а з нерухомою основою – деформівними елементами 11, 12, ..., 1 n , 21, 22, ..., 2 n .

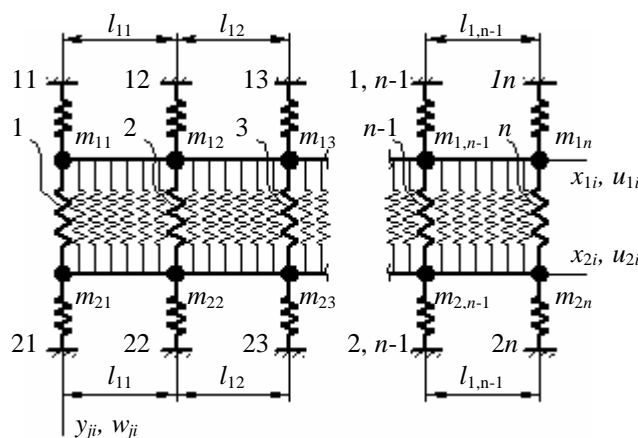


Рис. 1. Розрахункова схема складеного стрижня

Для опису руху поясів конструкції скористаємося поздовжніми координатами x_{ji} , ($j=1, 2; i=1, 2, \dots, n-1$), початки яких розташовані в лівих крайніх перерізах відповідних ділянок.

Поздовжні та поперечні переміщення перерізів поясів позначаємо як u_{ji}, w_{ji} .

Пояси взаємодіють між собою не лише за допомогою дискретних пружних ланок 1, 2, ..., n , а й за допомогою розподілених сил пружності. Континуального характеру взаємодії поясів доходимо, розподіляючи сили, що діють на них з боку елементів стрижневої ґратки, на деяких ділянках несучої металокопункції. Вважаємо, що пояси зв'язані між собою лише точками з однаковими відносними координатами $\xi_i = \xi_{1i} = \xi_{2i}$ ($i=1, 2, \dots, n-1$), де $\xi_{1i} = x_{1i}/l_{1i}$; $\xi_{2i} = x_{2i}/l_{2i}$.

Застосовуючи технічну теорію згинних деформацій стрижнів, рівняння поздовжньо-поперечних коливань поясів запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ji}}{\partial \xi_i} &= \frac{l_{ji}}{EA_{ji}} N_{ji}, & \frac{\partial N_{ji}}{\partial \xi_i} &= l_{ji} \rho_{ji} A_{ji} \frac{\partial^2 u_{ji}}{\partial t^2} - l_{ji} f_{uji}, \\ \frac{\partial w_{ji}}{\partial \xi_i} &= l_{ji} \Phi_{ji}, & \frac{\partial \Phi_{ji}}{\partial \xi_i} &= -\frac{l_{ji}}{EI_{ji}} M_{ji}, \\ \frac{\partial M_{ji}}{\partial \xi_i} &= l_{ji} Q_{ji} - l_{ji} P_{ji} \Phi_{ji} - l_{ji} f_{\alpha ji}, \\ \frac{\partial Q_{ji}}{\partial \xi_i} &= l_{ji} \rho_{ji} A_{ji} \frac{\partial^2 w_{ji}}{\partial t^2} - f_{wji} \end{aligned} \quad (j=1, 2; \quad i=1, 2, \dots, n-1), \quad (1)$$

де E – модуль пружності матеріалу першого роду; ρ_{ji} – густина матеріалу; A_{ji} , I_{ji} – площа і осьовий момент інерції поперечного перерізу пояса; P_{ji} – статична осьова сила; φ_{ji} – кут повороту поперечного перерізу пояса; N_{ji} , M_{ji} , Q_{ji} – поздовжня сила, згинальний момент і поперечна сила; символами f_{uji} , f_{wji} , $f_{\alpha ji}$, позначено розподілені навантаження, що діють в напрямках переміщень u_{ji} та w_{ji} , і розподілені моменти.

Для визначення квазіпружних коефіцієнтів деформівного шару, що зв'язує пояси, розглянемо взаємодію поясів зі стрижнем з'єднувальної решітки з порядковим номером e ($e=1, 2, \dots, l$), нахиленим до вертикалі під кутом γ_e (рис. 2). Скористаємося координатними системами x_1, y_1 та x_2, y_2 , абсциси яких збігаються за напрямками з осями x_{1i}, x_{2i} , ординати – з переміщеннями w_{1i}, w_{2i} відповідно, а початки розташовані у центрах лівих межових перерізів поясів. У вибраних системах координат поступальні та обертальні переміщення перерізів поясів позначаємо як u_j, w_j, φ_j ($j=1, 2$), а координати вузлів кріплення стрижня до поясів – як x_j^e . Стрижень діє на пояси зосередженими силами і моментами $F_{jx}^e, F_{jy}^e, T_j^e$ (рис. 2, а). Переміщення кінців з'єднувального стрижня у локальних координатних системах позначаємо як $\vartheta_j^e, \eta_j^e, \alpha_j^e$, а внутрішні сили – як n_j^e, q_j^e, t_j^e (рис. 2, б).

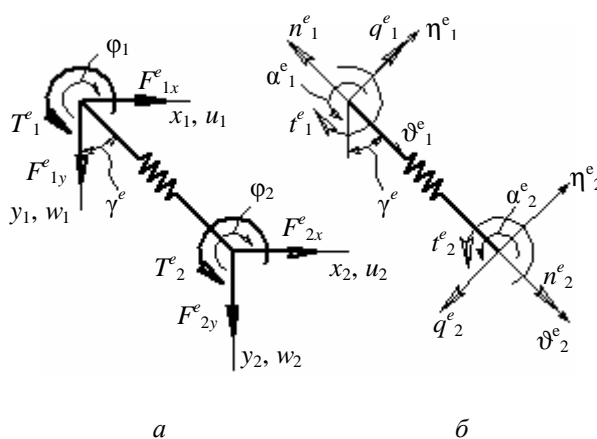


Рис. 2. Схема взаємодії поясів складеного стрижня з елементами з'єднувальної ґратки
Записуємо рівняння зв'язку внутрішніх сил і переміщень стрижня ґратки у вигляді

$$p_1^e = a^e \Psi_1^e + b^e \Psi_2^e; \quad p_2^e = c^e \Psi_1^e + d^e \Psi_2^e \quad (2)$$

$$(j = 1, 2; \quad e = 1, 2, \dots, l),$$

де p_j^e, Ψ_j^e – матриці-колонки,

$$p_j^e = \text{col}(n_j^e, q_j^e, t_j^e) \quad \Psi_j^e = \text{col}(\vartheta_j^e, \eta_j^e, \alpha_j^e)$$

$a_j^e, b_j^e, c_j^e, d_j^e$ – квадратні матриці квазіпружних коефіцієнтів.

Використовуючи подану на рис. 2 розрахункову схему, записуємо такі співвідношення:

$$\Psi_j^e = \Gamma_j^e \Psi_j^e, \quad P_j^e = \Lambda_j^e p_j^e \quad (j = 1, 2; \quad e = 1, 2, \dots, l), \quad (3)$$

де Ψ_j^e, P_j^e – матриці-колонки,

$$\Psi_j^e = \text{col}(u_j(x_j^e, t), w_j(x_j^e, t), \varphi_j(x_j^e, t)),$$

$$P_j^e = \text{col}(F_{jx}^e, F_{jy}^e, T_j^e),$$

Γ_j^e, Λ_j^e – квадратні матриці,

$$\Gamma_1^e = \begin{pmatrix} \sin(\gamma_e) & \cos(\gamma_e) & 0 \\ \cos(\gamma_e) & -\sin(\gamma_e) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_2^e = \begin{pmatrix} -\sin(\gamma_e) & \cos(\gamma_e) & 0 \\ \cos(\gamma_e) & \sin(\gamma_e) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_1^e = \begin{pmatrix} \sin(g_e) & -\cos(g_e) & 0 \\ \cos(g_e) & \sin(g_e) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_2^e = \begin{pmatrix} \sin(\gamma_e) & \cos(\gamma_e) & 0 \\ -\cos(\gamma_e) & \sin(\gamma_e) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Вирази (2) перетворюємо з урахуванням (3) до вигляду

$$P^e = K^e \Psi^e \quad (e=1, 2, \dots, l), \quad (4)$$

де P^e , Ψ^e – матриці-колонки,

$$P^e = \text{col}(P_1^e, P_2^e)^T, \quad \Psi^e = \text{col}(\Psi_1^e, \Psi_2^e)^T;$$

K^e – квадратна матриця, що має блокову структуру,

$$K^e = \begin{pmatrix} \Lambda_1^e a^e \Gamma_1^e & \Lambda_1^e b^e \Gamma_2^e \\ \Lambda_2^e c^e \Gamma_1^e & \Lambda_2^e d^e \Gamma_2^e \end{pmatrix}$$

Для спрощення математичної моделі вважатимемо, що глобальні координати $\xi_1=x_1/l_1$; $\xi_2=x_2/l_2$ точок взаємодії поясів, де l_1 , l_2 – поздовжні розміри поясів рівні між собою. У цьому випадку зосереджені сили і моменти, прикладені до поясів, подаємо як розподілені навантаження f_{uji}^e , f_{wji}^e , $f_{\alpha ji}^e$ ($j=1, 2$), які діють у поступальних та обертальних напрямках, і визначаємо як

$$p^e(\xi, t) = k^e(\xi) \psi(\xi, t), \quad (5)$$

де $\xi=\xi_1=\xi_2$ – відносна поздовжня координата; $p^e(\xi, t)$, $\psi^e(\xi, t)$ – матриці-колонки,

$$p^e(\xi, t) = \text{col}(f_{u1}^e(\xi, t), f_{w1}^e(\xi, t), f_{\alpha 1}^e(\xi, t), f_{u2}^e(\xi, t), f_{w2}^e(\xi, t), f_{\alpha 2}^e(\xi, t))^T,$$

$$\psi(\xi, t) = \text{col}(u_1(\xi, t), w_1(\xi, t), \phi_1(\xi, t), u_2(\xi, t), w_2(\xi, t), \phi_2(\xi, t))^T;$$

$k^e(\xi)$ – квадратна матриця,

$$k^e(\xi) = \frac{K^e}{\Delta_1^e + \Delta_2^e}, \quad \text{якщо } \xi^e - \delta_1^e \leq \xi \leq \xi^e + \delta_2^e;$$

$$k^e(\xi) = 0, \quad \text{якщо } \xi^e + \delta_2^e < \xi < \xi^e - \delta_1^e.$$

Тут

$$\xi^e = \frac{x_1^e + x_2^e}{l_1 + l_2}, \quad \delta_1^e = \frac{2\Delta_1^e}{l_1 + l_2}, \quad \delta_2^e = \frac{2\Delta_2^e}{l_1 - l_2},$$

причому $\Delta^e = \Delta_1^e + \Delta_2^e$ – довжина відрізка, на якому розподілені навантаження, що діють з боку елемента ґратки з порядковим номером e , відмінні від нуля.

Значення довжин відрізків Δ_1^e і Δ_2^e для поперечних планок приймаємо такими, що дорівнюють половинам відстаней між планками; для діагональних стрижнів – обчислюємо за формулою

$$\Delta_1^e = \Delta_2^e = \text{abs}\left(\frac{x_1^e - x_2^e}{2}\right)$$

Визначаючи матриці квазіпружних коефіцієнтів $k^1(\xi)$ і $k^2(\xi)$ для крайніх поперечних планок, металокопункції складеної балки умовно продовжуємо ліворуч і праворуч на відстані $\Delta_1^1 = \Delta_2^1$ і $\Delta_1^2 = \Delta_2^2$ відповідно. Повні значення розподілених навантажень на пояси з боку деформівного шару знаходимо у вигляді

$$p(\xi, t) = k(\xi)\psi(\xi, t), \quad (6)$$

де

$$p(\xi, t) = \sum_{e=1}^l p^e(\xi, t); \quad k(\xi) = \sum_{e=1}^l k^e(\xi). \quad (7)$$

Вираз (6) отримано підсумовуванням лівих і правих частин рівностей (5).

Елементи матриці квазіпружних коефіцієнтів, що визначається другим співвідношенням (7), розглядатимемо як функції координати ξ_i ($i=1, 2, \dots, n-1$). Їх позначаємо символами k_{irs} , де r і s – номери рядка і колонки відповідно. Розподілені навантаження, які фігурують у рівняннях (1), подаємо у вигляді

$$f_i(\xi_i, t) = k_i(\xi_i)\psi_i(\xi_i, t), \quad (8)$$

де $f_i(\xi_i, t)$ і $\psi_i(\xi_i, t)$ – матриці-колонки,

$$f_i(\xi_i, t) = \text{col}(f_{u1i}, f_{w1i}, f_{\alpha1i}, f_{u2i}, f_{w2i}, f_{\alpha2i}),$$

$$\psi_i(\xi_i) = \text{col}(u_{1i}, w_{1i}, \Phi_{1i}, u_{2i}, w_{2i}, \Phi_{2i});$$

$k_i(\xi_i)$ – квадратна матриця квазіпружних коефіцієнтів.

Розв'язки рівнянь (1), що відповідають гармонічним коливанням, мають вигляд

$$u_{ij} = U_{ij} \begin{pmatrix} \xi_{ji} \end{pmatrix} \sin \omega t, \quad w_{ij} = W_{ij} \begin{pmatrix} \xi_{ji} \end{pmatrix} \sin \omega t,$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij} \begin{pmatrix} \xi_{ji} \end{pmatrix} \sin \omega t, \quad N_{ij} = N_{oij} \begin{pmatrix} \xi_{ji} \end{pmatrix} \sin \omega t,$$

$$M_{ij} = M_{oij} \begin{pmatrix} \xi_{ji} \end{pmatrix} \sin \omega t, \quad Q_{ij} = Q_{oij} \begin{pmatrix} \xi_{ji} \end{pmatrix} \sin \omega t,$$

$$(j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (9)$$

де $U_{ij}(\xi_{ji})$, $W_{ij}(\xi_{ji})$, $F_{ij}(\xi_{ji})$, $N_{oij}(\xi_{ji})$, $M_{oij}(\xi_{ji})$, $Q_{oij}(\xi_{ji})$ – амплітудні функції.

Враховуючи (8), (9), розподілені навантаження записуємо як

$$f_{uji} = f_{0uji} \sin \omega t, \quad f_{wji} = f_{0wji} \sin \omega t, \quad f_{\alpha ji} = f_{0\alpha ji} \sin \omega t$$

$$(j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (10)$$

Тут f_{0uji} , f_{0wji} , $f_{0\alpha ji}$ – амплітудні функції навантажень, які визначаються із (8) після заміни f_{uji} , f_{wji} , $f_{\alpha ji}$, u_{ji} , w_{ji} , Φ_{ji} на f_{0uji} , f_{0wji} , $f_{0\alpha ji}$, U_{ji} , W_{ji} , Φ_{ji} відповідно.

Використовуючи співвідношення (9), (10), розділяємо змінні у рівняннях (1), внаслідок чого отримуємо рівняння амплітудних функцій

$$\frac{dU_{ji}}{d\xi_{ji}} = \frac{l_{ji}}{EA_{ji}} N_{0ji}, \quad \frac{dN_{0ji}}{d\xi_{ji}} = -l_{ji} \rho_{ji} A_{ji} \omega^2 U_{ji} - l_{ji} f_{0uji},$$

$$\frac{dW_{ji}}{d\xi_{ji}} = l_{ji} \Phi_{ji}, \quad \frac{d\Phi_{ji}}{d\xi_{ji}} = -\frac{l_{ji}}{EI_{ji}} M_{0ji},$$

$$\frac{dM_{0ji}}{d\xi_{ji}} = l_{ji} Q_{0ji} + l_{ji} P_{ji} \Phi_{ji} - l_{ji} f_{0\alpha ji},$$

$$\frac{dQ_{0ji}}{d\xi_{ji}} = -l_{ji} \rho_{ji} A_{ji} \omega^2 W_{ji} - f_{0wji}$$

$$(j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (11)$$

Громіздкість системи диференціальних рівнянь (11), а також змінність квазіпружних коефіцієнтів конструкції з довжиною утруднюють знаходження амплітудних функцій в замкнутому вигляді. Тому залежності геометричних і силових параметрів перерізів поясів від поздовжньої координати визначаємо числовим інтегруванням цієї системи рівнянь за відомих початкових умов.

У зв'язку з необхідністю багаторазового обчислення характеристик пружно-деформованого стану складеного стрижня на кінці ділянки за значеннями цих параметрів на початку ділянки, формуємо квадратну матрицю переходу G_i^* , яка дає можливість записати співвідношення

$$F_i(1, 1) = G_i^* F_i(0, 0), \quad (12)$$

де $F_i(\xi_{1i}, \xi_{2i})$ – матриця-колонка геометричних і силових параметрів поясів,

$$F_i(\xi_{1i}, \xi_{2i}) = \text{col}(F_{1i}(\xi_{1i}), F_{2i}(\xi_{2i})),$$

причому $F_{ji}(\xi_{ji})$ ($j=1, 2; i=1, 2, \dots, n-1$) – матриці-колонки,

$$F_{ji}(\xi_{ji}) = \text{col}(U_{ji}(\xi_{ji}), N_{0ji}(\xi_{ji}), W_{ji}(\xi_{ji}), \Phi_{ji}(\xi_{ji}), M_{0ji}(\xi_{ji}), Q_{0ji}(\xi_{ji})).$$

Колонки матриці G_i^* числово дорівнюють матрицям-колонкам $F_i(1, 1)$, обчисленим інтегруванням диференціальних рівнянь (10) для випадків, коли один із елементів матриці-колонки $F_i(0, 0)$ дорівнює одиниці, а інші – дорівнюють нулю.

Крайові умови інтегрування рівнянь (1) записуємо згідно з принципом Даламбера. На основі застосування методу початкових параметрів формуємо матричну рівність

$$F_n = H_{Fn} \left[\prod_{j=n-1}^1 (G_j^* H_{Fj}) \right] F_0, \quad (13)$$

де H_{Fi} ($i=1, 2, \dots, n$) – матриці переходу через опори конструкції. Одержану рівність (13) використовуємо для визначення коефіцієнтів системи алгебричних рівнянь, розв'язуючи яку, формуємо матрицю-колонку F_0 і обчислюємо початкові параметри ділянок конструкції:

$$F_1(0, 0) = H_{F1} F_0;$$

$$F_i(0, 0) = \left(\prod_{j=1}^2 (H_j G_{j-1}^*) \right) H_{F1} F_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (14)$$

Інтегруючи систему рівнянь (11), визначаємо амплітудні функції переміщень і внутрішніх силових факторів.

Частоти вільних коливань визначаємо з умови рівності нулю визначника відповідної системи алгебричних рівнянь. Потім знаходимо з точністю до постійного множника матрицю-колонку F_0 і початкові параметри ділянок складеного стрижня. Розв'язуючи числовим методом систему рівнянь (11), знаходимо форми вільних коливань.

Висновки. Побудована математична модель дає можливість континуалізацією зв'язків поясів складеного стрижня значно зменшити порядок системи рівнянь, якими описуються коливання механічної системи. Це, своєю чергою, істотно підвищує ефективність аналізу динамічних процесів у несівних конструкціях на стадії їх проектування за рахунок зменшення обсягів обчислень та одночасного забезпечення необхідної точності розрахунків.

Практичне застосування розробленої математичної моделі дає можливість виконання модального аналізу не лише симетричних, а й асиметричних багатопролітних несівних конструкцій, наприклад, тригранних стріл підймальних кранів, колон і ферм дорожніх мостів, каркасів автобусів тощо.

1. Филипов А.П. Колебания деформируемых систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 732 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
3. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.
4. Лащеников Б.Я. Метод перемещения в континуальной форме // Исследования по теории сооружений. Сб. статей / Под ред. Б.Г. Коренева и др. – М.: Стройиздат, 1968. – Вып. XVI. – С. 148–156.
5. Калинин С.Г., Харченко Е.В. Динамика несущих конструкций буровых установок. – Львов: Высш. шк., 1988. – 144 с.
6. Харченко Е.В. Динамические процессы буровых установок. – Львов: Свит, 1991. – 176 с.
7. Харченко Е.В. Континуально-дискретна математична модель бурової установки // Машинознавство. – 1997. – № 1. – С. 41–46.
8. Харченко Е.В., Підгайний Т.Ю. Визначення нижчих власних частот крутильних

коливань кузовів транспортних засобів із застосуванням континуалізованої розрахункової моделі // *Вібрації в техніці та технологіях*. – 2008. – № 1(50). – С. 27–30. 9. Харченко Є.В., Підгайний Т.Ю. Визначення нижчих власних частот згинно-зсувних коливань кузовів транспортних засобів із застосуванням континуалізованої розрахункової моделі // *Машинознавство*. – 2008. – № 8–9. С. 16–20. 10. Підгайний Т.Ю. Математичне моделювання крутильних коливань каркасної метало-конструкції // *Вісн. Нац. ун-ту Львівська політехніка*“, – 2007. – № 583: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль в машинобудуванні та приладобудуванні. – С. 52–57. 11. Харченко Є.В., Підгайний Т.Ю. Визначення власних частот крутильних коливань кузова автобуса ЛАЗ А152 / *Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїн. наук.-техн. журнал*. – 2009. – № 1(53). 12. Choi W.J., Xiong Y.P., Shenoі R.A. Power flow analysis for a floating sandwich raft isolation system using a higher-order theory // *Journal of sound and vibration*, – 2009. – № 319. – P. 228–246. 13. Bonhoff H.A., Petersson. B.A.T. The influence of cross-order terms in interface mobilities for structure-borne sound source characterization: Frame-like structures // *Journal of sound and vibration*. – 2009. – № 319. – P. 305–319. 14. Dallot J., Sab K., Foret G. Limit analysis of periodic beams // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2009. – № 28. – P. 166–178. 15. Murphy K.D., Nichols J.M. A low-dimensional model for delamination in a laterally loaded composite beam: Theory and experiment // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2009. – № 44. – P. 13–18. 16. Kanatani Ken-Ichi. A micropolar continuum model for vibrating grid frameworks / *International Journal of Engineering Science*. – 1979. – № 17(4). – P. 409–418.