УДК 534.111

В.Г. Топільницький, Я.М. Кусий*, М.Б. Сокіл **
Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра електронного машинобудування,
*кафедра технології машинобудування,
** кафедра опору матеріалів

ДИНАМІЧНІ ПРОЦЕСИ В НЕЛІНІЙНИХ ОДНОРІДНИХ ОДНОВИМІРНИХ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМАХ

ã Топільницький В.Г., Кусий Я.М., Сокіл М.Б., 2009

Розглянуто методику дослідження коливних процесів у слабко нелінійних однорідних одновимірних механічних системах (складових конструкцій машин і механізмів) на основі методу Д'Аламбера побудови розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь і асимптотичних методів нелінійної механіки. Досліджено стаціонарні і нестаціонарні режими роботи.

The method of research of hesitating processes is considered in the poorly nonlinear homogeneous unidimensional mechanical systems (component constructions of machines and mechanisms) on the basis of method of D'alambera of construction of decisions of nonlinear differential equalizations and asymptotic methods of nonlinear mechanics. Thus investigational stationary and non-stationary office hours.

Аналіз останніх досліджень і публікацій та постановка проблеми у загальному вигляді. В основу моделювання динаміки одновимірних механічних систем, які зводяться до типу нитки, струни, каната, вала, стрижня покладено методику побудови розв’язків однорідних крайових задач для деяких класів слабко нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Вона грунтується на: а) ідеї зображення розв’язку відповідної незбуреної задачі у вигляді хвилі, частота якої w зв’язана із хвильовим числом k або методі відокремлення змінних; б) принципі одночастотності коливань нелінійних систем із багатьма ступенями вільності і розподіленими параметрами [1]; в) застосуванні асимптотичних методів нелінійної механіки [1, 2] для нових класів нелінійних систем. Подібний підхід для опису динамічних процесів у лінійних однорідних, а також нелінійно пружних одновимірних системах розглядався, наприклад, у [1, 3–5]. У цих роботах описано профіль коливної хвилі, а також досліджено вплив різної природи сил (зокрема і малих нелінійних) на її основні характеристики: амплітуду, локальну частоту, локальне хвильове число. Проте такі важливі з погляду динаміки питання як вплив контакту середовища з джерелом збурення коливань (крайових умов), початкового стану системи (початкових умов відповідних диференціальних рівнянь) на профіль хвилі у роботах [3, 4] не розглядалось. Розв’язання деяких питань цієї складної проблеми стосовно однорідних крайових задач для нелінійного хвильового рівняння, що мають важливе прикладне значення під час математичного моделювання технологічних процесів, наприклад, вібраційного об‘ємного оброблення, вібротранспортування виробів; динамічних процесах в елементах будівельних споруд та механізмів, є предметом розгляду цієї публікації.

Метою статті є: а) використовуючи метод Д‘Аламбера побудови розв‘язків лінійних хвильових рівнянь, узагальнити асимтотичний метод Крилова – Боголюбова – Митропольського на квазілінійний аналог вказаного рівняння; б) показати, що у разі хвильових процесів, близьких до синосоїдальної (косинусоїдальної) форми метод, який базується на представленні Фур‘є і розроблений, є рівноцінними.

Постановка задачі. Одновимірне однорідне пружне тіло, як елемент конструкцій машин і споруд, має широке застосування – у підйомно-транспортних механізмах, бурових установках, лініях електропередач тощо. Відомо [7], що математичною моделлю поздовжніх коливань одновимірного однорідного пружного тіла, матеріал якого близький до лінійного закону пружності, є диференціальне рівняння

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = ef\left(u, u_x, u_t, c\right), \tag{1}$$

в якому $u(x,t)$ – переміщення вздовж осі OX перерізу з координатою x в довільний момент часу t, a – стала, яка виражається через фізико-механічні параметри тіла, $ef\left(u, u_x, u_t, c\right)$ – аналітична $2p$ – періодична по $c = mt$ функція, яка характеризує відхилення пружних властивостей матеріалу тіла від лінійного закону, а також дію малих порівняно із відновлюючою силою періодичних зовнішніх сил, m – частота зовнішнього періодичного збурення, e – малий параметр.

Указана функція може також враховувати вплив сил опору й інших дисипативних сил на динаміку процесу. Диференціальне рівняння (1) описує також нелінійні крутильні коливання валів, поперечні коливання нелінійно пружної струни (каната). Методи побудови та дослідження його одно- й багаточастотних розв'язків за однорідних та збурених крайових умов відомі і достатньо для практичних цілей розглядались, наприклад, в [1]. Нижче розглянемо дещо інший підхід до побудови асимптотичних розв'язків крайових задач для диференціального рівняння (1). В його основу покладено метод Д'Аламбера знаходження розв'язків однорідних хвильових рівнянь та фізично обґрунтоване припущення: у досліджуваному однорідному незбуреному середовищі хвилі мають синусоїдальну форму. Такий підхід до дослідження хвильових процесів отримав новий імпульс розвитку в останні десятиліття (див., наприклад, роботи [3–5]) і здебільшого він є поки що одним із можливих аналітичних методів дослідження динамічних процесів у нелінійних системах.

Методика досліджень. *1. Незбурене рівняння.* Такий випадок спостерігається при розгляді вищевказаних задач у лінійній постановці (без врахування нелінійних сил), і він не завжди адекватно відображає динаміку процесу. Згідно з загальними принципами побудови асимптотичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, необхідно побудувати розв'язки незбуреного ($e = 0$) рівняння, яке відповідає (1), тобто рівняння

$$u^0{}_{tt} - a^2 u^0{}_{xx} = 0. \tag{2}$$

Залежно від способу закріплення одновимірного однорідного пружного тіла (наприклад, різних типів закріплення дротів ЛЕП на опорах) рівняння (1), а отже, і (2), розглядатимемо за крайових умов

$$u^0(x,t)\Big|_{x=0} = u^0(x,t)\Big|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

$$u^0_x(x,t)\Big|_{x=0} = u^0_x(x,t)\Big|_{x=l} = 0, \tag{4}$$

$$u^0(x,t)\Big|_{x=0} = u^0_x(x,t)\Big|_{x=l} = 0, \tag{5}$$

які відповідають обом закріпленим (крайові умови (3)), обом вільним (крайові умови (4)), чи закріпленому початку і вільному (крайові умови (5)) кінцям середовища. Розв'язок сформульованих крайових задач для рівняння (2) можна записати у вигляді накладання прямої і відбитої хвиль

$$u(x,t) = C_1 \cos(kx + wt + j) + C_2 \cos(kx - wt + y), \tag{6}$$

де j, y, k, w, C_1, C_2 – сталі, зміст і вигляд яких буде встановлено нижче.

Примітка. Принципового, з математичного погляду, значення не має зобразити хвилю у вигляді комбінації синосоїдальних чи косинусоїдальних складових.

Як зрозуміло із (2), співвідношення (6) перетворить незбурене рівняння (2) у тотожність, якщо хвильове число κ і частота ω зв'язані дисперсійним співвідношенням

$$w^2 - a^2 k^2 = 0 . \qquad (7)$$

Задовольняючи одну із крайових умов (3)–(5), для знаходження зв'язку між початковими фазами прямої і відбитої хвиль та хвильовим числом, тобто параметрами j, y, k отримуємо системи тригонометричних рівнянь

$$C_1 \cos(wt + j) + C_2 \cos(-wt + y) = 0 , \qquad C_1 \sin(wt + j) + C_2 \sin(-wt + y) = 0 , \qquad (8)$$

$$C_1 \cos(kl + wt + j) + C_2 \cos(kl - wt + y) = 0, \qquad C_1 \sin(kl + wt + j) + C_2 \sin(kl - wt + y) = 0 , \qquad (9)$$

$$C_1 \cos(wt + j) + C_2 \cos(-wt + y) = 0 , \qquad C_1 \sin(kl + wt + j) + C_2 \sin(kl - wt + y) = 0 . \qquad (10)$$

Параметри C_1, C_2, j, y сталі, тому кожна із отриманих систем рівнянь повинна виконуватись для довільного значення t. Останнє існуватиме, якщо фази прямої і відбитої хвиль зв'язані співвідношеннями

$$C_1 \cos j + C_2 \cos y = 0 , \quad C_1 \cos j - C_2 \cos y = 0 , \qquad C_1 \cos(kl + j) + C_2 \cos(kl + y) = 0 ,$$
$$C_1 \sin(kl + j) + C_2 \sin(kl + y) = 0 ; \qquad (11)$$

$$C_1 \sin j - C_2 \sin y = 0 , \qquad C_1 \sin j + C_2 \sin y = 0, \qquad C_1 \sin(\kappa l + \varphi) - C_2 \sin(\kappa l + \psi) = 0 ,$$
$$C_1 \cos(\kappa l + \varphi) - C_2 \cos(\kappa l + \psi) = 0 ; \qquad (12)$$

$$C_1 \cos\varphi + C_2 \cos\psi = 0 , \qquad C_1 \sin\varphi - C_2 \sin\psi = 0 , \qquad C_1 \cos(\kappa l + \varphi) - C_2 \cos(\kappa l + \psi) = 0 ,$$
$$C_1 \sin(\kappa l + \varphi) + C_2 \sin(\kappa l + \psi) = 0 . \qquad 13)$$

Як зрозуміло із (11)–(13), отримані системи рівнянь мають відмінні від тривіальних ($C_1 = C_2 = 0$) розв'язки у випадку, коли між фазами прямої і відбитої хвиль та хвильовим числом існують зв'язки вигляду

$$\sin(j + y) = 0 , \qquad \sin(2kl + j + y) = 0 . \qquad (14)$$

Із (7), (11)–(13) та (14), очевидно: а) пряма і відбита хвилі у розглядуваному однорідному середовищі рухаються у протифазах ($j + y = 0$) або фази прямої і відбитої хвиль зсунуті одна відносно іншої на сталу величину ($j + y = p$); б) хвильові числа для розглядуваних крайових умов приймають значення $k = \dfrac{kp}{l}$, $k = \dfrac{kp}{l}$, $k = \dfrac{(2k+1)p}{2l}$, $k = 1,2,...$; в) власні частоти хвильових пакетів у середовищі із закріпленими та вільних кінцями дорівнює $w = a\dfrac{kp}{l}$, а у разі закріплення лише його початку – $w = a\dfrac{(2k+1)p}{l}$; г) амплітуди прямої і відбитої хвиль у однорідному середовищі однакові.

Отже, одночастотні хвильові процеси в однорідних одновимірних структурах, які описуються диференціальним рівнянням (2) і задовольняють крайові умови (3)–(5), можна записати у вигляді

$$u_k^0(x,t) = a_k \begin{cases} \cos\left(\dfrac{kp}{l}(x + at) + j_k\right) - \cos\left(\dfrac{kp}{l}(x - at) - j_k\right), \\ \cos\left(\dfrac{kp}{l}(x + at) + j_k\right) + \cos\left(\dfrac{kp}{l}(x - at) - j_k\right), \\ \cos\left(\dfrac{(2k+1)p}{2l}(x + at) + j_k\right) - \cos\left(\dfrac{(2k+1)p}{2l}(x - at) - j_k\right), \end{cases} \qquad (15)$$

де a_k – амплітудний параметр; j_k – початкові фаза прямої і відбитої хвиль.

Треба відзначити, отримані вирази легко перетворити до вигляду

$$\tilde{u}_k^0(x,t)=2a_k\begin{cases}-sin\dfrac{kp}{l}x\,sin\left(a\dfrac{kp}{l}t+j_k\right),\\ cos\dfrac{kp}{l}x\,cos\left(a\dfrac{kp}{l}t+j_k\right),\\ sin\dfrac{2(k+1)p}{2l}x\,sin\left(a\dfrac{2(k+1)p}{2l}t+j_k\right)\end{cases} \tag{16}$$

і вони, як варто було чекати, збігаються з відомими результатами [1,6], які можна знайти методом Фур’є для відповідних крайових задач для незбуреного хвильового рівняння.

Зауваження. Якщо для диференціального рівняння (2) розглядаються додатково початкові умови (ставиться мішана задача)

$$u^0(x,t)\big|_{t=0}=f(x),\ \frac{\partial u^0(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=J(x), \tag{17}$$

($f(x)$ і $J(x)$ – відомі гладкі функції, які визначають початковий стан середовища), то розв’язок такої задачі можна отримати у вигляді лінійної комбінації одночастотних її розв’язків, тобто

$$u^0(x,t)=\sum_n D_n u_n^0(x,t), \tag{18}$$

причому значення сталих інтегрування знаходяться із початкових умов (17). Нижче мішану задачу для збуреного рівняння (1) не розглядатимемо, а побудуємо лише розв’язок збуреного рівняння, який задовольняє одній із однорідних крайових умов у формі, близькій до k-ї форми незбуреного рівняння, а тому у відповідних формулах індекс k для простоти записування опускатимемо.

2. Збурене рівняння. Цей випадок спостерігається в уточненій постановці досліджуваної задачі: у випадку, коли враховуються нелінійно-пружні характеристики тіла; в‘язко-пружні сили, які існують під час коливальних процесів у суцільних тілах; малі періодичні збурення. Розвиваючи загальну ідею асимптотичного зображення розв’язку квазілінійних диференціальних рівнянь, розв’язок збуреного рівняння (1) за однорідних крайових умов (3)–(5) шукатимемо у вигляді асимптотичного ряду

$$u(x,t)=\bar{u}^0(a,x,q)+eu_1(a,x,q,c)+e^2u_2(a,x,q,c)+\dots \tag{19}$$

в якому $q=a\dfrac{kp}{l}t+j$ для крайових умов (3) та (4) і $q=a\dfrac{2(k+1)p}{2l}t+j$ для крайових умов (5), $\bar{u}_0(a,x,q)=u_0^k(x,t)$ з тією лише різницею, що для збуреного випадку параметри a і j є не сталими, а невідомими повільно змінними функціями. Для знаходження закону зміни останніх для збуреного рівняння (1) треба розглянути два випадки: а*) нерезонансний* – для якого частота власних коливань незбуреної системи w_k знаходиться у зв'язку із частотою зовнішнього збурення співвідношенням вигляду $mw_k\neq nm,\ m,n=1,2,\dots$ і *резонансний* – для якого існує $mw_k\approx nm$.

2.1. Нерезонансний випадок. Відомо [1], що у нерезонансному випадку амплітуда коливань нелінійних систем не залежить від частоти зовнішнього періодичного збурення, тому, як і в [4], закони зміни повільно змінних функцій $a(x,t)$ і $j(x,t)$ задаватимемо у вигляді диференціальних рівняннь

$$\begin{aligned}a_t&=eA_1(a)+e^2A_2(a)+\dots,\\ a_x&=eB_1(a)+e^2B_2(a)+\dots,\\ j_t&=eC_1(a)+e^2C_2(a)+\dots,\\ j_x&=eD_1(a)+e^2D_2(a)+\dots\end{aligned} \tag{20}$$

праві частини яких є поки що невідомими функціями і знаходяться так, щоб асимтотичне представлення (19) з необхідною точністю задовольняло збуреній крайовій задачі.

Що стосується невідомих функцій $u_1(a, x, q, c),..\ u_2(a, x, \theta, \chi)$, – то вони повинні: а) визначаються так, щоб асимптотичне подання розв’язку (19) задовольняло з необхідною точністю вихідне рівняння (1); б) бути 2π-періодичними відносно θ, χ; в) задовольняти крайові умови, які очевидні із (3), (4) чи (5). Нижче, не зменшуючи загальності, будемо розглядати для збуреного рівняння (1) тільки крайові умови (3). З цією метою за допомогою диференціювання (19) по часу отримуємо

$$u_t(x,t) = -a\frac{akp}{l}\left[sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+e\left\{A_1(a)\left[cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]-\right.$$

$$\left.-C_1(a)\left[sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\frac{akp}{l}\frac{\partial u_1}{\partial q}+m\frac{\partial u_1}{\partial c}\right\}+e^2...;$$

$$u_{tt}(x,t) = -a\left(\frac{\alpha k\pi}{l}\right)^2\left[cos\left(\frac{k\pi}{l}x+\theta\right)-cos\left(\frac{k\pi}{l}x-\theta\right)\right]+$$

$$+e\left\{-2\frac{akp}{l}A_1(a)\left[sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]-2a\frac{akp}{l}C_1(a)\times\right.$$

$$\left.\times\left[cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\left(\frac{akp}{l}\right)^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial q^2}+2\frac{akp}{l}m\frac{\partial^2 u_1}{\partial q\partial c}+m^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial c^2}\right\}+e^2.... \quad (21)$$

Аналогічно, диференціюванням по другій незалежній змінній x, маємо

$$u_x(x,t) = -a\frac{kp}{l}\left[sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+e\left\{B_1(a)\left[cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]-\right.$$

$$\left.-D_1(a)\left[sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\frac{\partial u_1}{\partial x}\right\}+e^2...;$$

$$u_{xx}(x,t) = -a\left(\frac{kp}{l}\right)^2\left[cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+e\left\{-2\frac{kp}{l}B_1(a)\left[sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]-\right. \quad (22)$$

$$\left.-2a\frac{kp}{l}D_1(a)\left[cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}^2\right\}+e^2...$$

Асимптотичне представлення розв’язку (19), (20) задовольнятиме вихідне рівняння (1), якщо коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε правої і лівої його частин з врахуванням (21), (22) будуть однакові. Останнє і слугує умовою для визначення невідомих функцій $u_1(a,x,\theta),..$ $u_2(a,x,\theta),..$ зокрема, для знаходження $u_1(a,x,q)$ отримуємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\begin{gathered} w_k^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial q^2}+2w_k m\frac{\partial^2 u_1}{\partial c\partial q}+m^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial c^2}-a^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=F_1(a,x,q)+4w_k\,sin\frac{kp}{l}\times \\ \times\left\{\left[A_1(a)+a^{-1}B_1(a)\right]cosq+a\left[C_1(a)+a^{-1}D_1(a)\right]sinq\right\} \end{gathered} \quad (23)$$

де $F_1(a,x,q,c) = f[u,u_x,u_t,c]$, а $f[u,u_x,u_t,c]$ – значення функції $f[u,u_x,u_t,c]$ при

$$u = a\left(os\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right), \quad u_x = a\frac{kp}{l}\left(sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right),$$

$$u_t = -a\frac{kp}{l}\left(sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right) \quad .$$

Подібного вигляду отримуються диференціальні рівняння для другого і наступних наближень, тільки для них функції $F_2(a,x,y,c), F_3(a,x,y,c),\ldots$ мають дещо складніший вигляд. Розв'яжемо рівняння (23), тобто до знаходження функції $u_1(a,x,q,c)$. Функція $u(x,t)$ задовольнятиме крайові умови (3), якщо $u_i(a,x,q,c)$ представити у вигляді рядів по системі ортогональних функцій $\{X_n(x)\} = \left\{sin\frac{np}{l}x\right\}$, зокрема для першого наближення

$$u_1(a,x,q,c) = \sum_{n=0} u_{1n}(a,q) sin\frac{np}{l}x. \tag{24}$$

Тоді невідомі $2p$ – періодичні по q коефіцієнти $u_{1n}(a,q)$ визначаються, як очевидно із (23), системою диференціальних рівнянь:

$$w_k^2\left(\frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial q^2} + u_{1k}\right) + 2w_k m\frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial q \partial c} = F_{1k}(a,q,c) + 4w_k \times \left\{\left[A_1(a) + a^{-1}B_1(a)\right]cosq + a\left[C_1(a) + a^{-1}D_1(a)\right]sinq\right\},$$

при $n = k$

$$w_k^2\left(\frac{\partial^2 u_{1n}}{\partial q^2} + \frac{n^2}{k^2}u_{1n}\right) + 2w_k m\frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial q c} = F_{1n}(a,q,c), \tag{25}$$

при $n \neq k$

де $F_{1n}(a,q,c) = \frac{2}{l}\int_0^l F_1(a,x,q,c) sin\frac{np}{l}xdx.$

Для визначення впливу нелінійних сил на закони зміни амплітуди і фази хвильового процесу, тобто функцій $A_1(a), B_1(a), C_1(a), D_1(a)$, накладемо на коефіцієнт $u_{1k}(a,q,c)$ крім умови його 2π - періодичності по θ ще додаткову умову – умову відсутності у його розкладі в ряд Фур'є доданків пропорційних $sinq$ і $cosq$. Ця умова еквівалентна умові відсутності секулярних членів у коефіцієнтах $u_{1k}(a,q,c)$. Останнє дає змогу отримати систему двох алгебраїчних рівнянь відносно чотирьох невідомих функцій $A_1(a), B_1(a), C_1(a), D_1(a)$:

$$A_1(a) + a^{-1}B_1(a) = -\frac{a}{4p^2 w_k l} \times \int_0^l \int_0^{2p} \int_0^{2p} F_1(a,x,q,c) sin\frac{kp}{l}x\, cos\, dc\, q\, dq\, dx,$$

$$C_1(a) + a^{-1}D_1(a) = -\frac{a}{4p^2 a w_k l} \times \int_0^l \int_0^{2p} \int_0^{2p} F_1(a,x,q,c) sin\frac{kp}{l}x\, sin\, dc\, q\, dq\, dx. \tag{26}$$

Додаткові умови, які зв'язують вказані вище невідомі функції, можна отримати, наприклад, із умов сумісності для функцій $j(x,t)$ (чи $y(x,t)$) і $a(x,t)$, тобто із умов $\frac{\partial^2 j}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 j}{\partial t \partial x}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 a}{\partial t \partial x}$. Вони, як очевидно із рівнянь пешого наближення для вказаних функцій, перетворюються до вигляду

$$A_1(a)\frac{dD_1(a)}{da} = B_1(a)\frac{dC_1(a)}{da};\quad A_1(a)\frac{dB_1(a)}{da} = B_1(a)\frac{dA_1(a)}{da}. \tag{27}$$

Прямим інтегруванням другого рівняння отриманих співвідношень знаходимо: $A_1(a) = gB_1(a)$ (g – деяка стала), а із першого рівняння (27) з врахуванням останнього зрозуміло, що $D_1(a) = gC_1(a)$.

Самі ж коефіцієнти $u_{1n}(a,y)$, як очевидно із (23), зображають рядами Фур'є у вигляді

$$u_{1k}(a,q,c)=\frac{1}{4p^2 l}\sum_{m,s}\frac{1}{(1-m^2)w_k^2-2msw_k m}\exp i(mq+sc)\times\int_0^l\int_0^{2p}\int_0^{2p}F_1(a,x,q,c)\sin\frac{kp}{l}x\exp-i(mq+sc)dqdcdx, \quad (28)$$

при $(1-m^2)w_k^2-2msw_k m\neq 0$.

2.2. Резонансний випадок. На відміну від нерезонансного випадку, у резонансному амплітуда процесу істотно залежить від різниці фаз власних коливань і змушуючої сили, тобто від $u=q-c$. Нижче розглянемо тільки випадок головного резонансу, тобто $w_k=m$, для якого амплітуда та різниця фаз задаються диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} a_t &= eA_1(a,u)+e^2A_2(a,u)+\dots,\\ a_x &= eB_1(a,u)+e^2B_2(a,u)+\dots,\\ u_t &= w_k-m+eC_1(a,u)+e^2C_2(a,u)+\dots,\\ u_x &= eD_1(a,u)+e^2D_2(a,u)+\dots \end{aligned}\quad (29)$$

Представляючи розв'язок ріняння (1) у резонансному випадку у формі (19) з тією лише різницею, що параметри a і $q=u+c$ зв'язані співвідношеннями, які очевидні із (29), отримаємо:

$$u_t(x,t)=-a\frac{akp}{l}\left[\sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-\sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+e\left\{A_1(a,u)\left[\cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-\cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]-\right.$$

$$\left.-C_1(a,u)\left[\sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+\sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\frac{akp}{l}\frac{\partial u_1}{\partial q}+m\frac{\partial u_1}{\partial c}\right\}+e^2\dots;$$

$$u_{tt}(x,t)=-a\left(\frac{akp}{l}\right)^2\left[\cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-\cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+e\left\{-\left[(w_k-m)\frac{\partial C_1(a,u)}{\partial u}+2\frac{akp}{l}A_1(a,u)\right]\times\right.$$

$$\times\left[\sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+\sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\left[(w_k-m)\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial u}-2a\frac{akp}{l}C_1(a,u)\right]\times$$

$$\left.\times\left[\cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-\cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\left(\frac{akp}{l}\right)^2\frac{\partial^2u_1}{\partial q^2}+2\frac{akp}{l}m\frac{\partial^2u_1}{\partial q\partial c}+m^2\frac{\partial^2u_1}{\partial c^2}\right\}+e^2\dots \quad .$$

$$u_{xx}(x,t)=-a\left(\frac{kp}{l}\right)^2\left[\cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-\cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+e\left\{-2\frac{kp}{l}B_1(a,u)\left[\sin\left(\frac{kp}{l}x+q\right)+\sin\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]-\right.$$

$$\left.-2a\frac{kp}{l}D_1(a,u)\left[\cos\left(\frac{kp}{l}x+q\right)-\cos\left(\frac{kp}{l}x-q\right)\right]+\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}^2\right\}+e^2\dots \quad (30)$$

Отже, у резонансному випадку шукані функції зв'язані диференціальним рівнянням

$$w_k^2\left(\frac{\partial^2u_{1k}}{\partial q^2}+u_{1k}\right)+2w_k m\frac{\partial^2u_{1k}}{\partial q\partial c}=F_{1k}(a,q,c)+4w_k\left\{\left[\frac{w_k-m}{2w_k}\frac{\partial C_1(a,u)}{\partial u}+A_1(a)+a^{-1}B_1(a)\right]\cos q+\right.$$

$$\left.+a\left[C_1(a)+a^{-1}D_1(a)-\frac{w_k-m}{2w_k a}\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial u}\right]\sin q\right\},$$

при $n=k$,

$$w_k^2\left(\frac{\partial^2u_{1n}}{\partial q^2}+\frac{n^2}{k^2}u_{1n}\right)+2w_k m\frac{\partial^2u_{1k}}{\partial qc}=F_{1n}(a,q,c), \quad (31)$$

при $n\neq k$.

Поступаючи аналогічно як і для нерезонансного випадку, з тією лише різницею, що у співвідношеннях (31) q виражається через різницю фаз u і фазу зовнішнього збурення c у вигляді $q = u + c$, отримуємо вже систему лінійних диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $A_1(a,u), B_1(a,u),\ C_1(a,u), D_1(a,u)$:

$$\left[\frac{1-m}{2w_k}\frac{\partial C_1(a,u)}{\partial u} + A_1(a) + a^{-1}B_1(a)\right]cosu + a\left[C_1(a) + a^{-1}D_1(a) - \frac{w_k - m}{2w_k a}\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial u}\right]sinu =$$
$$= -\frac{a}{2pw_k l}\int_0^l\int_0^{2p} F_1(a,x,c+u,c)\,sin\frac{kp}{l}x\,cos\,c\,dc\,dx$$

$$\left[\frac{w_k - m}{2w_k}\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial u} - C_1(a) - a^{-1}D_1(a)\right]sinu - a\left[C_1(a) + a^{-1}D_1(a) - \frac{w_k - m}{2w_k a}\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial u}\right]cosu =$$
$$= \frac{a}{2pw_k l}\int_0^l\int_0^{2p} F_1(a,x,c+u,c)\,sin\frac{kp}{l}x\,sin\,c\,dc\,dx \quad . \qquad (32)$$

Отримана система диференціальних рівнянь (32) разом із умовами сумісності, які набувають вигляду

$$A_1(a,u)\frac{\partial B_1(a,u)}{\partial a} + (w_k - m)\frac{\partial B_1(a,u)}{\partial u} = B_1(a,u)\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial a} + (w_k - m)\frac{\partial A_1(a,u)}{\partial u},$$
$$A_1(a,u)\frac{\partial D_1(a,u)}{\partial a} + (w_k - m)\frac{\partial D_1(a,u)}{\partial u} = A_1(a,u)\frac{\partial C_1(a,u)}{\partial a} + (w_k - m)\frac{\partial C_1(a,u)}{\partial u}, \qquad (33)$$

визначає основні характеристики хвилі у середовищі. Зауважимо, що саму методику можна перенести і на випадок крайових умов (4) і (5). Для аналізу отриманих диференціальних рівнянь у загальному випадку можна використати, наприклад, якісні чи числові методи для лінійних диференціальних рівнянь. Що стосується конкретних задач, то для багатьох випадків вона істотно спрощується, наприклад, у випадку, коли пружні сили задовольняють нелінійний технічний закон пружності [8], то $A_1(a) = 0$ і $B_1(a) = 0$; якщо ж враховувати тільки нелінійні сили опору, то $C_1(a) = 0$ і $D_1(a) = 0$.

Як приклад розглянемо поздовжні коливання закріпленого шарнірно стрижня, матеріал котрого задовольняє нелінійний технічний закон пружності [8] за припущення, що сили опору (сили внутрішнього тертя) є малими і пропорційні швидкості.

Диференціальне рівняння, яке описує рух такої одновимірної системи, приймає вигляд

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = e(u_x)^2 u_{xx} - bu_t, \qquad (34)$$

де a, b, e – виражаються через фізико-механічні характеристики стрижня.

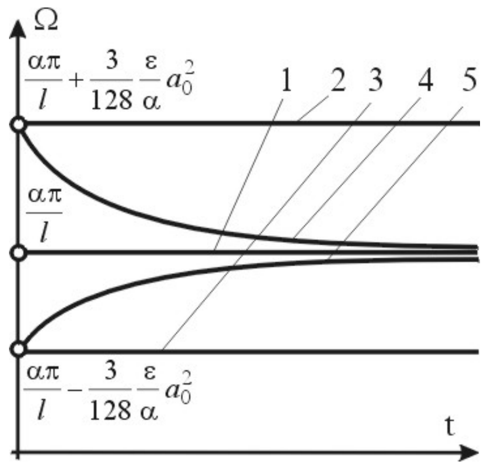
Крайові умови для диференціального рівняння (34), які відповідають зазначеному способу закріплення, набувають вигляду (3). У першому наближенні, в режимі одночастотних коливань, близьких до косинусоїдальної форми, динамічний процес у стрижні описується залежністю

$$u(x,t) = a\left(cos\left(\frac{p}{l}(x + at) + j\right) - cos\left(\frac{p}{l}(x - at) - j\right)\right), \qquad (35)$$

в якій амплітуднй параметр і фаза коливань визначаються диференціальними рівняннями

$$a_t = -b\frac{a}{4};\ a_x = 0;\ j_t = \frac{3}{128}\frac{e}{a}a^2;\ j_x = 0. \qquad (36)$$

Нижче на рисунку показано закони зміни в часі частоти коливань.



Графіки залежності частоти власних коливань стрижня від часу:
1 – лінійний випадок ($b = 0$, $e = 0$); 2, 3 – нелінійний випадок без врахування сили опору
(2 – жорстка, 3 – м'яка нелінійно-пружна система); 4, 5 – нелінійний випадок
з урахуванням сили опору (4 – для випадку жорсткої, 5 – м'якої системи)

Отримані залежності показують, що в першому наближенні розв'язку поставленої задачі стала сила опору призводить до встановлення у системі ізохронного динамічного процесу. Що стосується нелінійної відновлюючої сили, то остання може привести як до зростання частоти власних коливань (для жорстких систем) або до її зменшення (для м'яких систем).

У разі нехтування силою опору частота власних коливань істотно залежить від амплітуди початкоого збурення.

Висновки. Запропонована методика дає змогу дослідити широкий спектр важливих практичних задач математичним моделюванням руху одновимірних тіл за допомогою крайових задач для рівняння (1). Основна її ідея може бути узагальнена і на випадок складніших крайових умов, а також і на деякі складніші механічні системи, зокрема на механічні системи, які характеризуються поздовжнім рухом, а такі механічні системи є набагато складнішими під час аналітичного дослідження.

1. Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1976. – 592 с.2. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 456 с. 3. Митропольский Ю.А. О построении асимптоттического решения возмущенного уравнения Брезертона // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 1. – С. 58–71. 4. Митропольський Ю.А., Сокіл Б.І. Про застосування Ateb-функцій для побудови асимптотичного розв'язку збуреного нелінійного рівняння Клейна –Гордона // Укр. мат. журн. – 1998. – 50, № 5. – С. 665–670. 5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 1977. – 624 с. 6. Козачок А.А. Парадоксы механики сплошных сред. Ч. 1. – К.: Політехніка, 2003. – 92 с. 7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 710 с. 8. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: ИЛ, 1961. – 777 с.