

ПРОБЛЕМА ВИБОРУ ДІЙНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОНТАКТ ДВОХ ТІЛ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ

О Римар О.М., 2009

Наведено результати обчислень та здійснено аналіз виконання граничних умов двома розв'язками, відомим Герца та запропонованим новим, задачі теорії пружності про контакт двох тіл подвійної кривини. На основі аналізу одержаних результатів досліджень сформульовано гіпотезу про визначення єдиного дійсного розв'язку задач теорії пружності за мінімумом об'ємної деформації.

The analysis of the accomplishment of the sibelborder conditions by means of two solutions, the familiar Hertz principle and the new suggested, the task of the elasticity theory about the contact of two bodies of the double flexure are performed on the basis of the given calculation results. The hypothesis about the determination of the unique solution of the elasticity theory solutions by the minimum of the capacity deformation is formulated on the basis of the received results.

Постановка проблеми. Розв'язки задач теорії пружності про контакт двох тіл подвійної кривини мають надзвичайно важливе прикладне значення в усіх галузях промисловості, оскільки на їх основі створюються прикладні теорії для обчислення напруженого стану деталей машин, що дає змогу підвищувати їхню міцність, надійність та довговічність. Найчастіше та найширше вживається відомий розв'язок Герца та розроблена на його основі теорія. Ця теорія має деякі негативні особливості, які не тільки звужують її застосування, але в деяких випадках змушують відмовитися від неї. Насамперед це стосується обчислення наближення осей контактуючих циліндричних тіл з паралельними твірними та реальними розмірами, яке в цьому випадку дорівнює безмежності.

Аналіз відомих досліджень і публікацій. У роботах [1, 2] досліджено виконання граничних умов та обгрунтовані сумніви щодо їх виконання для відомого розв'язку Герца [3, 4], в систему переміщень якого входить *гармонічний* ньютонів потенціал простого шару змінної густини. Для задачі про контакт двох тіл подвійної кривини існування та єдиність розв'язку крайової задачі Неймана [5, с. 485 (15.6–4)]

$$\nabla^2 V(r) = 0 \quad (r \in \dot{U}), \quad \frac{\partial V}{\partial n} = b(r) \quad (r \in S),$$

для необмеженої області \dot{U} існування гармонічного потенціала V вимагає виконання умов

$$V(r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = O(1/r) \quad \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{r \rightarrow \infty} = O(1/r^2), \quad (1)$$

де $b(r)$ – неперервна функція на околиці S , $n \equiv z$, а $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-h)^2 + z^2}$.

Для математичної моделі відомого розв'язку областю існування потенціала V є півпростір, звідки із (1) для переміщень W точок осі z на безмежності, оскільки $V \equiv W$, виникає умова

$$W_{z \rightarrow \infty} = O(1/z). \quad (2)$$

У роботі [2] було показано, що для відомого розв'язку [3],[4] умова (2) виконується для значення ексцентриситету еліпса площадки контакту $k=0$ та є сумнівним виконання цієї умови для $k > 0$.

Тут ексцентриситет $k = \sqrt{1-k'^2}$, $k' = b/a$, де a , b – велика та мала півосі площадки контакту. Для $k=1$

(лінійний контакт двох циліндричних тіл з паралельними твірними) ситуація ускладнюється, оскільки не виконується умова, яка фіксує від переміщень точки тіла на безмежності

$$w_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3)$$

Дослідження здійснювалися за допомогою обчислень таких переміщень. Як показала перевірка, в деяких часткових випадках задачі результати обчислень були завищені. Це зумовлено особливостями формул і програм. Звідси виникла потреба у продовженні досліджень про виконання граничних умов. Такі дослідження є актуальними і з погляду відповідності вимогам теорії пружності обох розв'язків, відомого [3] та одержаного нового [6], який позбавлений основних недоліків відомого. У дослідженнях з методологічною метою використовується і модифікований наближений розв'язок задачі [7].

Розв'язок задач теорії пружності однозначно задається системою переміщень для точок тіла. Такі системи переміщень для аналізованих розв'язків можна подати в узагальненому вигляді

$$\begin{aligned} u &= -B \cdot z \frac{\partial V}{\partial x} - C \cdot \int_z^{\infty} \frac{\partial V}{\partial x} dz, \\ v &= -B \cdot z \frac{\partial V}{\partial y} - C \cdot \int_z^{\infty} \frac{\partial V}{\partial y} dz, \\ w &= -B \cdot z \frac{\partial V}{\partial z} + 2A \cdot V, \end{aligned} \quad (4)$$

де ньютонів потенціал простого шару V визначається формулою

$$V = \frac{3P}{4} \int_t^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{(a^2 + s)} - \frac{y^2}{(b^2 + s)} - \frac{z^2}{s} \right) ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}. \quad (5)$$

У формулах параметри: P – величина прикладеного зусилля; t – параметр, який визначається як найбільший корінь рівняння

$$1 - \frac{x^2}{a^2 + t} - \frac{y^2}{b^2 + t} - \frac{z^2}{t} = 0, \quad (6)$$

а коефіцієнти A, B, C є функціями постійних Ламе:

– для відомого [3] розв'язку (індекси Γ)

$$B_{\Gamma} = \frac{1 + n}{2 \cdot E}, \quad A_{\Gamma} = \frac{1 - n^2}{2 \cdot E}, \quad C_{\Gamma} = -\frac{(1 + n) \cdot (1 - 2n)}{2 \cdot E}; \quad (7)$$

– для нового [6] розв'язку (індекси T)

$$B_T = A_T = \frac{1 + n}{2 \cdot E(1 + 2n)}, \quad C_T = \frac{(1 + n)(4n - 1)}{2 \cdot E(1 + 2n)}; \quad (8)$$

– для модифікованого [7] (індекси M) $A_M = B_M$,

$$A_M = \frac{1 - n^2}{2 \cdot E}, \quad C_M = \frac{n(1 + n)}{2 \cdot E}, \quad (9)$$

де n, E – коефіцієнт Пуассона та модуль пружності матеріалу тіла.

Для нового розв'язку із формули (4) переміщення вздовж осі z визначаються як

$$w = 2A_T \frac{3P}{4} \int_t^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{(a^2 + s)} - \frac{y^2}{(b^2 + s)} \right) ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}, \quad (10)$$

де перша складова переміщень w_T (4) входить і в потенціал (5) з протилежним знаком, а тому під час одержання (8), (10) скорочується за рахунок введення відповідної передумови, яка таким

способом коректує функції переміщень та виконання граничних і крайових умов. Об'ємна деформація, знайдена із системи переміщень для розв'язків:

$$r = \frac{(1+n)(1-2n)}{E} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (11)$$

$$q_r = \frac{q_r}{1+2n}, \quad (12)$$

$$m = \frac{(1+n)(1-2n)}{2p \cdot E} \cdot \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (13)$$

Для відомого розв'язку закладена апріорі крайова умова про відсутність дотичних напружень τ_{zx} та τ_{zy} в точках площадки контакту. У разі одержання нового ця умова як безпідставна та некоректна не використовується – новий показав існування таких напружень. Обидва розв'язки, відомий та новий, відрізняються системами переміщень, крайовими умовами в області контакту тіл та виконанням граничних умов на безмежності, але базуються на одній фізичній моделі та забезпечують виконання усіх інших необхідних умов теорії пружності. Звідси виникає непроста проблема щодо методології теоретичного визначення єдиного дійсного розв'язку задачі. Зауважимо, що результати перевірки обох розв'язків, відомого та нового, на узгодженість із відомими експериментальними дослідженнями [8] показали вищу точність нового. Останній аргумент є найвагомим, але він не знімає теоретичну проблему.

Постановка задачі. Метою досліджень є встановлення відповідності обох розв'язків, відомого та нового, до вимог загальних теорем теорії пружності для оптимізації та вибору методології визначення єдиного дійсного розв'язку задачі.

Основний матеріал. Дослідження базуються на аналізах трьох розв'язків задачі: відомого [3], нового [6] та модифікованого [7].

Модифікований створений штучно та має дві особливості:

- для значення коефіцієнта $n = 0,5$ він збігається із новим розв'язком [6] та забезпечує виконання всіх необхідних умов теорії пружності;
- для значень коефіцієнта $n < 0,5$ його система переміщень не забезпечує виконання необхідних умов теорії пружності – тоді не виконуються рівняння рівноваги Ламе.

Для спрощення досліджень розглядаємо переміщення точок осі z , $x = y = 0$. Із формул (1),(2) задачі Неймана виникають умови:

$$V_{z \rightarrow \infty} = 0 (1/z), \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z \rightarrow \infty} = 0 (1/z^2), \quad (15)$$

$$\left(z \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{z \rightarrow \infty} = 0 (1/z). \quad (16)$$

Потенціал (5) після перетворень приймає вигляд [8]:

$$V = \frac{pBb^2}{h} \cdot f, \quad (17)$$

де B – параметр сумарної кривини тіл в площині zy , $\eta = 2\pi A$ (A із формул (7)–(9)),

$$f = g - \frac{h}{2}, \quad (18)$$

$$g = \frac{K(k) - F(j, k)}{B(k)}, \quad (19)$$

$$K(k) - F(j, k) = \int_j^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin^2}} , \quad (20)$$

$$c = tg^2 j \cdot \int_j^{\bar{j}} \frac{d}{tg^2 \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2}} , \quad (21)$$

$$c_1 = tgj \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 j} - (E(k) - E(j, k)) \cdot tg^2 j , \quad (22)$$

$$h = \frac{2c}{B(k)} , \quad (23)$$

$K(k), F(\varphi, k), E(k), E(\varphi, k)$ – еліптичні повні та неповні інтеграли першого та другого роду [5]; $B(k)$ – повний еліптичний інтеграл

$$B(k) = \int_0^{\bar{j}} \frac{\cos^2 y \cdot d}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2}} , \quad (24)$$

$$j = \operatorname{arctg} \frac{z}{b} , \quad E(k) - E(j, k) = \int_j^{\bar{j}} \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2} \cdot d .$$

Складова $z \frac{\partial V}{\partial z}$ після диференціювання та перетворень має вигляд:

$$z \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{pb^2 B}{h} \cdot h , \quad (25)$$

де

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{pbB}{h} \cdot z , \quad z = \frac{2tgj}{B(k)} \cdot \int_j^{\bar{j}} \frac{d}{tg^2 \cdot \sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2}} . \quad (26)$$

При одержанні формул використана підстановка [9]

$$\frac{3P}{2a} = pb^2 \frac{B}{hB(k)} , \quad (27)$$

До того ж формула (22) є представленням інтеграла (21) в замкненій формі.

Після диференціювання та перетворень (4), (5) одержимо формули для переміщень відомого w_T , нового w_T та модифікованого w_M розв'язків:

$$w_{\bar{A}} = b^2 B \cdot \left\{ \frac{K(k) - F(j, k) + \frac{1}{(1-k^2)}}{B(k)} \right\} , \quad (28)$$

$$w_T = w_M = b^2 B \cdot \left\{ \frac{K(k) - F(j, k)}{B(k)} \right\} . \quad (29)$$

Прийнявши в формулах (17), (25), (26), (28), (29) $b = \text{const}$, $B = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ для різних значень ексцентриситету k та одиничного значення b (тобто $tg\varphi = z$), одержимо граничні умови (тут не враховується, що $b_T < b_H$) :

– враховуючи (14),(15),(16),(17),(18),(20),(23),(25),(26), для задачі Неймана

$$V_{\varphi \rightarrow \pi/2} \equiv f_{\varphi \rightarrow \pi/2} = 0 (1/tg\varphi) , \quad (30)$$

$$\left(z \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{j \rightarrow p/2} \equiv (h)_{j \rightarrow p/2} = 0 (1/tgj) , \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)_{j \rightarrow p/2} \equiv (z)_{j \rightarrow p/2} = 0 (1/tg^2 j) ; \quad (32)$$

– враховуючи (17),(28),(29), для переміщень відомого, нового та модифікованого розв'язків

$$\left(\mathbf{w}_T \right)_{j \rightarrow \pi/2} = \left\{ g + \frac{n}{1-n} \frac{h}{2} \right\}_{j \rightarrow \pi/2} = 0 \text{ (I/tg } j \text{) ,} \quad (33)$$

$$\left(\mathbf{w}_M \right)_{j \rightarrow p/2} = \left(\mathbf{w}_T \right)_{j \rightarrow p/2} = \{ g \}_{j \rightarrow p/2} = 0 \text{ (I/tg } j \text{) .} \quad (34)$$

Розглянемо виконання умов (31) та (32) складовими $\frac{\partial V}{\partial z}$ та $z \frac{\partial V}{\partial z}$:

– для значень ексцентриситету $1 > k \geq 0$

$$\lim_{j \rightarrow p/2} \left(z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \text{ ,} \quad (35)$$

$$\lim_{j \rightarrow p/2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \text{ ;} \quad (36)$$

– для значень ексцентриситету $k = 1$

$$\lim_{\substack{j \rightarrow p/2 \\ k=1}} \left(z \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -2 \frac{pb^2 B}{h} \lim_{\substack{j \rightarrow p/2 \\ k=1}} (c) = -2 \frac{pb^2 B}{h} \cdot \frac{1}{2} \text{ ,} \quad (37)$$

$$\lim_{\substack{j \rightarrow p/2 \\ k=1}} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \text{ .} \quad (38)$$

Із формули (37) очевидно, що умови (31), (33) для відомого розв'язку Герца не виконуються. Результати обчислень умов наведено в табл. 1,2,3. Зауважимо, що під час обчислення функцій вибиралося максимально наближене до $\pi/2$ значення кута φ , для якого програма забезпечувала достовірне обчислення. Таке максимально наближене значення кута φ буде завжди меншим від кута $\pi/2$, тому за результатами обчислень можна говорити про тенденції поведінки функцій в околиці $\varphi \rightarrow \pi/2$, а не про їхню поведінку в цій околиці. Необхідно враховувати і програмну специфіку в деяких часткових випадках. Наведені в табл. 2 результати показують різницю до 27-ми порядків при обчисленні інтеграла (21), тобто параметра χ , та при обчисленні цього самого інтеграла за представленням (22) (параметра χ_I). Тут помилковим є значення параметра χ_I (22). Перевірка цієї формули здійснювалася для $k=0$, $\varphi > 1,5707963 \text{ рад}$ на 32-х розрядному комп'ютерному калькуляторі. Із аналізу системи (4) з потенціалом (5) стає очевидним, що виконання умов (30), (32) для розв'язків, які базуються на одному потенціалі V , буде ідентичним, якщо нехтувати тим, що розв'язки незначно відрізняються розмірами площадки контакту a, b . Результати обчислень параметрів f, ζ наведені в табл. 1, 3, звідки зрозуміло, що всі розв'язки забезпечують виконання граничних умов задачі Неймана (30), (32) для значень ексцентриситету приблизно $k < 0,5$. Враховуючи особливості функцій g, ζ (19), (26), які базуються на радикалах еліптичних інтегралів, спостерігаємо, що їхнє зростання із збільшенням ексцентриситету k є немінучим. Звідси виникає, що невиконання граничних умов (30),(32) для $k > 0,5$ є теж немінучим. Тобто ці граничні умови повинні *гарантовано* виконуватися тільки для *осесиметричного* часткового випадку задачі – $k = 0$.

Що стосується виконання умови (2), то із формули (19) зрозуміло, що вона не виконується для $k = 1$ переміщеннями \mathbf{w} відомого та нового розв'язків. Для цього випадку умова (3) виконується для нового, але не виконується для відомого розв'язку. Всіма розв'язками однозначно виконуються граничні умови (3) для переміщень \mathbf{w} та (30),(31), (32) для задачі Неймана в околиці значень ексцентриситету $k \rightarrow 0$. Гранична умова (31) не виконується складовою h (табл. 1) та переміщеннями \mathbf{w} (33) відомого розв'язку в більшій частині діапазону значень ексцентриситету $0,5 < k \leq 1$. У переміщеннях \mathbf{w} (34) нового складова h (25),(31) відсутня, тому для усіх значень ексцентриситету за рахунок відсутності складової h умова (3) виконується переміщеннями \mathbf{w}_T (10), (34) нового розв'язку.

**Залежність функцій $f(18)$, $h(19)$, $g(19)$
від ексцентриситету k та кута φ для віддалених точок**

φ , рад	$l/tg\varphi$	Значення функцій $f/h/g$ для k					
		0	0,4	0,8	0,9	0,9999	0,... 16(9)
1,5707963267 9	$4,897 \cdot 10^{-12}$	$4,156 \cdot 10^{-12}$	$4,440 \cdot 10^{-12}$	$6,239 \cdot 10^{-12}$	$8,215 \cdot 10^{-12}$	$2,309 \cdot 10^{-10}$	$2,190 \cdot 10^{-4}$
		$4,156 \cdot 10^{-12}$	$4,440 \cdot 10^{-12}$	$6,240 \cdot 10^{-12}$	$8,215 \cdot 10^{-12}$	$2,309 \cdot 10^{-10}$	$1,090 \cdot 10^{-4}$
		$6,234 \cdot 10^{-12}$	$6,660 \cdot 10^{-12}$	$9,359 \cdot 10^{-12}$	$1,232 \cdot 10^{-11}$	$3,464 \cdot 10^{-10}$	$3,286 \cdot 10^{-4}$
..489	$6,723 \cdot 10^{-15}$	$5,799 \cdot 10^{-15}$	$6,195 \cdot 10^{-15}$	$8,706 \cdot 10^{-15}$	$1,146 \cdot 10^{-14}$	$2,820 \cdot 10^{-13}$	$3,056 \cdot 10^{-13}$
		$5,366 \cdot 10^{-15}$	$5,854 \cdot 10^{-15}$	$8,940 \cdot 10^{-15}$	$1,231 \cdot 10^{-14}$	$3,780 \cdot 10^{-13}$	$1,414 \cdot 10^{-7}$
		$8,428 \cdot 10^{-15}$	$9,061 \cdot 10^{-15}$	$1,273 \cdot 10^{-14}$	$1,676 \cdot 10^{-14}$	$4,712 \cdot 10^{-13}$	$4,470 \cdot 10^{-7}$

Або, підсумовуючи стосовно виконання граничних умов: новий розв'язок відрізняється від відомого тільки виконанням умови (3) в повному діапазоні ексцентриситету k . Відомий та новий розв'язки задовольняють усі необхідні умови теорії пружності. Наведений аналіз, розкриваючи особливості поведінки функцій переміщень в околиці $z \rightarrow \infty$, не дозволяє однозначно і безсумнівно розробити методологію теоретичного визначення єдиного дійсного розв'язку задачі на основі тільки одного параметра – виконання граничних умов крайової задачі Неймана. Звідси для визначення дійсного розв'язку задачі необхідно виконати дослідження рівня потенціальної енергії та об'ємної деформації.

Наведемо результати досліджень рівня потенціальної енергії деформованого тіла трьох розв'язків: відомого, нового та модифікованого для ідентичних параметрів $P, E, B(k), l, B, k\vartheta$ які є сталими для всіх розв'язків. Під час обчислення потенціальних енергій враховано той факт, що для нового розв'язку розміри площадки контакту та тиск в центрі площадки відрізняються від таких параметрів для двох інших розв'язків.

Питома потенціальна енергія деформації тіла W обчислюється за відомою формулою [11, 12]

$$W = \frac{nE}{2(I+)(I-2)} \cdot q^2 + \frac{E}{2(I+)} \{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2\} + \frac{E}{4(I+)} \{g_{xy}^2 + g_{xz}^2 + g_{yz}^2\} \quad (39)$$

де e_x, e_y, e_z – відносні деформації вздовж координатних осей; g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} – кутові деформації. Обидва види деформацій визначаються за відомими формулами Коші.

Потенціальна енергія деформованого тіла обчислюється за формулою

$$U = \iiint W \cdot dx dy dz, \quad (40)$$

де межі кратного інтеграла знаходяться із рівняння (6).

Значення безрозмірних енергій розв'язків відомого, нового та модифікованого, відповідно, знаходять за формулами

$$\bar{U}_\Gamma = \iiint \bar{W}_\Gamma \cdot d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} dj, \quad (41)$$

$$\bar{U}_T = \iiint \bar{W}_T \cdot d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} dj, \quad (42)$$

$$\bar{U}_M = \iiint \bar{W}_M \cdot d\bar{x} d\bar{y} d\bar{z} dj, \quad (43)$$

де питома потенціальна енергія (39) для конкретного розв'язку записується без урахування записаних вище постійних параметрів у вигляді суми безрозмірних складових

$$\bar{W} = \sum_i^q [f(n)_i \cdot j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_i], \quad (44)$$

в яких $f(n)_i$ (функції сталих Ламе) є коефіцієнтами перед функціями $j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_i$, наприклад, для $i=1$ $j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{\Gamma 1} = j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{T 1} = j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_{M 1} = j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_1$,

$$j(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})_l = \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} \right)^2, \quad \bar{x} = \frac{x}{b}, \bar{y} = \frac{y}{b}, \bar{z} = \frac{z}{b}.$$

На рис. 1 зображено залежності безрозмірних потенціальних енергій \bar{U} від коефіцієнта Пуассона ν для розв'язків нового, модифікованого та відомого для значень ексцентриситету $k=0$ та $k=1$.

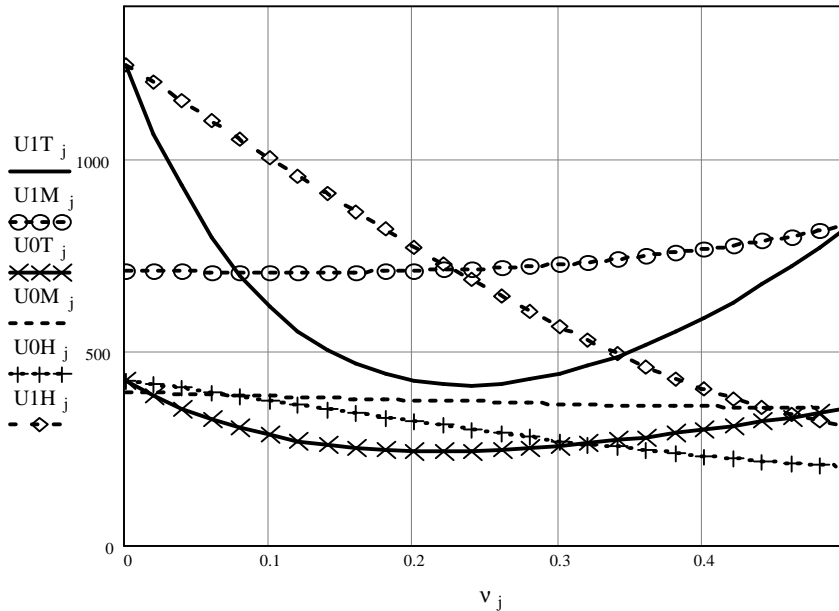


Рис. 1. Залежність безрозмірних потенціальних енергій за формулами (41), (42), (43) від коефіцієнта ν . Тут позначення відповідно розв'язків нового, модифікованого та відомого: $U0T$, $U0M$, $U0H$ – для $k=0$; $U1T$, $U1M$ та $U1H$ – для $k=1$

Проаналізуємо графічні залежності на рис. 1. Для $\nu = 0$ збігаються та мають однакові значення енергії новий та відомий розв'язки, для $\nu = 0,5$ – новий та модифікований. Мінімальні значення потенціальної енергії має новий розв'язок відносно відомого в околиці точки $\nu = 0$ та відносно модифікованого в кінці діапазону коефіцієнта Пуассона в околиці точки $\nu = 0,5$, що підтверджує його правильність. Розглянемо середнє значення потенціальної енергії U_s в повному діапазоні значень коефіцієнта ν , яке для аналізованих розв'язків знаходилося за формулою

$$U_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^n U(n)_j,$$

де $U(\nu)_j$ – результати обчислення енергії для j -го значення ν . Обчислені значення середньої енергії для розв'язків, де позначення виконані за схемою попередніх (рис. 1):

$$U1T_s = 620,3 ; \quad U1H_s = 705,6 ; \quad U1M_s = 736,8 ; \\ U0T_s = 295,07 ; \quad U0H_s = 302,6 ; \quad U0M_s = 372,6.$$

Наведені результати показують, що середні значення енергій U_s чітко диференційовані, мінімальне значення має новий розв'язок в повному діапазоні k .

Отже, на основі мінімуму потенціальної енергії, показано, що із трьох найточнішим є новий розв'язок. У роботі [12, с. 124] читаємо, що “из всех перемещений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, только перемещения, отвечающие состоянию равновесия, дают минимальное значение потенциальной энергии “. В даному випадку (!) розв'язки задовольняють різні крайові та граничні умови, до того ж відомий та новий забезпечують виконання всіх інших необхідних умов теорії пружності, зокрема і рівнянь рівноваги. Тому процитоване правило неможливо застосувати

для визначення єдиного правильного розв'язку. Наведене наголошує на актуальності питання про знаходження єдиного правильного розв'язку задач теорії пружності, загалом.

Розглянемо об'ємну деформацію q . Для $n = 0$ об'ємні деформації обох розв'язків, відомого та нового, однакові (розв'язки стають ідентичними). Новий розв'язок, за формулою (12), для всіх значень коефіцієнта Пуассона $n > 0$ має меншу об'ємну деформацію порівняно з відомим за формулою (11). Звідси виникає, що із двох різних розв'язків нашої задачі, які забезпечують виконання граничних та всіх інших необхідних умов теорії пружності, але різних крайових умов, точнішим є той, який забезпечує виконання коректних крайових умов, мінімум об'ємної деформації, мінімум енергії U_5 та мінімуми потенціальної енергії в околицях значень $v = 0$ та $v = 0,5$, якщо для цих значень v розв'язки збігаються.

Таблиця 2

Залежність функцій χ (21), χ_1 (22) від ексцентриситету k для значень кута $\varphi \rightarrow \pi/2$

φ , рад	$1/tg\varphi$	Значення функцій $\chi(21)/\chi_1(22)$ для k					
		0	0,4	0,8	0,9	0,9999	0,...16(9)
1,5707963267	4,897·10 ⁻¹²	1,63·10 ⁻¹²	1,78·10 ⁻¹²	2,72·10 ⁻¹²	3,74·10 ⁻¹²	1,15·10 ⁻¹⁰	1,09·10 ⁻⁴
9		2,55·10 ⁶	2,34·10 ⁶	1,53·10 ⁶	1,11·10 ⁶	3,61·10 ⁴	3,8·10 ⁻²
..489	6,723·10 ⁻¹⁵	2,11·10 ⁻¹⁵	2,30·10 ⁻¹⁵	3,51·10 ⁻¹⁵	4,83·10 ⁻¹⁵	1,89·10 ⁻¹³	1,41·10 ⁻⁷
		1,35·10 ¹²	1,24·10 ¹²	8,13·10 ¹¹	5,91·10 ¹¹	1,91·10 ¹⁰	2,02·10 ⁴

Таблиця 3

Залежність функції ζ (27) від ексцентриситету k для значень кута $\varphi \rightarrow \pi/2$

φ , рад	$1/tg^2\varphi$	Значення функції $\zeta(27)$ для k					
		0	0,4	0,8	0,9	0,9999	0, ...16(9)
1,57079	4,003·10 ⁻¹¹	3,40·10 ⁻¹¹	3,63·10 ⁻¹¹	5,1·10 ⁻¹¹	6,72·10 ⁻¹¹	1,90·10 ⁻⁹	6,33·10 ⁻⁶
..6	1,068·10 ⁻¹³	9,06·10 ⁻¹⁴	9,68·10 ⁻¹⁴	1,36·10 ⁻¹³	1,79·10 ⁻¹³	5,04·10 ⁻¹²	4,24·10 ⁻⁷

Модифікований розв'язок забезпечує мінімум об'ємної деформації (13) порівняно з двома іншими, але не забезпечує виконання всіх необхідних умов теорії пружності в діапазоні значень коефіцієнта Пуассона $n < 0,5$ та не має мінімуму енергії U_5 .

Нам не вдалося математично довести, що забезпечення одним із розв'язків мінімуму об'ємної деформації у всіх випадках теорії пружності, коли ці розв'язки базуються на різних системах переміщень і забезпечують виконання різних граничних та крайових умов при виконанні всіх інших необхідних умов теорії пружності, призведе до мінімуму потенціальної енергії. Але, враховуючи результати перевірки нового розв'язку на узгодженість із відомими експериментальними дослідженнями [8], а також із урахуванням виконання граничної умови (3), мінімуму потенціальної енергії та мінімуму об'ємної деформації (13), є доцільним сформулювати гіпотезу про визначення єдиного дійсного розв'язку задачі теорії пружності: – із усіх можливих розв'язків, де системи переміщень забезпечують виконання необхідних граничних умов та всіх інших умов теорії пружності, але різних крайових умов, єдиним дійсним буде розв'язок, який забезпечує виконання коректних крайових умов, мінімум об'ємної деформації, мінімум середнього значення потенціальної енергії U_5 та мінімуми потенціальної енергії в околицях значень $v = 0$ та $v = 0,5$, якщо для цих значень v розв'язки збігаються.

Висновки. 1. На основі аналізу виконання граничних умов для двох розв'язків задачі, відомого Герца та нового, встановлено:

- для обох розв'язків невиконання граничних умов задачі Неймана (30),(32) для $k > 0,5$ є неминучим, але ці граничні умови повинні виконуватися для осесиметричного випадку задачі, тобто для $k = 0$;

– тільки для нового розв’язку за рахунок відсутності складової – параметра h – умова (3) виконується у повному діапазоні значень ексцентриситету.

2. Новий розв’язок має меншу об’ємну деформацію та менше середнє значення потенціальної енергії U_s порівняно з відомим для всіх значень коефіцієнта Пуассона $\nu > 0$.

3. Із урахуванням результатів перевірки нового розв’язку на узгодженість із відомими експериментальними дослідженнями [8] та, враховуючи виконання граничної умови (3), мінімуму потенціальної енергії та мінімуму об’ємної деформації (13), сформульовано гіпотезу про визначення єдиного дійсного розв’язку задачі теорії пружності за мінімумом об’ємної деформації та за мінімумом середнього значення потенціальної енергії U_s .

1. Римар О.М. Аналіз задачі Герца // Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні: Зб. наук. пр. – Львів: Вид-во Держ. ун-ту “Львівська політехніка”, 2000. – Вип. 35. – С. 82–87. 2. Римар О.М. Виконання граничних умов для відомого розв’язку задачі Герца // Зб. наук. пр. – Львів: Асоціація “Автобус”, 1999. – Вип. 2. – С. 84–87. 3. Беляев Н. М. Труды по теории упругости и пластичности. – М.: Гостехиздат, 1957. – 632 с. 4. Динник А. Н. Удар и сжатие упругих тел. – К.: Из-во АН УССР, 1952. – Т. 1. – 151 с. 5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1973. – 832 с. 6. Римар О.М. Система переміщень точного розв’язку просторової контактної задачі // Зб. наук. пр. – Львів: Асоціація “Автобус”, 2001. – Вип. 4. – С. 96–100. 7. Римар О.М. Система переміщень для просторової контактної задачі // Вісн. Держ. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2000. – Вип. 394. – С. 96–101. 8. Римар О.М. Перевірка точності нового розв’язку просторової задачі теорії пружності про контакт двох тіл подвійної кривизни // Вісн. ЛДУБЖ. – 2007. – № 1. – С. 111–121. 9. Римар О.М. Переміщення і розміри площадки контакту для просторової контактної задачі // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2000. – № 412. – С. 92–96. 10. Джонсон К. Механика контактного взаємодія. – М.: Мир, 1989. – 510 с. 11. Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И. Основы и методы прикладной теории упругости. – К.: Вища шк., 1981. – 328 с. 12. Новацкий В.К. Теория упругости / Пер. с пол. – М.: Мир, 1975. – 872 с. 13. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 678 с.