С Е К Ц І Я 1

МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ. ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ ДИНАМІКИ ТА МІЦНОСТІ МАШИН. СИНТЕЗ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ

MODELLING OF MECHANICAL SYSTEMS. APPLIED PROBLEMS OF DYNAMICS AND STRENGTH OF MACHINES. PROBLEMS OF SYNTHESIS AND OPTIMIZATION OF ENGINEERING STRUCTURES

S E S S I O N 1

Static Contact Problem of Elastic Spheres with Rough Surfaces

Olena Grabko

Department of Mathematical Analysis, Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, 66 Zhukovskyi Str., UKRAINE, E-mail: elenagrabko@rambler.ru

Taking into account surface roughness significantly complicates search of solution of a contact problem. Therefore, it is advisable to find conditions under which disregarding the roughness of the surfaces of the compressed objects does not result in a considerable change of the contact area and contact pressures. This study attempts to determine such conditions for two elastic spheres.

The problem being considered is a static problem of non-friction contact between two linear-elastic spheres with rough surfaces. The equation for this problem taking into account surface roughness of the interacting objects has the form (1) and that disregarding surface roughness has the form (2).

The total of 216 variants of calculation was implemented for different values of the initial parameters. The parameters considered were Poisson's ratio, Young modulus, radii of the interacting spheres, compression force and factors of the power law accounting for the effect of roughness. The distribution of contact pressures in a specific plane area covering the unknown contact area and hard approaching of the objects were found.

Based on the outcomes of the numerical experiment, values of the non-dimensional parameter characterizing mutual relative deviation of the solutions to the equations (1) and (2) were established. Additionally, the dependence of this parameter on the one characterizing the relationship of the largest compression of the rough sphere to the total linear-elastic displacement of the points with the largest contact pressure was analysed.

The analysis resulted in formulating the conditions fulfilment of which allows disregarding the effect exerted on contact pressure by surface roughness of the interacting objects. In order to apply these conditions practically, it is sufficient to know the hard approaching of the objects, not considering the roughness and micro-irregularities of the surface. These parameters are available in the reference literature, thereby skirting the need to solve the contact problem.

Translated by Polyglot Translation Bureau
http://www.polyglot-lviv.com

Статична задача про контакт пружних куль, що мають шорсткі поверхні

Олена Грабко

Кафедра математичного аналізу, Запорізький національний університет, УКРАЇНА, м. Запоріжжя, вул. Жуковського, 66, E-mail: elenagrabko@rambler.ru

Досліджено вплив урахування шорсткості поверхонь взаємодіючих пружних куль на контактний тиск. Сформульовані умови, при виконанні яких цим впливом можна знехтувати.

Ключові слова – контактна задача, пружне тіло, горстка поверхня, зона контакту, контактний тиск.

I. Вступ

Врахування шорсткості поверхонь взаємодіючих лінійно-пружних тіл істотно ускладнює пошук розв'язання відповідної контактної задачі. Тому доцільно знайти умови, при яких ігнорування шорсткості поверхонь стискаючих тіл не призводить до істотної зміни зони контакту і контактних тисків. У цій роботі зроблена спроба визначення таких умов для випадку контакту двох пружних куль.

II. Рівняння контактної задачі

Розглянемо статичну задачу про контакт двох лінійно-пружних куль, що мають шорсткі поверхні, при відсутності тертя між ними. В цій задачі невідома функція $p(s) \in L_2(\Omega)$ [1], яка представляє собою розподіл контактних тисків у фіксованій плоскій області Ω, що покриває невідому площадку контакту, визначається із співвідношень [1]:

$$\begin{cases} p(s) = h\big(p(s) - E\big(f\big(p(s)\big) + A(p)(s) - \delta_0(s) - \Delta\big)\big), \\ s \in \Omega; \quad \int\limits_{\Omega} p(s)ds = P. \end{cases} \tag{1}$$

Тут P є задана стискаюча сила, E - довільне додатне число, Δ - невідоме жорстке зближення тіл. Лінійний оператор впливу $A: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ і функції f, h, δ_0 задаються співвідношеннями:

$$A(p)(s) = c \cdot \int_{\Omega} \frac{p(t)}{|t-s|} dt, \quad c = \frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{\pi E_2};$$

$$f(x) = B \cdot x^K, \quad h(x) = \frac{1}{2}(x + |x|),$$

$$\delta_0(s) = \delta_0(x, y) =$$
$$= R_1 + R_2 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2} - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2} \ .$$

У цих співвідношеннях $|t-s|$ є відстань між точками $t, s \in \Omega$, і R_1, R_2, ν_1, ν_2, E_1, E_2 є радіуси, коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга взаємодіючих куль.

Рівняння контактної задачі при відсутності шорсткості за аналогією з (1) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} p_1(s) = h(p_1(s) - E(A(p_1)(s) - \delta_0(s) - \Delta_1)), \\ s \in \Omega; \quad \int_{\Omega} p_1(s) ds = P. \end{cases} \tag{2}$$

III. Чисельні результати

Розв'язання $(p(s), \Delta)$ та $(p_1(s), \Delta_1)$ рівнянь (1) і (2) були отримані з використанням чисельних алгоритмів [1, 2] і [3]. У кожному з 216 варіантів розрахунку квадратна область Ω розбивалась на 2500 квадратних граничних елементів рівної площі. Значення параметрів ν_1, ν_2, E_1, E_2, R_1, R_2, P, B, K задавалися відповідно до обмеженнь:

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3;$$
$$E_1 = 210000 \text{ МПа}; \quad 210000 \text{ МПа} \le E_2 \le \infty;$$
$$0.1 \text{ м} \le R_1 \le \infty; \quad R_2 = 0.1 \text{ м};$$
$$24 \text{ кН} \le P \le 2307.4 \text{ кН}; \quad 0.4 \le K \le 1;$$

$K = 0.4$:
$$0.02 \times 10^{-7.8} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.4} \le B \le 45 \times 10^{-7.8} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.4};$$
$K = 0.5$:
$$0.007 \times 10^{-8.5} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.5} \le B \le 16 \times 10^{-8.5} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-0.5};$$
$K = 1$:
$$0.027 \times 10^{-15} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-1} \le B \le 80 \times 10^{-15} \text{м} \cdot (\text{Па})^{-1}.$$

За результатами проведеного чисельного експерименту були знайдені значення безрозмірного параметру $\alpha = (p_1(0,0) - p(0,0)) / p_1(0,0)$, який характеризує взаємне відносне відхилення розвязків рівнянь (1) і (2), отриманих при одному й тому ж значенні параметра P (тут $(0,0)$ - точка початкового дотику куль, в якій діє найбільший контактний тиск). При цьому була проаналізована залежність параметру α від безрозмірного параметру $\gamma = f(p(0,0)) / (\Delta - f(p(0,0)))$, який характерризує відношення найбільшого зім'яття шорсткого шару до сумарного лінійно-пружного переміщення точок куль, в яких діє найбільший контактний тиск.

Всі точки (γ, α), знайдені за результатами чисельного експерименту займають заштриховану область, зображену на Рис. 1.

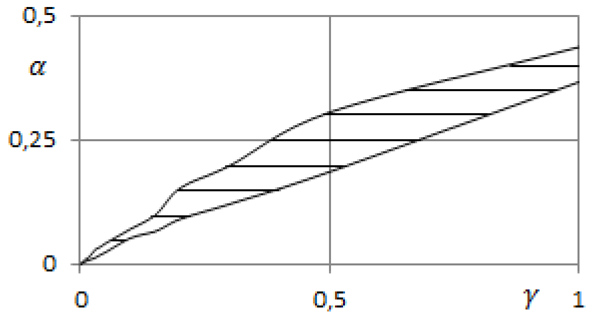

Рис. 1 Результати чисельного розв'язання задачі.

З отриманих результатів випливає, що при $\gamma \le 0.1$ виконується наближена рівність $\alpha \approx \gamma$ (незалежно від значень ν_1, ν_2, E_1, E_2, R_1, R_2, P, B, K, що забезпечують нерівність $\gamma \le 0.1$).

Висновок

Припустимо, що найбільше зминання $f(p(0,0))$ шорсткого шару не перевершує висоту h цього шару. Тоді з очевидних оцінок

$$\gamma = \frac{f(p(0,0))}{\Delta - f(p(0,0))} \le \frac{h}{\Delta - h} \le \frac{h}{\Delta_1 - h} = \frac{(h/\Delta_1)}{1 - (h/\Delta_1)}$$

випливає, що за умови $(h/\Delta_1) \le 0.09$ відносна похибка при визначенні найбільшого контактного тиску, викликана ігноруванням шорсткості, приблизно дорівнює значенню h/Δ_1.

Література

[1] Александров А.И. Теоремы существования решения для контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности. / А.И. Александров, Е.В. Грабко // Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 2. – С. 5–11.

[2] Александров А.И. Итерационные процессы для решения дискретного аналога пространственной контактной задачи о взаимодействии упругих тел, имеющих шероховатые поверхности. / А.И. Александров, Е.В. Грабко // XVII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам: Материалы конф. 25-31 мая 2011 г. - М.: МАИ-ПРИНТ, 2011. - С. 272-274.

[3] Александров А.И. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для решения статических задач о контакте упругих тел при отсутствии трения / А.И. Александров // Вісник ЗНУ. Фізико-математичні науки. – 2010. – №1. – С. 5-12.