

В.В.Самотий^{1,2}, У.Ю. Дзелендзяк¹¹ Національний університет “Львівська політехніка”,
кафедра комп’ютеризованих систем автоматички² Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki,
katedra Automatyki i Technik Informatycznych

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КАСКАДУ “ОДНОФАЗНИЙ ДВОПІВПЕРІОДНИЙ ВИПРЯМЛЯЧ – МОТОР ПОСТІЙНОГО СТРУМУ З ПАРАЛЕЛЬНИМ ЗБУДЖЕННЯМ”

© Самотий В.В., Дзелендзяк У.Ю., 2013

Наведено математичну модель каскаду: однофазний двопівперіодний випрямляч з двома вентилями – мотор постійного струму з паралельним збудженням, а також запропоновано метод аналізу перехідних та усталених режимів його роботи.

Ключові слова: однофазний двопівперіодний випрямляч, мотор постійного струму з паралельним збудженням, перехідні процеси, усталені процеси, додаткові логічні змінні.

Mathematical model of the system: the single-phase bisemiperiodic rectifier with two valves - motor of direct-current with parallel excitation is resulted and method for transient and steady-state analysis of it operational modes is suggested.

Key words: single-phase bisemiperiodic rectifier, motor of direct-current with parallel excitation, transient operational modes, steady-state operational modes, additional logic variables.

Вступ

Мотори постійного струму широко застосовуються в різноманітних галузях промисловості, тому проблема керування швидкістю обертання їх роторів є актуальною. Залежно від сполучення обмоток мотора, їх поділяють на мотори з незалежним, паралельним та послідовним збудженнями. Розглянемо систему керування мотором постійного струму з паралельним збудженням, коли та сама постійна напруга паралельно живить обмотку збудження і якір. Одним з методів керування швидкістю обертання якорів моторів постійного струму є зміна напруги живлення якірного кола й обмотки збудження одночасно. Для цього можна використати перетворювач змінної напруги на постійну, а саме однофазний двопівперіодний випрямляч, що містить два керовані вентиля (тиристорів). Тоді, змінюючи кут запалювання тиристорів, можна впливати на рівень вихідної напруги, і, відповідно, на швидкість обертання якоря мотора постійного струму з паралельним збудженням.

Математичне моделювання такої системи пов’язане з певними труднощами, які зумовлені нелінійними характеристиками її елементів. Це характеристики намагнетичення осердь трансформатора, вольтамперні характеристики напівпровідникових вентилів та магнетні характеристики мотора постійного струму. Саме врахування цих типів нелінійностей робить задачу математичного моделювання доволі складною.

Запропоновано математичну модель каскаду: однофазний двопівперіодний випрямляч – мотор постійного струму з паралельним збудженням, в якій робота тиристорів змодельована за схемою ідеального ключа, а розрахунок усталених режимів роботи системи здійснюється екстраполяційним ε -алгоритмом.

Аналіз публікацій

Для дослідження динаміки роботи системи керування мотором постійного струму з паралельним збудженням обмежимося методами аналізу нелінійних електромагнетних кіл. В роботі [1] наведено методику розрахунку перехідних процесів з використанням розривних функцій для лінійних електричних кіл, що значно звужує область її застосування. Використання диференційного гармонічного методу для числового розрахунку перехідних процесів у нелінійних електричних

колах викладено у роботі [2]. Це дало змогу істотно зменшити кількість кроків інтегрування і, відповідно, збільшити довжину кроку. В [3] запропоновано методика аналізу перехідних і усталених режимів роботи однофазного двопівперіодного випрямляча з двома вентилями, яка ґрунтується на неявних методах числового інтегрування. Аналіз динаміки роботи систем керування мотором постійного струму з використанням явних методів числового інтегрування наведено в роботах [4, 5].

Розглянемо методи розрахунку усталених процесів. Одним з таких методів є метод малого параметра [6], проте основним його недоліком є погана збіжність. Для кіл змінної структури найчастіше використовують два методи: модель чутливостей до початкових умов [7] та екстраполяційний ϵ -алгоритм [8, 9], перевагою якого є квадратична збіжність ітераційного процесу і те, що він не залежить від природи системи диференціальних рівнянь. Для аналізу динаміки роботи досліджуваної системи керування скористаємося підходом, викладеним у роботах [4, 5].

Рівняння динаміки однофазного двопівперіодного випрямляча з двома вентилями

Розглянемо рівняння динаміки однофазного двопівперіодного випрямляча, що містить два керовані вентиля (D_1, D_2) і C -фільтр (рис. 1). За однієї полярності вихідної напруги відкривається вентиль D_1 , а за протилежної – вентиль D_2 . Якщо це керовані вентиля, то необхідною умовою додатково повинна бути наявність сигналу, який дає дозвіл на відкривання вентиля. Такий сигнал

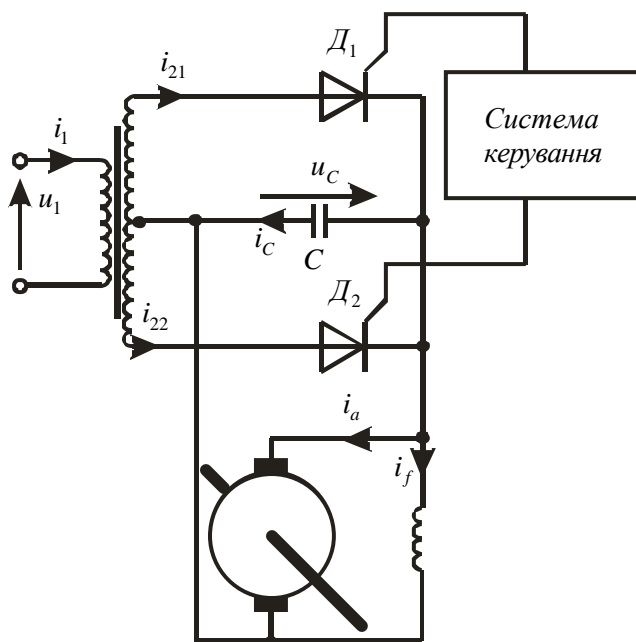


Рис. 1. Принципова схема каскаду двопівперіодний випрямляч – мотор постійного струму з паралельним збудженням

формується окремою схемою керування і дає можливість регулювати вихідну напругу випрямляча. Отже, у цій схемі можливі три комбінації відкритих і закритих вентилів: 1) D_1 – відкритий, D_2 – закритий; 2) D_1 – закритий, D_2 – відкритий; 3) D_1, D_2 – закриті.

Виводячи рівняння динаміки, параметри первинної сторони трансформатора вважатимемо приведеними за кількістю витків до вторинної, а роботу напівпровідникових вентилів подамо за схемою ідеального ключа.

Для побудови математичної моделі однофазного двопівперіодного випрямляча з двома вентилями спочатку необхідно з'ясувати можливу кількість комбінацій відкритих і закритих вентилів. Для кожної з них записати свою систему алгебро-диференціальних рівнянь. Виділити в них спільні риси і за допомогою додаткових логічних змінних записати одну узагальнену систему рівнянь.

Запишемо узагальнені рівняння динаміки. Для цього введемо додаткові логічні змінні k_1, k_2 , що набувають значення 0, 1. Причому 0 відповідає закритому стану вентиля, а 1 – відкритому.

$$\frac{d\psi}{dt} = g_1 \frac{d\Psi_1}{dt} + g_{21} \frac{d\Psi_{21}}{dt} + g_{22} \frac{d\Psi_{22}}{dt}, \quad (1)$$

$$\text{де } g_1 = \frac{\alpha_1}{\Delta}, \quad g_{21} = \frac{k_1 \alpha_{21}}{\Delta}, \quad g_{22} = -\frac{k_2 \alpha_{22}}{\Delta}, \quad \Delta = \alpha'' + \alpha_1 + k_1 \alpha_{21} + k_2 \alpha_{22}.$$

Неважко побачити, що, підставивши значення $k_1 = 1, k_2 = 0$, отримаємо рівняння першої комбінації, підставивши $k_1 = 0, k_2 = 1$ – рівняння другої комбінації, $k_1 = 0, k_2 = 0$ – рівняння третьої комбінації.

Узагальнені вирази для струмів будуть такими:

$$\frac{di_1}{dt} = a_{11} \frac{d\Psi_1}{dt} + a_{12} \frac{d\Psi_{21}}{dt} + a_{13} \frac{d\Psi_{22}}{dt}, \quad (2)$$

$$\frac{di_{21}}{dt} = a_{21} \frac{d\Psi_1}{dt} + a_{22} \frac{d\Psi_{21}}{dt}, \quad (3)$$

$$\frac{di_{22}}{dt} = a_{31} \frac{d\Psi_1}{dt} + a_{33} \frac{d\Psi_{22}}{dt}, \quad (4)$$

де $a_{11} = \alpha_1(1 - g_1)$, $a_{12} = -\alpha_1 g_{21}$, $a_{13} = -\alpha_1 g_{22}$, $a_{21} = -k_1 \alpha_{21} g_1$,

$a_{22} = k_1 \alpha_{21}(1 - g_{21})$, $a_{31} = k_2 \alpha_{22} g_1$, $a_{33} = k_2 \alpha_{22}(1 + g_{22})$.

Узагальнене рівняння конденсатора таке:

$$\frac{du_C}{dt} = C^{-1}(i_{21} + i_{22} - i_a - i_f), \quad (5)$$

Рівняння (1), (3), (4), (5) запишемо одним матричним виразом

$$\frac{dX}{dt} = BZ(t), \quad (6)$$

де $X = (\psi, i_{21}, i_{22}, u_C)^T$;

$$Z(t) = (u_1 - r_1 i_1, -u_C - r_{21} i_{21}, -u_C - r_{22} i_{22}, i_{21} + i_{22} - i_a - i_f)^T; \quad (7)$$

$$M = \begin{bmatrix} g_1 & g_{21} & g_{22} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Отримані рівняння необхідно доповнити умовами закривання і відкривання вентилів. Якщо вентиль D_1 відкритий, тоді перевіряємо умову його закривання

$$i_{21} = 0, \quad \frac{di_{21}}{dt} < 0. \quad (9)$$

Якщо вона виконується, присвоюємо $k_1 = 0$. За відкритого вентиля D_2 перевіряємо умову його закривання

$$i_{22} = 0, \quad \frac{di_{22}}{dt} < 0, \quad (10)$$

а у разі її виконання присвоюємо $k_2 = 0$.

Якщо вентиль D_1 закритий, тоді перевіряємо умову його відкривання

$$u_{\partial 1} = -\frac{d\psi}{dt} - u_C > 0, \quad (11)$$

а якщо вона виконується, присвоюємо $k_1 = 1$. Коли закритий вентиль D_2 , перевіряємо умову його відкривання

$$u_{\partial 2} = \frac{d\psi}{dt} - u_C > 0, \quad (12)$$

а у разі її виконання присвоюємо $k_2 = 1$.

Рівняння динаміки системи керування

Для запису рівнянь динаміки усієї системи бракує диференціальних рівнянь, що описують динаміку роботи МПС з паралельним збудженням. Такі рівняння відомі, тому подамо їх без додаткових математичних виведень. Спочатку запишемо рівняння електромагнетного стану МПС в нормальному вигляді

$$\frac{di_a}{dt} = S_a u_a + T_a u_f + E_a, \quad \frac{di_f}{dt} = T_f u_a + S_f u_f + E_f, \quad (13)$$

де $S_a = 1/(L_a + L_{af}L_{fa}/L_{ff})$, $T_a = -S_a L_{af}/L_{ff}$, $T_f = -S_a L_{fa}/L_{ff}$, $E_f = -(L_{fa}E_a + r_f i_f)/L_{ff}$,
 $E_a = S_a(L_{af}r_f i_f/L_{ff} - c\omega\Phi - \Delta u - r_a i_a)$, $S_f = (1 - L_{fa}T_a)/L_{ff}$.

де L_a – сумарна індуктивність послідовного кола якоря; L_{ff} – індуктивність обмотки збудження;
 L_{af} , L_{fa} – взаємні індуктивності кола якоря і кола збудження; r_a , r_f – активні опори кола якоря і
кола збудження; ω – кутова швидкість обертання якоря МПС; Φ – магнетний потік мотора; c –
конструктивна стала якоря МПС; Δu – падіння напруги в щітковому контакті. У разі паралельного
збудження слід прийняти $u_a = u_f = u_C$.

У скомпенсованих моторах врахування насичення магнетопровідника можна виконати
наближено за кривою намагнення

$$\Phi = \Phi(i_f), \quad L_{ff} = L_{ff}(i_f). \quad (14)$$

У ненасиченому моторі

$$\Phi = ki_f, \quad L_{ff} = const. \quad (15)$$

Врахування насичення у некомпенсованих моторах пов'язано з побудовою розрахункової
схеми магнетопровідника як кола з розподіленими параметрами, оскільки тут $\Phi = \Phi(i_f, i_a)$.
Вихрові струми в конструктивних елементах можна врахувати лише за наближеною методикою.
Для строгого розв'язування задачі з урахуванням просторового розподілу фізичних змінних стану
необхідно використати рівняння квазістаціонарного електромагнетного поля в часткових похідних.

Рівняння руху запишемо згідно з рівнянням Даламбера

$$\frac{d\omega}{dt} = (c\Phi i_a - M_0)/J, \quad (16)$$

де J – момент інерції ротора мотора; M_0 – момент опору.

Тепер отримані диференціальні рівняння необхідно об'єднати в єдину систему, врахувавши
взаємний вплив змінних стану. Для цього необхідно додати рівняння конденсатора на виході
випрямляча. Оскільки обмотки якоря і збудження мотора під'єднані безпосередньо до
конденсаторного фільтра, то в рівняннях стану мотора (13) необхідно прийняти $u_a = u_f = u_C$.

Рівняння (7), (13), (16) утворюють повну систему рівнянь досліджуваної системи.

Результати комп'ютерного моделювання

На рис. 2–4 наведено результати комп'ютерного моделювання динаміки роботи системи
тиристорного керування мотором постійного струму з паралельним збудженням (рис. 1).
Розрахунки проводилися за таких параметрів:

- трансформатора: $r_1 = 1.62$ Ом, $r_{21} = r_{22} = 1.58$ Ом, $C = 3$ мФ, $\alpha_1 = 50$ Гн⁻¹, $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 100$ Гн⁻¹;
- мотора: $J = 0.2$ Н·м·с²/рад, $r_a = 3.32$ Ом, $r_f = 173$ Ом, $L_{af} = L_{fa} = 0.03$ мГн, $L_a = 4.67$ мГн,
 $L_{ff} = 110.8$ Гн, $c = 70.8$ Н·м/(А·Вб), $M_0 = 4$ Нм.

Крива намагнення магнетного осердя трансформатора апроксимована виразом

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} a_1\psi, & |\psi| > \psi_1, \\ S_3(\psi), & \psi_1 \leq |\psi| \leq \psi_2, \\ a_2\psi - a_0, & |\psi| > \psi_2 \end{cases} \quad (17)$$

з вибором розрахункової формули, що не враховує явища гістерезису, де $a_1 = 0.2$ Гн⁻¹; $a_2 = 10$ Гн⁻¹;
 $a_0 = 6.8$ А; $\psi_1 = 0.3$ Вб; $\psi_2 = 0.9$ Вб; $\varphi(\psi_1) = 0.06$ А; $\varphi(\psi_2) = 2.2$ А; $S_3(\psi)$ – кубічний сплайн.
Зауважимо, що $\alpha''(\psi_1) = a_1$, $\alpha''(\psi_2) = a_2$.

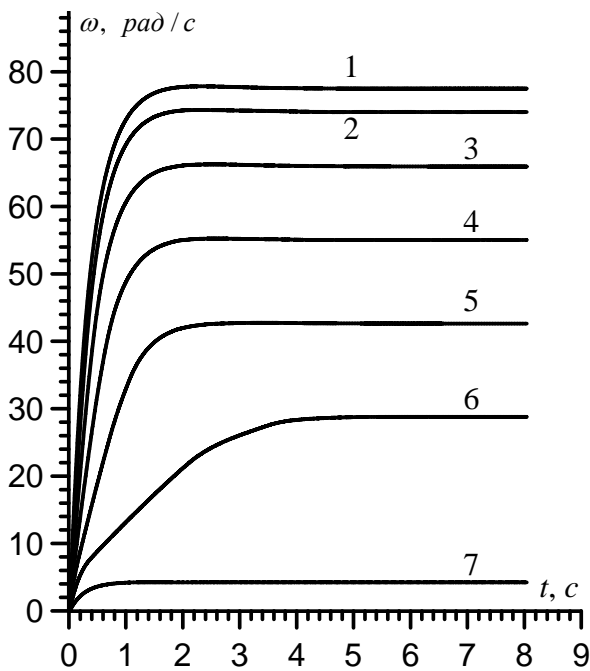


Рис. 2. Криві розгону мотора постійного струму для різних значень кутів запалювання тиристорів: 1 – 0° , 2 – 20° , 3 – 40° , 4 – 60° , 5 – 80° , 6 – 100° , 7 – 120°

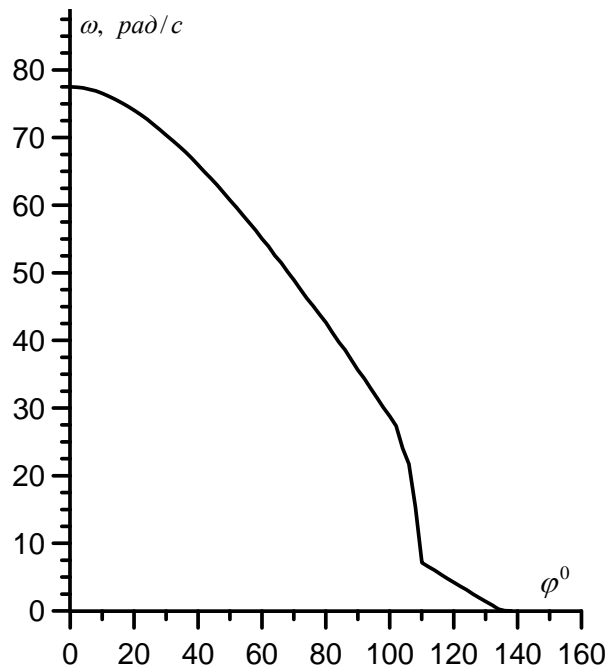


Рис. 3. Залежність усталених значень кутової швидкості обертання якоря мотора постійного струму від кута запалювання тиристорів

На рис. 2 наведено розрахункові криві перехідного процесу швидкості обертання якоря мотора постійного струму з паралельним збудженням для різних кутів запалювання тиристорів. Крива 1 відповідає куту 0° , крива 2 – 20° , крива 3 – 40° , крива 4 – 60° , крива 5 – 80° , крива 6 – 100° , крива 7 – 120° . При куті 140° мотор зупиняється. Це означає, що рушійний момент мотора менший, ніж момент опору. Всі залежності експоненціальні, а час перехідного процесу зростає зі збільшенням кута запалювання.

На рис. 3 наведено залежність усталених значень швидкості обертання якоря мотора від кута запалювання тиристорів випрямляча. При кутах від 20° до 100° ця залежність є близькою до лінійної, тому саме в цьому діапазоні буде ефективно керування швидкістю обертання якоря мотора. Безумовно, що ця характеристика зміниться у разі зміни моменту опору мотора.

Виконано також дослідження часових залежностей швидкості обертання якоря мотора у разі зміни кута запалювання тиристорів (рис. 4). Крива 1 відповідає режиму, коли мотор набрав номінальних обертів, а кут запалювання тиристорів 0° , а потім цей кут лінійно зростає від 0° до 140° згідно з виразом $\varphi=50t$. Тобто кут зростає на 1° за один період напруги живлення випрямляча. Тут швидкість мотора плавно падає від номінального значення до нуля за 4.2 с. Крива 2 відповідає режиму, коли мотор був

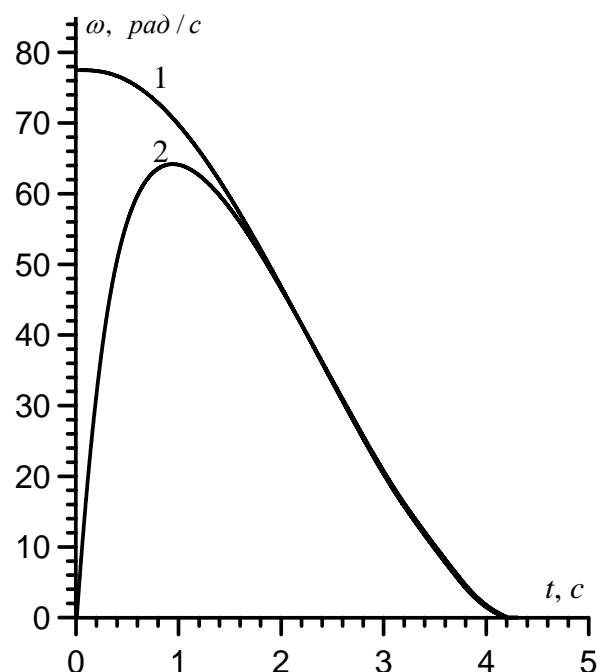


Рис. 4. Часові залежності швидкості обертання якоря мотора постійного струму при зміні кута запалювання тиристорів від 0° до 140°

вимкнений і після його вмикання кут плавно починає зростати за такою ж залежністю. Швидкість мотора починає зростати за малих кутів. Потім досягає максимуму при куті 48° в часовій точці ≈ 0.95 с. У разі подальшого зростання кута швидкість мотора плавно падає і після 2 с практично зливається з кривою 1.

Висновок

Розроблено та досліджено математичну модель системи керування швидкістю обертання ротора мотора постійного струму з паралельним збудженням. Для живлення мотора використано однофазний двопівперіодний випрямляч з двома вентилями, де вихідна напруга керується кутом запалювання тиристорів. Робота тиристорів моделюється за схемою ідеального ключа, що спрощує алгоритм розрахунку без втрати точності. Аналіз перехідних процесів здійснювався явними методами числового інтегрування. Для розрахунку усталених режимів системи керування використано екстраполяційний ε -алгоритм, який є простішим в алгоритмічному аспекті від моделі чутливостей до початкових умов, оскільки не потребує обчислення матриці монодромії. Результати комп'ютерної симуляції показали, що на ділянці кута запалювання тиристорів від 20° до 100° механічна характеристика мотора близька до лінійної.

1. Боев В.М. Использование разрывных функций для расчета переходных процессов и импульсных воздействий в линейных электрических цепях // *Электронное моделирование*. – 2002. – № 6. – С. 67 – 79. 2. Глухівський Л.Й. Моделювання перехідних процесів у нелінійних електричних колах диференціальним гармонічним методом // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, Електроенергетичні та електромеханічні системи*. – 2012. – № 736. – С. 21–29. 3. Самотий В.В., Дзелендзяк У.Ю., Гудим В.І. Аналіз перехідних та усталених режимів роботи двопівперіодного випрямляча з середньою точкою за неявною схемою // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, Автоматика, вимірювання та керування*. – 2005. – № 350. – С. 90 – 99. 4. Самотий В., Дзелендзяк У. Комп'ютерна симуляція системи керування мотором постійного струму з паралельним збудженням // *Міжвідомчий науково-технічний збірник “Вимірювальна техніка та метрологія”* – 2010. – № 71. – С. 51 – 58. 5. Самотий В.В., Павельчак А.Г., Дзелендзяк У.Ю. Система керування мотором постійного струму // *Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Комп'ютерні системи та мережі”*. – 2008. – № 630. – С. 102–108. 6. Шидловська Н.А. Аналіз нелінійних електричних кіл методом малого параметра. – Київ: Євроіндекс, 1999. – 192 с. 7. Aprille T.I., Trick T.N. A computer algorithm to determine the steady-state response of non-linear oscillator // *IEEE Trans. Circuit Theory*. – 1972. – vol. ct-19. – P. 354 – 360. 8. McLeod. A note on the ε -algorithm // *Computing (Arch. Electron. Rechnen)*. – 1971. – V. 7. – P. 17 – 24. 9. Skelboe S. Computing of the periodic steady-state response of non-linear networks by extrapolation methods // *IEEE Trans. Circuits Syst.* – V.CAS-27. – 1980. – P. 161 – 175.