

ВИМІРЮВАННЯ НЕЕЛЕКТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН

УДК 512.2

ЗАСТОСУВАННЯ ДІАГРАМИ ВОРОНОГО ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ДЕТАЛЕЙ

© Роман Вельган, Петро Мушеник, 2005

Національний університет "Львівська політехніка",
кафедра інформаційно-вимірювальних технологій,
вул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Розглянуто метод для перетворення середньої осі для простих наборів двовимірних даних. Результатом роботи є швидкий і стійкий алгоритм для розрахунку відстаней між гранями деталі.

Рассматривается метод реализации преобразования средней оси для простых наборов двумерных данных. Представлены результаты работы алгоритма для быстрого и надёжного вычисления расстояний между гранями детали.

A method for two-dimensional medial axis transformation of simple data sets is considered. The results of a quick and robust algorithm for distance estimation between object edges are presented.

Задачі обчислювальної геометрії. Поступ технологій цифрових сенсорів зображення, таких, як CCD (Charge-Coupled Device) і CMOS (Complementary Metal-Oxide Semiconductor) камери, сприяв розвитку систем машинного бачення і оптичних вимірювальних пристроїв. Основними задачами, які необхідно розв'язувати при побудові таких пристроїв, залишається розробка ефективних обчислювальних алгоритмів. Для опрацювання отриманої від системи графічної інформації використовують методи опрацювання зображень і методи обчислювальної геометрії для детектування і обчислення стандартних геометричних елементів (лінія, коло, точка, площина, сфера, циліндр). На основі стандартних геометричних елементів обчислюють геометричні розміри та їх відхилення, відхилення форми орієнтації і позиції (form, orientation and location tolerances), щоб перевірити, чи деталь відповідає специфікаціям і допустимим відхиленням від номінальних розмірів, передбачених розробником.

Однією з типових задач є визначення відстані між двома гранями чи елементами деталі, наявними у вигляді контурів, визначених, наприклад, з використанням методів розпізнавання кутів. Подібна проблематика існує при розв'язанні задач знаходження товщини деталі за знімком її перерізу.

Перетворення середньої осі. Намагаючись автоматизувати розв'язання такої простої на перший погляд задачі, як визначення відстані між гранями деталі, можна помітити наявність деяких неоднозначностей. Треба зазначити, що відстань між двома прямими (відрізками) має зміст, коли вони паралельні, інакше треба обчислювати відстань між прямою і точкою на іншій прямій. Але навіть у такому разі нелегко уникнути неточностей, адже такі відстані звичайно визначають, використовуючи нормалі від точки до прямої. Рис. 1 показує, що визначена таким методом відстань не відповідає найкоротшій відстані і що відстані, визначені в різні боки, відрізняються.

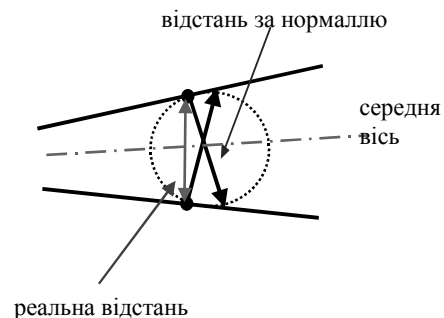


Рис. 1. Проблеми при визначенні відстаней за нормаллями

Щоб усунути вказані неоднозначності, пропонуємо між контурами деталі вписувати кола і відстані визначати як подвоєні радіуси цих кіл (рис. 2). Така задача є ідентичною до знаходження середньої осі (medial axis).

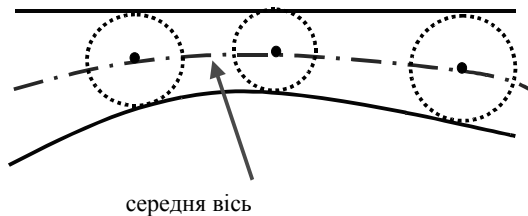


Рис. 2. Перетворення середньої осі

Середня вісь або скелетон двовимірного об'єкта – це місце розташування множини центрів найбільших вписаних в об'єкт кіл [1]. У тривимірному розумінні середня вісь відповідає геометричному місцю центрів найбільших куль, вписаних всередину об'єкта.

Описування об'єкта за допомогою середньої осі разом із її радіус-функцією, котра для кожної точки середньої осі відображає мінімальну відстань до краю об'єкта, називається перетворенням середньої осі (medial axis transformation). Це перетворення може бути і зворотним, тобто об'єкт, поданий у вигляді середньої осі і радіуса для кожної точки цієї осі, реконструюється у дво(три)вимірний об'єкт за допомогою вписаних кіл/куль. Тобто існує унікальна, один до одного відповідність між середньою віссю і краями об'єкта [2].

Перетворення середньої осі (ПСП) може використовуватись для альтернативної репрезентації двовимірного об'єкта лініями, а тривимірного – шматками поверхонь. Воно застосовується для вирішення проблем розпізнавання форми, генерування сітки для методів елементів, планування руху робота і може використовуватись як метод компресування геометричних даних. За результатами перетворення – радіусами вписаних кіл можна визначити товщину об'єкта в перерізі, що відповідає певній точці на середній осі.

Метод знаходження середньої осі. Відомі методи знаходження середньої осі двовимірного об'єкта без обмеження складності будови такого об'єкта є досить складними й нині не існує універсального методу розв'язання поставленої задачі. Складності пов'язані з нумеричною нестабільністю обчислень середньої осі. Ця нестабільність зумовлена зокрема тим, що середня вісь чутлива навіть до невеликих змін форми поверхні.

Один з поширених методів обчислення середньої осі за набором точок на гранях об'єкта використовує апроксимацію середньої осі діаграмою Вороного [3, 4]. Відомо, що вершини полігона Вороного наближаються до середньої осі у двовимірному просторі, коли густина точок прямує до нескінченності.

Підхід з використанням діаграми Вороного використано і в цій роботі. У нас дані для опрацювання мають ту особливість, що вони відповідають контурам двох граней, що обмежують об'єкт, назовемо їх умовно верхньою та нижньою. Множину точок, що відповідає верхній грані, позначимо P_1 , а нижній – P_2 й координати відповідної точки верхньої грані будемо позначати $P_{1i} = (y_{1i}, x_{1i})$ й нижньої $P_{2i} = (y_{2i}, x_{2i})$.

Особливостями побудови середньої осі за діаграмою Вороного є те, що в результаті генерування діаграми утворюються як вершини, які розміщені всередині об'єкта, так і ті, що знаходяться зовні. Останні, зрозуміло не мають стосунку до середньої осі і їх треба відфільтрувати. Проблематично сформулювати такі умови фільтрування, котрі були б дійсними для багатьох можливих геометричних форм деталі. Ми використаємо оригінальне рішення, запропоноване у [5], котре полягає у тому, що спочатку генерують і відфільтровують трикутники Делоні – структуру, дуальну до діаграми Вороного, а потім мережа відфільтрованих трикутників перетворюється у діаграму Вороного. Але структура даних у нас дає змогу застосувати простіше, швидше і ефективніше фільтрування. Хід опрацювання результатів можна описати такими пунктами:

- пошук триангуляції Делоне для вхідних даних;
- фільтрування отриманих результатів;
- розрахунок координат вершин Вороного для відфільтрованої триангуляції;
- розрахунок радіусів вписаних кіл для вершин Вороного.

Триангуляція. Формальне визначення триангуляції (triangulation – утворення трикутників): планарний граф, що отримують, об'єднавши точки множини A відрізками, такий, що до нього неможливо додати жодного нового відрізка без порушення планарності, тобто без пересікання відрізками один одного. Границя триангуляції утворює опуклий багатокутник. Будь-який набір точок, за винятком деяких тривіальних випадків, допускає більше ніж один спосіб триангуляції. Триангуляція є тим кращою, чим більшим є найменший кут в кожному з трикутників; утворені трикутники пря-

мують до рівносторонності. Ця умова означає, що до кожного трикутника входять ті точки, які є взаємно найближчими сусідами. Особливо важливою є умова мінімізації кутів з позиції точності обчислювань, бо, як відомо з обчислювальної математики, точність обчислень погіршується при малих кутах, тобто дуже сильно залежить від розміру мінімального кута триангуляції графіка. Найкращою в цьому сенсі є триангуляція Делоне, котра з'єднує в кожному трикутнику ті точки, котрі є найближчими сусідами.

Фільтрування граней трикутників

Для роботи з різними типами об'єктів використовують різноманітні методи відсіювання зайвих сторін та вершин. Найбільш універсальними та поширеними є метод Раппопорта [6] та методи куткових умов та відношень [5]. Але точність відсіювання цих апроксимаційних методів залежить від параметрів об'єкта дослідження та параметрів самого алгоритму, тобто вони не дають повного та точного фільтрування трикутників Делоне.

Оскільки набір вимірюваних даних є доволі простим, то немає необхідності використовувати вищезгадані алгоритми. Запропонований алгоритм відсіювання непотрібних сторін триангуляції чи вершин Вороного базується на використанні властивостей набору вихідних даних. Оскільки вихідні дані складаються з двох множин точок, можна проаналізувати, за яких умов потрібно відсіювати ці дані. Також треба зазначити, що у такому разі нас цікавить тільки відстань між гранями деталі і дані можна розглядати як фрагмент нескінченно довгої деталі, тобто особливості бокової структури об'єкта досліджень нас не цікавлять.

Оскільки триангуляція поздовжнього чи поперечного перерізу плоскої деталі повинна бути обмеженою однією полілінією зверху та однією знизу, то для кожного трикутника $p_{1i}p_{2i}p_{3i}$ (де i – порядковий номер трикутника) повинна виконуватись умова:

$$\begin{cases} p_{1i} \in P_1 \Rightarrow p_{2i} \in P_2 \cup p_{3i} \in P_2 \\ p_{1i} \in P_2 \Rightarrow p_{2i} \in P_1 \cup p_{3i} \in P_1 \end{cases} \quad (1)$$

Іншими словами, всі вершини правильного трикутника триангуляції (трикутника, котрий ми повинні залишити) не повинні належати одній з множин точок P_1 чи P_2 . Якщо ця умова не виконується, то такий трикутник відкидається. Це твердження справедливе тільки для опуклих багатокутників, але у такому разі саме такі багатокутники і утворюються внаслідок обмежень, які накладаються на спосіб формування даних. На рис. 3 показано приклад результатів роботи

алгоритму фільтрування. “Неправильні” трикутники (заповнені білим кольором) не враховують для перетворення у діаграму Вороного.

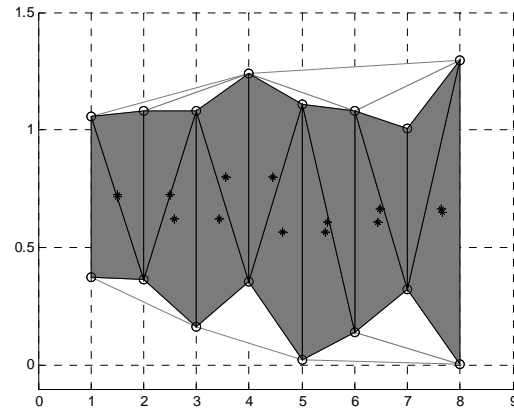


Рис. 3. Результати фільтрування.

Діаграма Вороного

Діаграма Вороного допомагає розв'язувати задачі топології, тобто дає змогу структурувати набір неупорядкованих даних за рахунок розбиття простору на ділянки і побудови границь (полігони Вороного) так, що для будь-якої нової точки q за її потраплянням в певну ділянку можна легко визначити, котра з точок набору є до неї найближчою.

Нехай P – множина з n різних точок площини, тоді діаграма Вороного – це поділ площини на n комірок, по одній на кожену точку P , за якого виконується умова: точка q належить комірці, що відноситься до p_i із P , якщо відстань від q до p_i менша за відстань до будь-якої іншої точки множини P (рис. 2). Найважливішою властивістю діаграми Вороного у такому разі є та, що вершини цієї діаграми є центрами кіл, описаних навколо трикутників Делоне.

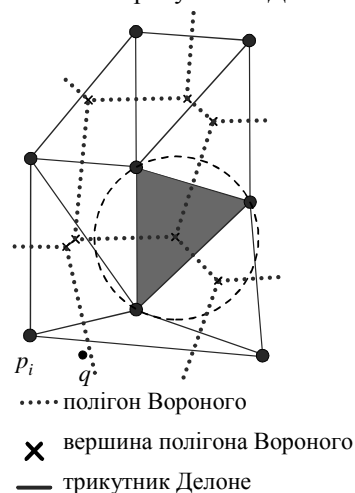


Рис. 4. Трикутники Делоне і діаграма Вороного

Оскільки вершини Вороного є центрами описаних трикутників, то вони апроксимують середню вісь досліджуваної деталі. Точність апроксимації залежить від кількості відомих точок поверхні досліджуваного об'єкта і зростає зі збільшенням цієї кількості. Тоді шукані вершини цієї діаграми можна розглядати як точки шуканої середньої осі. Отже, застосувавши один з алгоритмів побудови триангуляції Делоне та відсіювання непотрібних результатів, можна за цими даними побудувати діаграму Вороного й знайти середню вісь перерізу деталі.

Пошук вершин діаграми Вороного можна виконувати двома способами: використавши ту властивість, що вершини Вороного є центрами кіл, описаних навколо триангуляційних трикутників Делоне, можна для кожного з трикутників робити пошук центра описаного кола; використання одного з методів безпосередньої побудови діаграми Вороного для скінченного набору точок. Для побудови діаграми Вороного будемо використовувати перший спосіб, оскільки використання другого вимагає фільтрації результату роботи алгоритму, що є недоцільним внаслідок того, що дані вже відфільтровані після триангуляції Делоне.

Координати вершин Вороного

Для знаходження координат вершин Вороного розглянемо трикутник $p_1p_2p_3$ із p_{12} , p_{23} та p_{31} – середини його відповідних сторін, p_v – вершина Вороного для цього трикутника. Нехай $p_1 = (x_1, y_1)$, $p_2 = (x_2, y_2)$, $p_3 = (x_3, y_3)$ – координати вершин трикутника; $p_{12} = (x_{12}, y_{12})$, $p_{23} = (x_{23}, y_{23})$, $p_{31} = (x_{31}, y_{31})$ – координати середин сторін; $p_v = (x_v, y_v)$ – координати вершини Вороного. Вершина Вороного – це точка перетину нормалей до сторін трикутника, які проходять через середини цих сторін. Для знаходження цієї точки можна взяти будь-які дві з трьох нормалей. Тоді маючи координати середин сторін p_1p_2 та p_2p_3 трикутника:

$$\begin{aligned} x_{12} &= (x_1 + x_2)/2, & y_{12} &= (y_1 + y_2)/2, \\ x_{23} &= (x_2 + x_3)/2, & y_{23} &= (y_2 + y_3)/2 \end{aligned} \quad (2)$$

та рівняння нормалей до цих сторін:

$$\begin{aligned} y &= -(x_2 - x_1)/(y_2 - y_1) \cdot x + b_{n1}, \\ y &= -(x_3 - x_2)/(y_3 - y_2) \cdot x + b_{n2}, \end{aligned} \quad (3)$$

можна знайти параметри цих рівнянь b_{n1} та b_{n2} :

$$\begin{aligned} b_{n1} &= (x_2 - x_1)/(y_2 - y_1) \cdot x_{12} + y_{12}, \\ b_{n2} &= (x_3 - x_2)/(y_3 - y_2) \cdot x_{23} + y_{23}. \end{aligned} \quad (4)$$

А далі, розв'язавши систему рівнянь, знайдемо координати вершини Вороного для цього трикутника:

$$\begin{aligned} x_v &= (b_{n1} - b_{n2})/(k_{n2} - k_{n1}), \\ y_v &= k_{n1} \cdot x_v + b_{n1}, \end{aligned} \quad (5)$$

де $k_{n1} = (x_1 - x_2)/(y_2 - y_1)$, $k_{n2} = (x_2 - x_3)/(y_3 - y_2)$.

Тепер можна визначити радіус описаного навколо трикутника кола:

$$r = \sqrt{(x_v - x_1)^2 + (y_v - y_1)^2}. \quad (6)$$

На рис. 5 показано результат виконання алгоритму пошуку середньої осі з використання триангуляції Делоне та діаграми Вороного. Досліджувані відстані тут апроксимуються радіусами описаних навколо трикутників кіл.

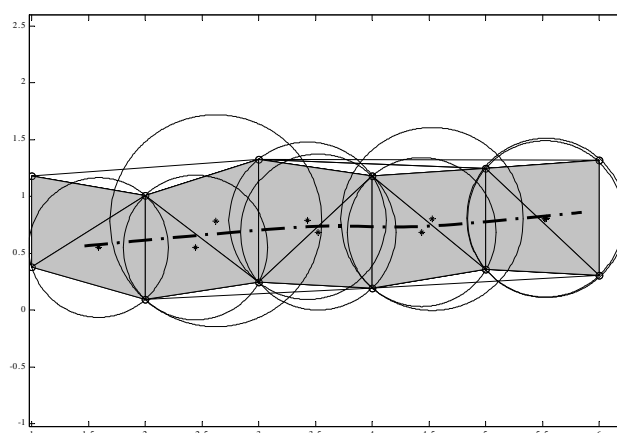


Рис. 5. Результати роботи алгоритму

Висновки. У цій роботі показано результати знаходження середньої осі для простих наборів двовимірних даних. Для тривимірних даних розв'язання подібної задачі для тривимірних даних з нелінійними краями є поки що проблематичним. Як спрощене розв'язання можна застосувати умовне розрізання об'єкта з певним кроком на окремі розрізи, а тоді для кожного розрізу розв'язувати двовимірну задачу.

1. Blum H. A transformation for extracting new descriptors of shape. In: Dunn W, editor. *Models for the perception of speech and visual form*. Cambridge: MIT Press, 1967. P. 362–80. 2. Ramanathan M., Gurumoorthy B. Constructing medial axis transformation of planar domains with curved boundaries // *CAD 35* (2002), P. 619–632. 3. Amenta N., Choi S. and Kolluri R.K. The power crux, *The Proc Solid Modelling '01*, P. 249–260, 2001. 4. Turkiyyah G.M., Storti D.W., Ganter M., Chen H. and Vimawala M. An accelerated triangulation of method for computing the skeletons of free form solid models // *CAD 29*. P. 5–19, 1997. 5. Dey T.K. and Zhao W. Approximate medial axis as a Voronoi subcomplex // *Proc. 7th ACM Sympos. Solid Modeling Applications*. P. 356–366, 2002. 6. Etzion M., Rappoport A. Computing Voronoi skeletons of a 3D polyhedron by space subdivision // *Tech. Report, Hebrew University, 1999*.