

Стасюк І. Газодинамічні задавачі-витратоміри в системі метрологічного забезпечення побутових лічильників кількості газу // Вісник НУ № 476, 2003. С. 32–36. 5. А. с. 1325420 СССР, МКІ<sup>4</sup> G05D 7/01. Задатчик-стабілізатор малых и микро-расходов газа / Е.П. Пистун, И.Д. Стасюк, З.Н. Теплюх – № 4032745/24-24; Заявл.05.03.86; Опубл.23.07.87, Бюлл. №27. 6. Пистун Е.П., Стасюк И.Д., Теплюх З.Н. Исследование расходных характеристик дроссельных элементов измерительных устройств // Контрольно-измерительная техника. Вып. 38. Львов, 1985, с.44-46. 7. Теплюх З.М. Розрахунок ламінарного подільника тиску // Вісник ДУ “Львівська політехніка” №273, – 1993, – С. 42–44. 8. Теплюх З.М., Парнета О.З. Високоточний

плівковий витратомір // Вісник НУ “Львівська політехніка” № 506. 2004. С. 275–282. 9. Теплюх З., Пистун Є., Ділай І. Пристрої для встановлення рівності опору дроселів синтезатора газових сумішей // Вимірвальна техніка та метрологія. Вып. 59. – 2002, – С. 178...182. 10. Івахів О.В., Теплюх З.М. Підгонка опору дроселів за допомогою газодинамічного моста // Вісник НУ “Львівська політехніка” № 475, 2003, С. 15–21. 11. Прохоров В.А. Основы автоматизации аналитического контроля химических производств. – М. 1984. 12. Пистун Е.П., Теплюх З.Н., Брылинский Р.Б. Исследование погрешностей стабилизаторов абсолютного давления в газоанализаторах // Контрольно-измерительная техника. Вып. 40. Львов, 1986. С.23–27.

УДК 621.391.1

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЧАСТОТНОЇ ЗАЛЕЖНОСТІ ТАНГЕНСА КУТА ДІЕЛЕКТРИЧНИХ ВТРАТ ЗЕРНА ПШЕНИЦІ

© Олег Куцевол, Микола Куцевол, Володимир Поджаренко, 2005

Вінницький національний технічний університет,  
вул. Хмельницьке шосе, 95, 286021, Вінниця, Україна

*Розроблено математичну модель частотної залежності тангенса кута діелектричних втрат зерна пшениці.*

*Разработана математическая модель частотной зависимости тангенса угла диэлектрических потерь зерна пшеницы.*

*The mathematical model of a frequency dependence of loss angle of a grain wheat is designed.*

Визначення апроксимувальної функціональної залежності за наявності ряду випадкових значень  $X$  та  $Y$  з мінімальною похибкою апроксимації – це одна з важливих задач метрології та техніки вимірювання.

Сучасна техніка вимірювання вимагає подання основних метричних характеристик засобу вимірювання у вигляді стандартної функціональної залежності. Відомо [3], що в ідеальному випадку математична модель може бути подана у вигляді лінійного рівняння:

$$Y = k \cdot X,$$

де  $X$  – вхідний сигнал засобу вимірювання;  $Y$  – вихідний сигнал засобу вимірювання;  $k$  – коефіцієнт перетворення вимірвального перетворювача.

За рахунок наявності адитивної похибки  $\pm \Delta_\alpha$  у реальному засобі вимірювання функція перетворення (математична модель) буде вже подана у вигляді залежності:

$$Y = k \cdot X \pm \Delta_\alpha.$$

Значення відносної адитивної похибки у такому разі буде виглядати як гіперболічна залежність:

$$\delta_\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{X},$$

з якої можна бачити, що відносна адитивна похибка зростає у разі зменшення абсолютного значення  $X$ . Своєю чергою, наявність мультиплікативної похибки призводить до зміни крутості функції перетворення засобу вимірювання:

$$Y = (k \pm \alpha) \cdot X.$$

де  $\pm \alpha \cdot X$  – абсолютна мультиплікативна похибка.

Реальний засіб вимірювання має одночасно дві складові похибки: адитивну і мультиплікативну [6].

Під час вивчення похибки пристрою виникає проблема окремого визначення адитивної і мультиплікативної складових похибки. Для цього функцію перетворення подають у вигляді залежності:

$$Y = (k \pm \alpha) \cdot X \pm \Delta_\alpha,$$

з якої абсолютна сумарна похибка має вигляд:

$$\Delta_\Sigma = \pm \alpha \cdot X \pm \Delta_\alpha,$$

а відносна:

$$\delta_\Sigma = \pm \alpha \pm \frac{\Delta_\alpha}{X}.$$

Вираз для абсолютної сумарної похибки є фактично основною формою подання границь допустимої абсолютної основної похибки засобу вимірювання, що регламентується відповідним документом.

Дослідимо залежність  $tg\delta = f(F)$ , якщо  $W = 24\%$ . Оскільки експериментально отримана характеристика має складну форму, то для аналізу її доцільно розділити на ділянки, на яких сильно виражена залежність кута нахилу характеристики від вологи.

Перша така складова характеристики спостерігається на ділянці 0...20 МГц. Залежність має лінійну форму, тому застосуємо лінійний регресійний аналіз [1, 4].

Експериментальні дані цієї ділянки вказані в табл.1.

Необхідно за значеннями X та Y знайти залежність Y(X) середньоквадратичної регресії. Робочі вирази будуть такими:

$$a = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N F_i \cdot (tg\delta)_i - \sum_{i=1}^N F_i \cdot \sum_{i=1}^N tg\delta_i}{N \cdot \sum_{i=1}^N F_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N F_i\right)^2},$$

$$b = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N (tg\delta)_i - a \cdot \sum_{i=1}^N F_i \right),$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N (tg\delta)_i^2 - a \cdot \sum_{i=1}^N F_i \cdot (tg\delta)_i - b \cdot \sum_{i=1}^N (tg\delta)_i \right),$$

$$r_{xy} = \frac{\tilde{K}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \cdot \tilde{\sigma}_y} = \frac{\sum_{i=1}^N F_i \cdot (tg\delta)_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N F_i \cdot \sum_{i=1}^N (tg\delta)_i}{\sqrt{L \cdot M}},$$

де

$$L = \sum_{i=1}^N F_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N F_i \right)^2;$$

$$M = \sum_{i=1}^N (tg\delta)_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N (tg\delta)_i \right)^2.$$

$$a = -0,01; b = 0,811; \sigma^2 = 4,85 \cdot 10^{-5}; r_{xy} = -0,995.$$

Результати розрахунку за наведеними формулами наведено в табл.2.

Таблиця 1

Експериментальні дані ділянки частот 0...20 МГц

F, МГц	0	1	2	5	6	8
$tg\delta$	0,8	0,795	0,785	0,765	0,758	0,74
F, МГц	10	12	15	17	18	20
$tg\delta$	0,72	0,69	0,66	0,64	0,623	0,6

Таблиця 2

Кореляційна характеристика ділянки на частотах 0...20 МГц

N	F, МГц	$tg\delta$	$tg\delta_1 = a \cdot F + b$	$F \cdot tg\delta$	$F^2$	$(tg\delta)^2$
1	0	0,8	0,811	0	0	0,64
2	1	0,795	0,8	0,795	1	0,632
3	2	0,785	0,79	1,57	4	0,616
4	5	0,765	0,76	3,825	25	0,585
5	6	0,758	0,75	4,548	36	0,575
6	8	0,74	0,73	5,92	64	0,548
7	10	0,72	0,71	7,2	100	0,518
8	12	0,69	0,689	8,28	144	0,476
9	15	0,66	0,659	9,9	225	0,436
10	17	0,64	0,639	10,88	289	0,41
11	18	0,623	0,629	11,214	324	0,388
12	20	0,6	0,609	12	400	0,36

Математична модель ділянки характеристики на частоті  $F = 0 \dots 20$  МГц матиме вигляд:

$$tg\delta_1(F) = -0,01 \cdot F + 0,811.$$

Розглянемо наступну складову характеристики, яка відповідає ділянці частот  $20 \dots 40$  МГц. Залежність має також форму, близьку до лінійної (відмінність тільки в тому, що значно менший кут нахилу характеристики та інший частотний діапазон), тому в такому разі можна скористатись робочими виразами першої ділянки.

Експериментальні дані цієї ділянки вказані в табл. 3.

Коефіцієнти математичної моделі для ділянки  $20 \dots 40$  МГц мають значення:

$$a = -0,02; b = 0,999; \sigma^2 = 3,561 \cdot 10^{-5}; r_{xy} = -0,999.$$

Результати розрахунків наведено в табл. 4.

Математична модель ділянки характеристики на частоті  $F = 20 \dots 40$  МГц матиме вигляд:

$$tg\delta_2(F) = -0,02 \cdot F + 0,999.$$

Розглянемо останню складову характеристики, яка спостерігається на ділянці  $40 \dots 100$  МГц. Ця залежність має нелінійну форму і наближається за виглядом до параболи, тому потрібно застосувати нелінійну параболічну регресію.

Експериментальні дані цієї ділянки вказані в табл. 5.

Таблиця 3

**Експериментальні дані ділянки частот  $20 \dots 40$  МГц**

F, МГц	20	21	22	25	26	28
$tg\delta$	0,6	0,587	0,565	0,513	0,5	0,45
F, МГц	30	32	34	36	38	40
$tg\delta$	0,42	0,38	0,328	0,287	0,25	0,22

Таблиця 4

**Кореляційна характеристика ділянки на частотах  $20 \dots 40$  МГц**

N	F, МГц	$tg\delta$	$tg\delta_2 = a \cdot F + b$	$F \cdot tg\delta$	$F^2$	$(tg\delta)^2$
1	20	0,6	0,608	12	400	0,36
2	21	0,587	0,588	12,327	441	0,3446
3	22	0,565	0,568	12,43	484	0,3192
4	25	0,513	0,51	12,825	625	0,2632
5	26	0,5	0,49	13	676	0,25
6	28	0,45	0,451	12,6	784	0,2025
7	30	0,42	0,412	12,6	900	0,1764
8	32	0,38	0,373	12,16	1024	0,1444
9	34	0,328	0,334	11,152	1156	0,1076
10	36	0,287	0,295	10,332	1296	0,0824
11	38	0,25	0,255	9,5	1444	0,0625
12	40	0,22	0,216	8,8	1600	0,0484

Таблиця 5

**Експериментальні дані ділянки частот  $40 \dots 100$  МГц**

F, МГц	40	45	50	55	60	65
$tg\delta$	0,22	0,16	0,12	0,105	0,1	0,0995
F, МГц	70	75	80	85	90	100
$tg\delta$	0,1	0,105	0,13	0,16	0,2	0,3

Для параболічної регресії математична модель має вигляд:

$$Y = a \cdot X^2 + b \cdot X + c, \quad (1)$$

Коефіцієнти  $a, b, c$  залежності (1) знаходять з умови досягнення функціоналом мінімального значення [2, 5].

$$F(a, b, c) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N (y_i - a \cdot x_i^2 - b \cdot x_i - c)^2.$$

В результаті отримуємо систему з трьома невідомими, розв'язавши яку, можна визначити необхідні для знаходження математичної моделі ділянки характеристики коефіцієнти  $a, b, c$ .

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^4 + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^3 + c \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^3 + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + c \cdot \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i \\ a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 + b \cdot \sum_{i=1}^N x_i + c \cdot N = \sum_{i=1}^N y_i \end{cases}$$

$$a = \frac{\left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^N x_i^4 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^N x_i^3 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2}$$

$$- \frac{\left( \sum_{i=1}^N x_i^3 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \right)}{\left( \sum_{i=1}^N x_i^4 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2 \right) \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^N x_i^3 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^2}$$

$$b = \frac{\left( \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i \right) - a \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i^3 - \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$c = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N y_i - a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \right)$$

Середньоквадратична похибка апроксимації  $\sigma^2$  матиме вигляд:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \left( \sum_{i=1}^N y_i^2 - a \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot y_i - b \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - c \cdot \sum_{i=1}^N y_i \right).$$

Робочими виразами формули для знаходження коефіцієнтів  $a, b, c$  стануть при заміні

$X$  на  $F$ , а  $Y$  на  $\text{tg} \delta$ . За розрахунковими виразами маємо:

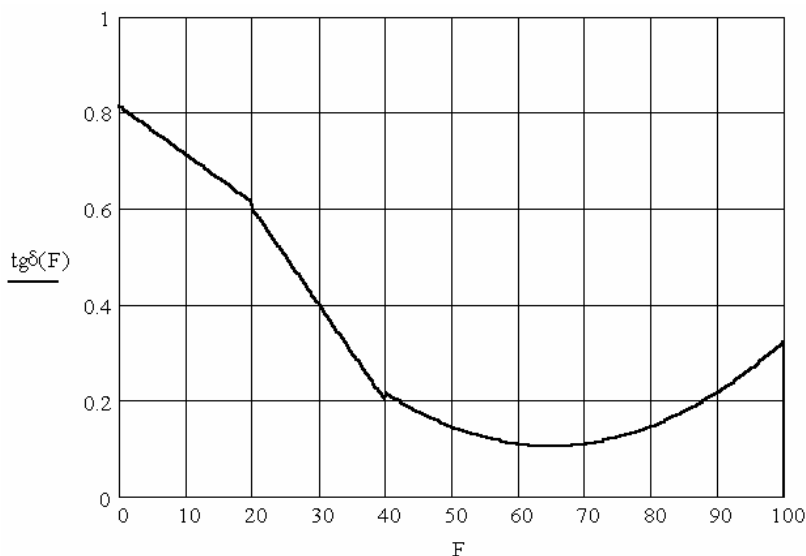
$$a = 1,771 \cdot 10^{-4}; b = -0,023; \\ c = 0,851; \sigma^2 = 4,682 \cdot 10^{-5}.$$

Результати розрахунків частотної характеристики тангенса кута діелектричних втрат на ділянці 40... 100 МГц подано в табл.6.

Таблиця 6

Кореляційна характеристика ділянки на частотах 40...100 МГц

N	F, МГц	tgδ	tgδ <sub>3</sub> = a·F <sup>2</sup> + b·F + c	F·tgδ	F <sup>2</sup>	(tgδ) <sup>2</sup>
1	40	0,22	0,207	8,8	1600	0,0484
2	45	0,16	0,166	7,2	2025	0,0256
3	50	0,12	0,134	6	2500	0,0144
4	55	0,105	0,111	5,775	3025	0,011
5	60	0,1	0,097	6	3600	0,01
6	65	0,0995	0,092	6,4675	4225	0,0099
7	70	0,1	0,095	7	4900	0,01
8	75	0,105	0,108	7,875	5625	0,011
9	80	0,13	0,129	10,4	6400	0,0169
10	85	0,16	0,159	13,6	7225	0,0256
11	90	0,2	0,198	18	8100	0,04
12	100	0,3	0,303	30	10000	0,09



Графік залежності tgδ(F), одержаний за допомогою математичної моделі (частота F задана в МГц)

Математична модель ділянки характеристики на F = 40...100 МГц буде такою:

$$tg\delta_3(F) = 1,771 \cdot 10^{-4} \cdot F^2 - 0,023 \cdot F + 0,851.$$

Повна математична модель характеристики з урахуванням одиничної функції частоти матиме такий вигляд:

$$tg\delta(F) = tg\delta_1(F) + tg\delta_2(F) + tg\delta_3(F) = (-0,01 \cdot F + 0,811) \cdot [1(F) - 1(F - 20 \cdot 10^6)] + (-0,02 \cdot F + 0,999) \cdot [1(F - 20 \cdot 10^6) - 1(F - 40 \cdot 10^6)] + (1,771 \cdot 10^{-4} \cdot F^2 - 0,023 \cdot F + 0,851) \cdot [1(F - 40 \cdot 10^6) - 1(F - 1 \cdot 10^8)]. \quad (2)$$

За допомогою математичного пакета MathCAD 2000 Pro. будемо графічне зображення математичної моделі (2).

У цій роботі на основі експериментальних даних одержано математичну модель залежності тангенса кута діелектричних втрат зерна пшениці від частоти, яка може бути використана при побудові високо-частотного вологоміра зерна пшениці.

1. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных решений. – М. 1976. 2. Бродский В. З. Введение в факторное планирование эксперимента. – М. 1976. 3. Венцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М, 1988. 4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М. 1977. 5. Гутер Р. С., Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М. 1970. 6. Орнатский П. П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – К., 1983.