

ПРО ВПЛИВ СИЛИ МАГНУСА НА РУХ СФЕРИЧНОГО ТІЛА ЗМІННОЇ МАСИ

Ольшанський В. П.^a, Ольшанський С. В.^b

^a Харківський національний технічний університет сільського господарства
вул. Артєма, 44, 61002, Харків, Україна

^b Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”
вул. Фрунзе, 21, 61002, Харків, Україна

(Отримано 28 березня 2013 р.)

Розв’язано задачу падіння однорідної кулі, радіус якої зменшується у часі за дробово-лінійним законом. Перші інтеграли рівнянь руху знайдено в елементарних функціях, другі інтеграли зведено до узагальнених інтегралів Френеля, які виражаються через гіпергеометричні функції. Досліджено особливості руху кулі під дією сили Магнуса.

Ключові слова: рух масової кулі, зменшення маси, сила Магнуса, спеціальні функції.

2000 MSC: 70B10

УДК: 531.391

Вступ

Обертання тіл, при польоті їх у газовому середовищі, супроводжується дією сили Магнуса. Зокрема цю силу використовують для інтенсифікації пневмосепарування зернових сумішей у сільському господарстві [1, 2]. Врахування дії сили Магнуса важливе в задачах пневмотранспортування сипких матеріалів [3]. Сила Магнуса може також виникати при польоті часток твердого палива [4]. Ця сила викривляє траєкторію руху, тому що без її врахування траєкторія є плоскою кривою, що розміщена в вертикальній площині, в якій лежить вектор початкової швидкості. Тому тіло, яке обертається, не може в загальному випадку рухатись прямолінійно, навіть, у разі падіння його в однорідному гравітаційному полі. Від дії сили Магнуса залежить швидкість руху. Її вплив на процес руху досліджено переважно для тіл сталих розмірів та маси [3, 5, 6, 7].

Під час моделювання руху кулі, з урахуванням сили Магнуса, використовують різні закони зміни розміру тіла [8, 9, 10], зокрема лінійний, експоненціальний та закон Срезневського. Відомий також дробово-лінійний закон, якому приділено менше уваги. Його розглядали В.О. Сапа та М.М. Сагітов [11].

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що вивчають дію сили Магнуса на рух сферичного тіла, зміна маси якого відбувається за дробово-лінійним законом, вперше.

I. Основні результати

A. Постановка задачі та прийняті гіпотези

Розв’яжемо задачу руху в спрощеній постановці, без урахування сили опору рухові. Такий підхід дозволяє знайти аналітичний розв’язок, який з до-

статньою точністю моделює рух сферичних тіл, які швидко обертаються, в нерухомому газовому середовищі на початковому етапі руху.

Вісь обертання сферичного тіла вважаємо вертикальною та спрямованою проти осі координатної системи, показаної на рис.1.

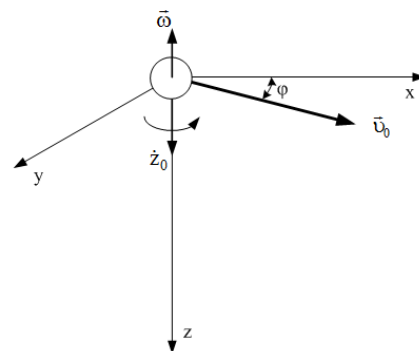


Рис. 1. Розрахункова схема

За вказаної орієнтації осі обертання, проекції сили Магнуса на осі координат можна обчислити за формулами:

$$F_{mx} = \frac{8\pi}{3} \delta r^3 \omega \dot{y}; \quad F_{my} = -\frac{8\pi}{3} \delta r^3 \omega \dot{x}; \quad F_{mz} = 0, \quad (1)$$

де δ – щільність газового середовища; $\omega = \omega(t)$ – кутова швидкість обертання кулі радіуса $r = r(t)$; t – час; \dot{x}, \dot{y} – проекції лінійної швидкості руху центра мас на осі відповідно ox і oy .

Без урахування опору середовища, в однорідному полі гравітації, рух тіла маси $m = m(t)$ описується рівняннями:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{mx} - \mu\dot{x}\dot{m}; & m\ddot{y} &= F_{my} - \mu\dot{y}\dot{m}; \\ m\ddot{z} &= F_{mz} - \mu\dot{z}\dot{m} + mg. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут коефіцієнт $0 < \mu < 1$ коригує величину реактивної сили, зумовленої зменшенням маси; g – прискорення вільного падіння.

Вважаємо, що зміна радіуса r тіла, яке падає, описується дробово-лінійною функцією часу t :

$$r = \frac{r_0}{1 + \gamma t}, \quad (3)$$

де $r_0 = r(0)$; γ – параметр, який характеризує інтенсивність зменшення радіуса та маси однорідної кулі.

З (1), (2) випливає, що координати траєкторії польоту центра мас тіла, під дією сили Магнуса, реактивної сили та сили гравітації, без урахування опору зовнішнього середовища, задовольняють систему диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{2\delta\omega}{\rho}\dot{y} - \mu\frac{\dot{m}}{m}\dot{x}, \\ \ddot{y} &= -\frac{2\delta\omega}{\rho}\dot{x} - \mu\frac{\dot{m}}{m}\dot{y}, \\ \ddot{z} &= g - \mu\frac{\dot{m}}{m}\dot{z}. \end{aligned} \quad (4)$$

У них доданки з множником ω визначають дію сили Магнуса, а доданки з множником μ – дію реактивної сили.

Рівняння (4) будемо розв'язувати за початкових умов:

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) &= v_0 \cos \varphi; \\ \dot{y}(0) &= v_0 \sin \varphi; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\dot{z}(0) = \dot{z}_0; \quad x(0) = y(0) = z(0) = 0,$$

де \vec{v}_0 – проекція стартової швидкості центра мас на горизонтальну площину; φ – кут, який ця проекція складає з віссю ox ; \dot{z}_0 – проекція стартової швидкості на вертикальну вісь (див. рис. 1).

В Побудова замкненого розв'язку поставленої задачі

Знаходження розв'язку третього рівняння в (4) не становить труднощів. Його перший та другий інтеграли мають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \frac{a^{3\mu}}{b\gamma}(g(1 - a^{-b}) + v_0\gamma b), \\ z(t) &= \frac{2(a^{b+2} - 1)(3\mu\gamma v_0 + (g - v_0\gamma)) - (a - 1)(g\gamma t(2 + b))}{2\gamma^2(9\mu^2 - 1)}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $a = 1 + \gamma t$; $b = 3\mu - 1$.

Згідно з (3)

$$\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{3\gamma}{r_0}r.$$

Для пошуку аналітичних розв'язків перших двох рівнянь системи (4) введемо допоміжну функцію з індексом “одиниця” за формулами:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 + \gamma t)^{3\mu} \dot{x}_1(t); \\ \dot{y}(t) &= (1 + \gamma t)^{3\mu} \dot{y}_1(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Підставивши (7) в (4), отримуємо спрощену систему

$$\ddot{x}_1 = \frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{y}_1; \quad \ddot{y}_1 = -\frac{2\delta}{\rho}\omega\dot{x}_1, \quad (8)$$

яку зводимо до рівняння

$$\ddot{\eta} - \frac{\dot{\omega}}{\omega}\dot{\eta} + \left(\frac{2\delta}{\rho}\right)^2 \omega^2 \eta = 0, \quad (9)$$

де $\eta = \dot{x}_1(t)$.

Щоб знайти залежність $\omega(r)$, використовуємо закон збереження моменту кількості руху кулі, яка обертається. Згідно з цим законом

$$r \frac{d\omega}{dr} + 5\nu\omega = 0. \quad (10)$$

Тут $0 < \nu < 1$ – коефіцієнт, який коригує величину реактивного моменту, зумовленого зміною розмірів і маси кулі.

Якщо початкова кутова швидкість обертання кулі дорівнює ω_0 , то, розв'язавши рівняння (10), отримуємо

$$\omega(r) = \omega_* r^{-5\nu}, \quad (11)$$

де $\omega_* = \omega_0 r_0^{5\nu}$.

Із (3) і (11) випливає, що

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = \frac{5\nu\gamma}{1 + \gamma t}; \quad \omega^2 = \omega_0^2 (1 + \gamma t)^{10\nu}. \quad (12)$$

Тоді рівняння (9) набуває вигляду

$$\ddot{\eta} - \frac{5\nu\gamma}{1 + \gamma t}\dot{\eta} + \left(\frac{2\delta}{\rho}\right)^2 \omega_0^2 (1 + \gamma t)\eta = 0. \quad (13)$$

Загальним розв'язком рівняння (13) є

$$\eta = c_1 \sin(\kappa) + c_2 \cos(\kappa), \quad (14)$$

де $\kappa = \frac{2\omega_0\delta}{\gamma\rho} \cdot \frac{(1+\gamma t)^{5\nu+1}}{5\nu+1}$; c_1, c_2 – довільні сталі.

Використовуючи (14) і (7), отримуємо формули для обчислення проекцій швидкості руху центра мас, на осі координат:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (1 + \gamma t)^{3\mu} (c_1 \sin(\kappa) + c_2 \cos(\kappa)), \\ \dot{y}(t) &= (1 + \gamma t)^{3\mu} (c_1 \cos(\kappa) - c_2 \sin(\kappa)). \end{aligned} \quad (15)$$

За допомогою початкових умов (5) знаходимо константи інтегрування

$$c_1 = v_0 \sin(\kappa_0 + \varphi); \quad c_2 = v_0 \cos(\kappa_0 + \varphi). \quad (16)$$

Тут $\kappa_0 = \frac{2\omega_0\delta}{\gamma\rho} \cdot \frac{1}{5\nu+1}$.

Обчислення координат траєкторії центра мас зводимо до формул:

$$x(t) = c_1 I_1(t) + c_2 I_2(t); \quad y(t) = c_1 I_2(t) - c_2 I_1(t), \quad (17)$$

в яких

$$I_1(t) = \int_0^t (1 + \gamma t)^{3\mu} \sin(\beta(1 + \gamma t)^{5\nu+1}) dt,$$

$$I_2(t) = \int_0^t (1 + \gamma t)^{3\mu} \cos(\beta(1 + \gamma t)^{5\nu+1}) dt.$$

(17), одержуємо

$$I_1(t) = \frac{1}{\gamma(5\nu + 1)\beta^\alpha} \int_\beta^{\theta_1} \theta^{\alpha-1} \sin \theta d\theta;$$

$$I_2(t) = \frac{1}{\gamma(5\nu + 1)\beta^\alpha} \int_\beta^{\theta_1} \theta^{\alpha-1} \cos \theta d\theta.$$

Введенням нової змінної інтегрування, замість

$$\text{Тут } \alpha = \frac{1+3\mu}{1+5\nu}; \theta_1 = \beta(1 + \gamma t)^{5\nu+1}.$$

Узагальнені інтеграли Френеля (18) зводяться до різниці гіпергеометричних функцій, а саме:

$$I_1(r) = \frac{1}{\gamma(5\nu + 1)\beta^\alpha(\alpha + 1)} \left(\theta_1^{1+\alpha} {}_1F_2 \left(\frac{\alpha + 1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\alpha + 3}{2}; -\frac{\theta_1^2}{4} \right) - \beta^{1+\alpha} {}_1F_2 \left(\frac{\alpha + 1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\alpha + 3}{2}; -\frac{\beta^2}{4} \right) \right);$$

$$I_2(r) = \frac{1}{\gamma(5\nu + 1)\beta^\alpha \alpha} \left(\theta_1^\alpha {}_1F_2 \left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\alpha + 2}{2}; -\frac{\theta_1^2}{4} \right) - \beta^\alpha {}_1F_2 \left(\frac{\alpha}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\alpha + 2}{2}; -\frac{\beta^2}{4} \right) \right).$$

Із (18) виливає, що характер руху центра мас залежить від значення α . Якщо $\alpha = 1$, то траєкторією руху буде спіраль зі сталою кривиною, яка на площину xoy проектується в коло (аналог особливої точки – центр, на фазовій площині). Якщо $\alpha < 1$, то спіраль буде закручуватися (аналог особливої точки – стійкий фокус). Якщо ж $\alpha > 1$, то спіраль розкручується (аналог нестійкого фокуса).

С Числові результати та їх аналіз

Вивчимо вплив кутової швидкості на траєкторію руху центра мас сферичної частинки. Для цього приймемо такі вихідні дані: $r_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho = 1000$ кг/м³; $\gamma = 3$ с⁻¹; $\delta = 1$ кг/м³; $\varphi = 45^\circ$; $v_0 = 5$ м/с; $\dot{z}_0 = 1$ м/с; $\mu = 0,7$; $\nu = 0,3$ та різні ω_0 .

На рис. 2 наведено траєкторії, а на рис. 3 – їх

проекції, отримані для значень $\omega_0 = 1000; 2000; 3000$ с⁻¹ (що позначені цифрами 1, 2, 3 на графіках). Зі зростанням початкового значення кутової швидкості збільшується вплив сили Магнуса, тобто більше викривляється траєкторія.

Розглянемо питання про зміну траєкторії руху центра мас кулі залежно від величини коефіцієнта α . Приймемо $\omega_0 = 2000$ с⁻¹ та різні значення коефіцієнта реактивності μ . Результати розрахунку наведено на рис. 4 та 5.

На рис. 4 і 5 вказано траєкторії руху та їх проекції, отримані для $\mu = 0,3; 0,5; 0,7$, і позначені цифрами 1, 2, 3 на графіках. Прийняті значення μ приводять відповідно до $\alpha < 0, \alpha = 0, \alpha > 0$. За $\mu = 0,3$ траєкторія 1 закручується усередину. Коли $\mu = 0,5$ отримуємо спіраль сталої кривизни, на рис. 5 – це коло 2. Для значення $\mu = 0,7$ спіраль 3 розкручується.

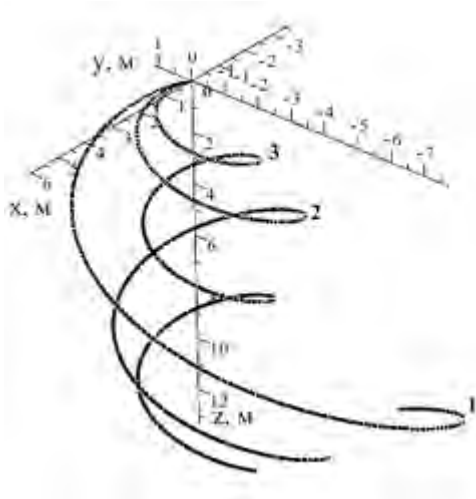


Рис. 2. Три траєкторії для різних ω_0

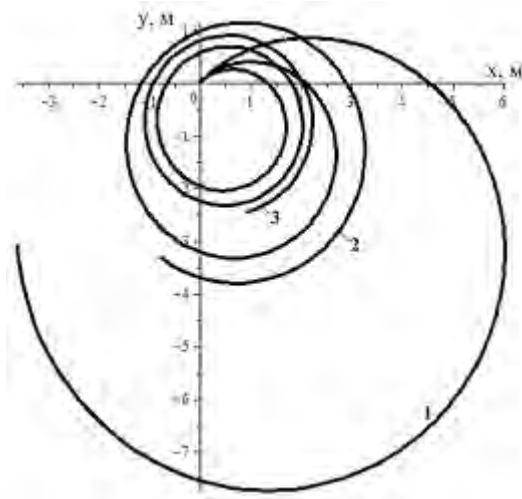


Рис. 3. Проекції траєкторій на площину xoy

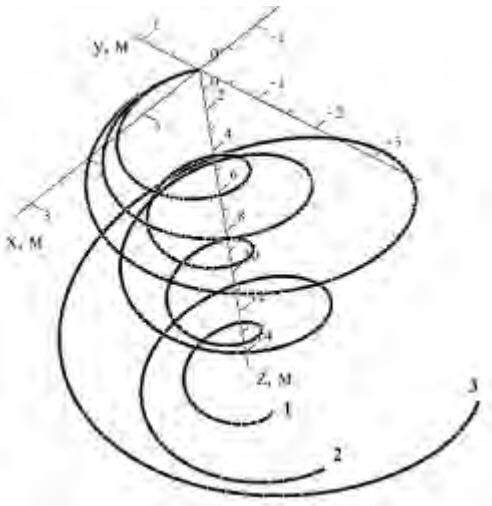


Рис. 4. Траєкторії для різних μ

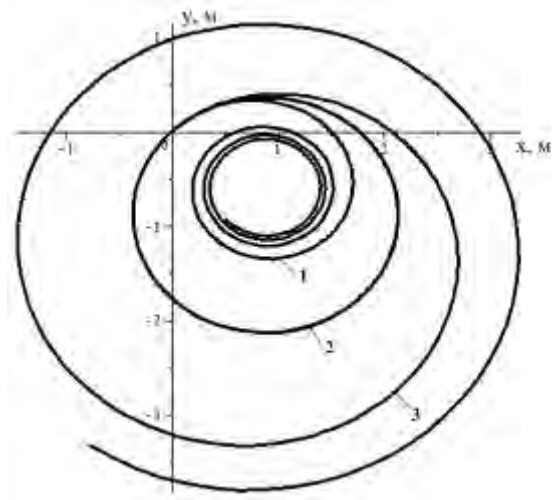


Рис. 5. Траєкторії для різних μ

Висновки

Перші інтеграли рівняння руху виражаються в елементарних функціях для випадку дробово-лінійного закону зміни радіуса кулі в часі та обертання її навколо вертикальної осі, без урахування опору середовища. Другі інтеграли рівнянь зводяться

до узагальнених інтегралів Френеля, які виражаються через гіпергеометричні функції. Сила Магнуса викривляє траєкторію падіння центра мас кулі в просторову лінію. Кривизни траєкторій залежать від співвідношення між силою Магнуса та реактивною силою.

Література

- [1] Злочевский В. Л. Интенсификация процесса аэродинамического разделения зерновых материалов: автореф. дис. на соискание научной степени док. техн. наук. / В. Л. Злочевский. – Новосибирск : СибИМЭ СО ВАСХНИЛ, 1986. – 35 с.
- [2] Котов Б. І. До теорії розділення зерна в повітряному потоці / Б. І. Котов, С. П. Степаненко // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – 2009. – № 39. – С. 54–64.
- [3] Потураев В. Н. Вибрационно-пневматическое транспортирование сыпучих материалов / В. Н. Потураев, А. И. Волошин, Б.В. Пономарев – К.: Наук думка, 1989. – 245 с.
- [4] Современные дизели: повышение топливной экономичности и длительной прочности. / Ф. И. Абрамчук, А. П. Марченко, Н. Ф. Разлейцев и др – К.: Техника, 1992. – 272 с.
- [5] Балістика крапель, які випаровуються при польоті / С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тищенко. – Харків. : ХНТУСГ, 2007. – 304 с.
- [6] Прандтль Л. Эффект Магнуса и ветряной корабль / Л. Прандтль // Успехи физических наук. – 1925. – Том. 5 – № 1–2. – С. 1–27.
- [7] Бычков Н. М. Ветродвижитель с эффектом Магнуса: Результаты модельных исследований / Н. М. Бычков // Теплофизика и аэромеханика. – 2004. – Том. 11 – № 4. – С. 583–596.
- [8] Ольшанський В. Математичне моделювання падіння кулі, яка обертається та збільшує масу / В. Ольшанський, С. Ольшанський, К. Аврамов // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – № 11. – С. 141–149.
- [9] Ольшанський В. П. О движении вращающегося шара переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Транспортное машиностроение. – 2009. – № 47. – С. 180–187.
- [10] Ольшанський В. П. Про швидкість падіння кулі, що обертається та змінює масу за показниковим законом / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. вып.: Динамика и прочность машин. – 2009. – № 42. – С. 116–122.
- [11] Сагитов М. Н. Некоторые случаи движения вращающегося шара переменной массы, ось которого горизонтальна / М. Н. Сагитов // Изв. АН Казахской ССР. Серия физ.-мат. наук. Математика и механика. – 1963. – № 15. – С. 88–99.

О ВЛИЯНИИ СИЛЫ МАГНУСА НА ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Ольшанский В. П.^a, Ольшанский С. В.^b

^a *Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства,
ул. Артема, 44, 61002, Харьков, Украина*

^b *Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт",
ул. Фрунзе, 21, 61002, Харьков, Украина*

Решена задача падения однородного шара, радиус которого уменьшается во времени по дробно-линейному закону. Первые интегралы уравнений движения найдены в элементарных функциях, вторые интегралы сведены к обобщённым интегралам Френеля, которые выражаются в гипергеометрических функциях. Исследованы особенности движения под действием силы Магнуса.

Ключевые слова: движение массивного шара, уменьшение массы, сила Магнуса, специальные функции.

2000 MSC: 70B10

УДК: 531.391

THE EFFECT OF THE MAGNUS FORCE ON THE MOTION OF A SPHERICAL BODY WITH VARIABLE MASS

Olshanskii V. P.^a, Olshanskii S. V.^b

^a *Kharkov State Technical University of Agriculture
44 Artema Str., 61002, Kharkov, Ukraine*

^b *National Technical University "Kharkov Polytechnical Institute"
21 Frunze Str., 61002, Kharkov, Ukraine*

The problem of falling of a homogeneous sphere whose radius decreases in time according to fractional linear law is solved. First integrals of equations of motion are found in elementary functions, the second integral is reduced to a generalized Fresnel integrals, which are expressed in terms of hypergeometric functions. The features of motion of the sphere under the force of Magnus are investigated.

Key words: motion of a sphere, decrease in mass, Magnus force, special functions.

2000 MSC: 70B10

УДК: 531.391