ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
**"Фізико-математичні науки"**
Вип.768 № 768, (2013) с. 82–84

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
**"Physical & mathematical sciences"**
Vol.768 No 768, (2013) 82–84

# ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ЗВ'ЯЗАНИХ З ОПЕРАТОРОМ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Лопотко О. В.

*Національний лісотехнічний університет України*
*вул. Генерала Чупринки, 103, Львів, 79057, Україна*

*(Отримано 28 травня 2012 р.)*

Доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначених функцій двох змінних $k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, для яких ядро $K(x,y)$ додатно визначено. Ця теорема є узагальненням теореми про інтегральне зображення експоненціально випуклих функцій двох змінних.

**Ключові слова:** інтегральне зображення, оператор, додатно визначена функція.

**2000 MSC:** 34860

**УДК:** 517.9

У роботах [1, 2] запропоновано метод одержання інтегральних зображень для додатно визначених ядер $K(x,y)$ $(x,y \in \mathbb{R}^n)$ з використанням власних функцій диференціальних операторів. Застосовуючи цей метод, у монографії [3, глава VIII] доведено теорему 4.2 про інтегральне зображення таких ядер. У випадку $\mathbb{R}^2$ інтегральне зображення ядер матиме такий вигляд:

$$K(x,y) = \int\limits_{R^2} \sum_{\alpha,\beta\in A} \chi_\alpha(x;\lambda)\overline{\chi_\beta(y;\lambda)} d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \quad (x,y \in \mathbb{R}^2),$$

де

$$d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) = \left( \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\Omega_\lambda}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial y_1^{\beta_1}\partial y_2^{\beta_2}} \right)(a,a)d\rho(\lambda),$$

$$\Omega_\lambda(x,y) = \sum_{\alpha,\beta\in A} \left( \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2}\Omega}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial y_1^{\beta_1}\partial y_2^{\beta_2}} \right)(a,a)\chi_\alpha(x;\lambda)\overline{\chi_\beta(y;\lambda)},$$

$a = (a_1, a_2)$ – векторний індекс, який змінюється по цілочисленному паралелепіпеду $A$ з координатами $\alpha_1 = 0, \ldots, r_1 - 1; \alpha_2 = 0, \ldots, r_2 - 1$;

$$\chi_\alpha(x;\lambda) = \chi^{(1)}_{\alpha_1}(x_1;\lambda) \cdot \chi^{(2)}_{\alpha_2}(x_2;\lambda);$$

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2;$$

$\chi^{(j)}_0(x_j;z), \ldots, \chi^{(j)}_{j-1}(x_j;z)$ — фундаментальна система розв'язків диференціального рівняння

$$L^{(j)}u(x_1;x_2) - zu(x_1;x_2) = 0, \quad (j = 1,2), \qquad (1)$$

яка задовольняє умови:

$$\frac{d^k}{dx_j^k}\chi_m(x_j;z)\big|_{x_j=a_j} = \delta_{mk} \ (m,k=0,\ldots,r_j-1; j=1,2),$$

$\delta_{mk}$ – символ Кронеккера, що дорівнює 1, якщо $m = k$, і 0 якщо $m \neq k$.

За допомогою цієї теореми одержано інтегральні зображення для ядер

$k(y_1 - x_1; y_2 - x_2)$, якщо у (1) $L^{(j)} = i\dfrac{d}{dx_j}$ $(j = 1,2)$;

$\dfrac{1}{2}\left[k(x_1 + y + 1; x_2 + y_2) + k(x_1 - y_1; x_2 - y_2)\right]$, якщо у (1) $L^{(j)} = -\dfrac{d^2}{dx_j^2}$ $(j = 1,2)$;

$k(x_1 + y_1; x_2 + y_2)$, якщо у (1) $L^{(j)} = \frac{d}{dx_j}$ $(j = 1,2)$.

У статті доведено теорему про інтегральне зображення додатно визначеного ядра, якщо у (1) $L^{(j)} = \frac{d}{dx_j} + p(x_j)$ $(j = 1,2)$, де $p(x)$ – неперервна функція.

Інтегральне зображення додатно визначеного ядра, якщо $L = \dfrac{d}{dx} + p(x)$ $(x \in \mathbb{R}^1)$ доведено у [4].

**Означення.** Неперервну функцію $k(x_2, x_2)$ будемо називати додатно визначеною, якщо виконується нерівність

$$\int\limits_{R^2}\int\limits_{R^2} K(x;y)\, u(y)\, \overline{u(x)}\, dxdy \geq 0 \quad (u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)), \quad (2)$$

де $\quad K(x,y) = \dfrac{a(x+y)}{a(x)a(y)}k(x+y),$

$$a(x) = a(x_1;x_2) = exp\left\{ \int\limits_0^{x_1} p(x_1)dx_1 + \int\limits_0^{x_2} p(x_2)dx_2 \right\}.$$

**Теорема.** *Для того, щоб ядро $K(x,y)$ було додатно визначеним, необхідно і достатньо, щоб функція $k(x_1,x_2) \in C^1(\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1)$ мала таке зображення:*

$$k(x_1;x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi^{(1)}_0(x_1;\lambda_1)\chi^{(2)}_0(x_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2), \qquad (3)$$

*де $d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємна скінченна міра, а $\chi^{(j)}_0(x_j;\lambda_j)$ – розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову $\chi^{(j)}_0(0;\lambda_j) = 1$ $(j = 1,2)$.*

□ *Доведення. Необхідність.* Нехай ядро $K(x,y)$ додатно визначено і для нього легко перевірити, що виконується співвідношення

$$L^{(j)}_{x_j}[K(x,y)] = L^{(j)}_{y_j}[K(x,y)] \ (j = 1,2).$$

Тому для ядра $K(x,y)$, згідно з теоремою 4.2 [3, глава VIII], можна написати таке інтегральне зображення:

$$K(x;y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)\chi_0^{(1)}(y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(y_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2), \qquad (4)$$

де $d\sigma(\lambda_1,\lambda_2)$ – невід'ємна скінченна міра, а $\chi_0^{(j)}(x_j;\lambda_j)$ – розв'язок рівняння $\frac{du}{dx_j}+ +p(x_j)u = \lambda u$ $(j = 1,2)$, який задовольняє умову $\chi_0^{(j)}(0;\lambda_j) = 1$ $(j = 1,2)$.

Прийнявши у (4) $y_1 = 0, y_2 = 0$, одержимо (3). Необхідність доведено.

*Достатність.* Маємо інтегральне зображення (3) і ядро $K(x,y) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}\cdot k(x+y)$. Покажемо, що це ядро додатно визначено. Для цього спочатку введемо оператор загального зсуву. Нехай $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, позначимо через $u(x,y)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} + p(x_j)u = \frac{\partial u}{\partial y_j} + p(y_j)u \qquad (j=1,2) \qquad (5)$$

$$u(x_j;0) = f(x_j). \qquad (6)$$

Якщо позначимо через

$$a(x) = \exp\left\{\int\limits_0^{x_1} p(x_1)dx_1 + \int\limits_0^{x_2} p(x_2)dx_2\right\},$$

і $v = a(x)a(y)u$, то задачу Коші (5)–(6) можна звести до задачі

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \frac{\partial v}{\partial y_j}, \qquad (j=1,2) \qquad (7)$$

$$v(x_j;0) = a(x_j)f(x_j). \qquad (8)$$

Оскільки розв'язок задачі (7)–(8) має вигляд

$$v(x;y) = a(x+y)f(x+y),$$

то розв'язок задачі (5)–(6) матиме такий вигляд:

$$u(x;y) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}f(x+y). \qquad (9)$$

Введемо тепер оператор зсуву $T_y$, прийнявши

$$(T_y f)(x) = u(x;y) \qquad (x,y\in\mathbb{R}^2). \qquad (10)$$

Застосовуючи оператор $T_y$ до обох частин інтегрального зображення (3), одержимо

$$(T_y k)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^1} T_y\chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2). \qquad (11)$$

Тут, оскільки

$$(T_y k)(x) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}k(x+y),$$

$$T_y\chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2) = \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}\chi_0^{(1)}(x_1+y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2+y_2;\lambda_2) =$$

$$= \frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}e^{\lambda_1(x_1+y_1)-\int_0^{x_1+y_1} p(x_1+y_1)d(x_1+y_1)}e^{\lambda_2(x_2+y_2)-\int_0^{x_2+y_2} p(x_2+y_2)d(x_2+y_2)} =$$

$$= \frac{e^{\lambda_1(x_1+y_1)+\lambda_2(x_2+y_2)}}{a(x)a(y)} = \chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)\chi_0^{(1)}(y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(y_2;\lambda_2),$$

тому що

$$\chi_0(x_j;\lambda_j) = e^{\lambda_j x_j - \int_0^{x_j} p(x_j)dx_j} \qquad (j=1,2)$$

є розв'язок рівняння

$$\frac{du}{dx_j} + p(x_j)u = \lambda_j u \qquad (j=1,2).$$

Тому рівність (11) набуде вигляду

$$\frac{a(x+y)}{a(x)a(y)}k(x+y) = \qquad (12)$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^1}\int\limits_{\mathbb{R}^1}\chi_0^{(1)}(x_1;\lambda_1)\chi_0^{(1)}(y_1;\lambda_1)\chi_0^{(2)}(x_2;\lambda_2)\chi_0^{(2)}(y_2;\lambda_2)d\sigma(\lambda_1,\lambda_2).$$

За допомогою (12) перевіряється умова (1).

Теорему доведено. ■

## Висновки

Доведена теорема дозволяє знайти додатно визначене ядро, пов'язане з оператором $\frac{d}{dx_j} + p(x_j)$ $(j = 1,2)$. Якщо $p(x_j) = 0$, то одержимо інтегральне зображення експоненціально випуклих функцій двох змінних.

Можна також використовувати цю теорему під час дослідження інфінітезимальних операторів першого порядку [5].

## Література


[1] Березанский Ю.М. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов // УМЖ. – 1959. – 11, 1. – С.16–24.

[2] Березанский Ю.М. Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера // ДАН СССР – Т. 136, № 5, 1961. – С.1011–1014.

[3] Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – К.: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[4] Лопотко О.В. Інтегральне зображення додатно визначених функцій однієї змінної зв'язаних з оператором першого порядку // Вісник Нац. ун-ту "Львівської політехніки". – № 718, 2011. – С.78–80.

[5] Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. – М.: Наука. 1973. – 312 с.


# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СВЯЗАННЫХ С ОПЕРАТОРОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА


Лопотко О. В.

*Национальный лесотехнический университет Украины,*
*ул. Генерала Чупрынки, 103, Львов, 79057, Украина*



Доказано теорему об интегральном представлении положительно определенных функций двух переменных $k(x)$ $(x \in \mathbb{R}^2)$, для которых ядро $K(x, y)$ положительно определено. Эта теорема есть обобщением теоремы об интегральном представлении экспоненциально выпуклых функций двух переменных.



**Ключевые слова:** интегральное представление, оператор, положительно определенные функции.

**2000 MSC:** 34860

**УДК:** 517.9


# INTEGRAL REPRESENTATION OF POSITIVELY DEFINITE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES ASSOCIATED WITH AN OPERATOR OF FIRST ORDER


Lopotko O. V.

*National University Forest of Lviv*
*103 General Chuprinka Str., Lviv, 79057, Ukraine*



Integral representation is obtained for positive definite functions of two variables. This representation is generalization of integral representation for exponential convex functions of two variables.



**Key words:** integral representation, operator, positive definite functions.

**2000 MSC:** 34860

**УДК:** 517.9