ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 75–81

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 75–81

ПРО ВІЛЬНІ ДОБУТКИ ПАРАТОПОЛОГІЧНИХ ГРУП ТА ЇХНІ ГОМОМОРФІЗМИ

Пирч Н. М.

Українська академія друкарства
вул. Підголоско, 19, 79020, Львів, Україна

(Отримано 31 жовтня 2013 р.)

Досліджуємо топологічні і тополого-алгебраїчні властивості гомоморфізмів паратопологічних груп, які зберігаються конструкцією вільного добутку.

Ключові слова: вільна топологічна група, вільний добуток паратопологічних груп, гомоморфізм паратопологічних груп.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.546

I. Вступ

У роботі ми продовжуємо дослідження вільних добутків паратопологічних груп, розпочаті у роботах [4–6]. Зокрема акцентуємо увагу на гомоморфізмах вільних добутків паратопологічних груп. Досліджуємо, які топологічні та тополого-алгебраїчні властивості гомоморфізмів паратопологічних груп зберігаються конструкцією вільного добутку.

Нагадаємо, що паратопологічною групою називається пара (G,τ), де G — група, τ — топологія на G, причому відображення множення $m\colon G\times G\to G$, $m(x,y)\mapsto xy$ є неперервним. Топологія τ називається при цьому напівгруповою. Якщо, крім того, відображення інверсії $i\colon G\to G$, $\mathrm{i}(x)\mapsto x^{-1}$ є неперервним, то пара (G,τ) називається топологічною групою, а топологія τ — груповою.

Вивчення вільних добутків топологічних груп започатковано в роботі М.І. Граєва [1]. Подальше дослідження вільних добутків топологічних груп пов'язане переважно зі школою С.А. Морріса. У роботах [1], [10–13] можна ознайомитися з основними властивостями вільних добутків топологічних груп.

Всюди у роботі вважатимемо, що I є непорожньою множиною індексів.

Означення 1.1. [4] Нехай $\{G_i : i\in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Паратопологічну групу G ми будемо називати вільним топологічним добутком груп G_i (позн. $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$), якщо виконано умови:

1) група G містить групи G_i в якості своїх підгруп;

2) мінімальна підгрупа групи G, що містить всі підгрупи G_i співпадає з G;

3) якщо для кожного $i\in I$ існує неперервний гомоморфізм $f_i\colon G_i\to H$ з паратопологічної групи G_i у паратопологічну групу H, то існує неперервний гомоморфізм $f\colon G\to H$ з паратопологічної групи G у H такий, що $f|G_i=f_i$ для всіх $i\in I$.

Як було встановлено у [4] для кожної сім'ї $\{G_i : i\in I\}$ паратопологічних груп вільний топологічний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ існує і є єдиним з точністю до топологічного ізоморфізму, що залишає на місці всі елементи груп G_i. Якщо, крім того, усі співмножники G_i є топологічними групами, то вільний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ є топологічною групою, яка топологічно ізоморфна топологічній групі, що є вільним добутком цієї сім'ї у класі топологічних груп.

У другому розділі ми доводимо деякі допоміжні твердження з теорії вільних добутків абстрактних груп, які нам потрібні у наступних розділах. У третьому розділі ми встановлюємо, які тополого-алгебраїчні властивості вільних добутків паратопологічних зберігаються, а які не зберігаються конструкцією вільного добутку. У четвертій частині доводимо, що для довільного нескінченного кардиналу τ властивості бути P_τ-простором та властивості бути τ-збалансованою (англ. τ-steady) групою зберігаються при переході від груп-співмножників до їхнього вільного добутку.

Про результати роботи описано у [7].

II. Деякі питання теорії вільних добутків абстрактних груп

Нехай $\{G_i : i\in I\}$ — сім'я груп. Для $j\in I$ розглянемо сім'ю гомоморфізмів $\{f_i\colon G_i\to G_j : i\in I\}$, де $f_i(g)=e$, якщо $i\neq j$ та $g\in G_i$ і $f_j(g)=g$, якщо $g\in G_j$. За означенням вільного добутку існує гомоморфізм $p_{G_j}\colon\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i\to G_j$, який продовжує сім'ю гомоморфізмів $\{f_i : i\in I\}$. Цей гомоморфізм назвемо проектуванням вільного добутку $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i$ на співмножник G_j.

Нехай $\{f_i\colon G_i\to H_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів абстрактних груп. Тоді існує гомоморфізм $f\colon\prod\limits_{i\in I}{}^{*}G_i\to\prod\limits_{i\in I}{}^{*}H_i$ такий, що $f|_{G_i}=f_i$ для всіх $i\in I$. Гомоморфізм f називатимемо вільним добутком сім'ї гомоморфізмів $\{f_i : i\in I\}$ і позначатимемо

$f = \prod^*_{i \in I} f_i$.

Лема 2.1. *Нехай* $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ *— сім'я гомоморфізмів абстрактних груп,* $f = \prod^*_{i \in I} f_i$ *— їхній вільний добуток. Тоді* $p_{H_i} \circ f = f_i \circ p_{G_i}$*, тобто діаграма*

$$\begin{array}{ccc} \prod^*_{i\in I} G_i & \xrightarrow{f} & \prod^*_{i\in I} H_i \\ p_{G_j} \downarrow & & \downarrow p_{H_j} \\ G_j & \xrightarrow{f_j} & H_j \end{array}$$

є комутативною.

☐ *Доведення.* Нехай $w = B_0 g_1 B_1 g_2 ... g_n B_n$ — довільний елемент з $\prod^*_{i \in I} G_i$, де B_k — слова, що не містять елементів з G_j, $g_k \in G_j$, для $k = 1, .., n$. Тоді

$$f(w) = f(B_0 g_1 B_1 g_2 ... g_n B_n) =$$
$$= f(B_0) f(g_1) f(B_1) f(g_2) ... f(g_n) f(B_n) =$$
$$= f(B_0) f_j(g_1) f(B_1) f_j(g_2) ... f_j(g_n) f(B_n),$$

де $f(B_k)$ — слова, що не містять елементів з H_j. Тому

$$p_{H_j} \circ f(w) = p_{H_j}(f(B_0) f_j(g_1) f(B_1) f_j(g_2) ... f_j(g_n) f(B_n)) =$$
$$= p_{H_j}(f(B_0)) p_{H_j}(f_j(g_1)) p_{H_j}(f(B_1)) \times$$
$$\times p_{H_j}(f_j(g_2)) ... p_{H_j}(f_j(g_n)) p_{H_j}(f(B_n)) =$$
$$= e f_j(g_1) e f_j(g_2) ... f_j(g_n)) e = f_j(g_1) f_j(g_2) ... f_j(g_n).$$

Звідки,

$$p_{G_j}(w) = p_{G_j}(B_0 g_1 B_1 g_2 ... g_n B_n) =$$
$$= p_{G_j}(B_0) p_{G_j}(g_1) p_{G_j}(B_1) p_{G_j}(g_2) ... p_{G_j}(g_n) p_{G_j}(B_n) =$$
$$= e g_1 e g_2 ... g_n e = g_1 g_2 ... g_n.$$

Отже,

$$f_j \circ p_{G_j}(w) = f_j(g_1 g_2 ... g_n) =$$
$$= f_j(g_1) f_j(g_2) ... f_j(g_n) = p_{H_j} \circ f(w).$$

■

Лема 2.2. *Нехай* $f = \prod^*_{i \in I} f_i$ *— вільний добуток сім'ї гомоморфізмів* $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ *абстрактних груп. Тоді* $p_{G_j}(kerf) = kerf_j$ *для всіх* $j \in I$.

☐ *Доведення.* Доведемо включення $kerf_j \subseteq \subseteq p_{G_j}(kerf)$. Нехай $x \in kerf_j$, тоді $x = kerf \cap G_j$. Отже, $x = p_{G_j}(x) \in p_{G_j}(kerf)$.

Доведемо включення $p_{G_j}(kerf) \subseteq kerf_j$. Нехай $x \in p_{G_j}(kerf)$. Тоді $x = p_{G_j}(w)$ для деякого $w \in kerf$. Тому $f_j(x) = f_j \circ p_{G_j}(w) = p_{H_j} \circ f(w) = p_{H_j}(e) = e$. Отже, $x \in kerf_j$. ■

Лема 2.3. *Нехай* $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ *— сім'я гомоморфізмів абстрактних груп,* $f = \prod^*_{i \in I} f_i$ *— їхній вільний добуток. Нехай елемент* $w = a_1 a_2 ... a_n$*, де* $a_k \in G_{i_k}$ *при* $k = 1, .., n$ *належить ядру гомоморфізму* f*. Тоді існує представлення* $b_1 b_2 ... b_n$ *одиниці групи* $\prod^*_{i \in I} G_i$ *таке, що* $f_{i_k}(a_{i_k}) = f_{i_k}(b_{i_k})$ *для всіх* $k = 1, .., n$.

☐ *Доведення.* Оскільки $w \in kerf$, то слово $f(w) = f(a_1) f(a_2) ... f(a_n)$ є порожнім у $\prod^*_{i \in I} H_i$, тобто всі елементи $f(w)$ скорочуються. Цей процес скорочення ми можемо розбити на два етапи. На першому етапі скорочуємо ті з елементів $f(a_k)$, які дорівнюють e. Якщо $f(a_k) = e$, то приймемо $b_k = e$. Тоді $f_{i_k}(a_k) = f(a_k) = e = f(e) = f_{i_k}(b_k)$. Після скорочення елементів, що дорівнюють e, у слові $f(w)$ утворяться група чи групи елементів $g_1 g_2 ... g_l$, таких, що $g_1, g_2, ..., g_l \in G_r$ для деякого $r \in I$ і $g_1 \cdot g_2 \cdot ... \cdot g_l = e$. Нехай $f(a_{i_k}) = g_k$, $k = 1...l$. Приймемо $b_{j_1} = a_{j_1}$, $b_{j_2} = a_{j_2}$, ..., $b_{j_{l-1}} = a_{j_{l-1}}$, $b_{j_l} = a^{-1}_{j_{l-1}} \cdot a^{-1}_{j_{l-2}} \cdot ... \cdot a^{-1}_{j_1}$. Для всіх $k = 1...l-1$ умова $f_r(a_{i_k}) = f_r(b_{i_k})$ очевидним чином виконується. Перевіримо виконання цієї умови для $k = l$.

$$f(b_{j_1} b_{j_2} ... b_{j_l}) = f(a_{j_1} a_{j_2} ... a_{j_{l-1}} a^{-1}_{j_{l-1}} ... a^{-1}_{j_2} a^{-1}_{j_1}) = f(e) = e.$$

Тобто, $f(b_{j_1} b_{j_2} ... b_{j_l}) = f(b_{j_1} b_{j_2} ... b_{j_{l-1}}) f(b_{j_l}) = e$, звідки $f(b_{j_l}) = f(b_{j_1} b_{j_2} ... b_{j_{l-1}})^{-1}$. ■

III. Вільні добутки гомоморфізмів паратопологічних груп

Нехай $\{f_i \colon G_i \to H_i \ : i \in I\}$ — сім'я неперервних гомоморфізмів паратопологічних груп. Тоді існує гомоморфізм $f \colon \prod^*_{i \in I} G_i \to \prod^*_{i \in I} H_i$ такий, що $f|_{G_i} = f_i$ для всіх $i \in I$. Гомоморфізм f називатимемо вільним добутком сім'ї гомоморфізмів $\{f_i : i \in I\}$ і позначатимемо $f = \prod^*_{i \in I} f_i$.

Встановимо, які властивості гомоморфізмів паратопологічних груп зберігаються, а які не зберігаються конструкцією вільного добутку.

Нехай Z — топологічний простір. Скажемо, що неперервне сюр'єктивне відображення $f \colon X \to Y$ є Z-факторним, якщо для довільного відображення $p \colon Y \to Z$ з неперервності композиції $p \circ f$ випливає неперервність відображення p (див. [6]).

Твердження 3.1. Нехай $G_i : i \in I$ — сім'я паратопологічних груп, $f_i \colon G_i \to H$ — сім'я неперервних гомоморфізмів, $f \colon \prod^*_{i \in I} G_i \to H$ — гомоморфізм, що продовжує гомоморфізми f_i, Z — топологічний простір. Нехай також існує $j \in I$ таке, що гомоморфізм f_j є Z-факторним відображенням. Тоді гомоморфізм f є Z-факторним відображенням.

☐ *Доведення.* Доведення випливає з наступного твердження, встановленого у [6]: якщо для неперервного відображення $f \colon X \to Y$ існує така підмножина X_1 в X, що звуження $f|_{X_1}$ є Z-факторним відображенням, то відображення f є також Z-факторним. ■

Означення 3.1. Скажемо, що гомоморфізм $f\colon G\to H$ має правий обернений, якщо існує гомоморфізм $g\colon H\to G$ такий, що композиція $f\circ g$ є тотожним гомоморфізмом на H.

Твердження 3.2. Вільний добуток $f=\prod^*_{i\in I} f_i$ сім'ї неперервних гомоморфізмів $\{f_i\colon G_i\to H_i : i{\in}I\}$ має правий обернений тоді і тільки тоді, коли усі співмножники f_i мають праві обернені.

□ *Доведення.* Необхідність. Нехай $\{f_i\colon G_i\to H_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів таких, що гомоморфізм $f=\prod^*_{i\in I} f_i$ має правий обернений гомоморфізм. Нехай $g\colon \prod^*_{i\in I} H_i\to\prod^*_{i\in I} G_i$ — гомоморфізм, такий, що $f\circ g=1_{\prod^*_{i\in I} H_i}$.

Як було встановлено у [4] кожен співмножник G_i є образом вільного добутку $\prod^*_{i\in I} G_i$ при відкритій гомоморфній ретракції p_{G_i}. Нехай також $p_{H_i}\colon \prod^*_{i\in I} H_i\to H_i$ — відповідна відкрита гомоморфна ретракція. Приймемо $g_i=g|_{H_i}$ і $l_i=p_{G_i}\circ g_i$.

$$\begin{array}{ccccc}
\prod^*_{i\in I} H_i & \xrightarrow{g} & \prod^*_{i\in I} G_i & \xrightarrow{\prod^*_{i\in I} f_i} & \prod^*_{i\in I} H_i\\
p_{H_j}\downarrow & & \downarrow p_{G_j} & & \downarrow p_{H_j}\\
H_j & \xrightarrow{l_j} & G_j & \xrightarrow{f_j} & H_j
\end{array}$$

Нехай $x\in H_j$. Тоді $f_j\circ l_j(x)=f_j\circ p_{G_j}\circ g_j(x)=$ $=p_{H_j}\circ f\circ g_j(x)=p_{H_j}\circ f\circ g(x)=$ $p_{H_j}(f\circ g)(x)=p_{H_j}(x)=x$. Тобто відображення l_j є правим оберненим до відображення f_j.

Достатність. Нехай $\{f_i\colon G_i\to H_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів паратопологічних груп, які мають праві обернені, $\{g_i\colon H_i\to G_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів, обернених до f_i. Приймемо $f=\prod^*_{i\in I} f_i$, $g=\prod^*_{i\in I} g_i$. Тоді

$$f\circ g=(\prod_{i\in I}^* f_i)\circ(\prod_{i\in I}^* g_i)=\prod_{i\in I}^*(f_i\circ g_i)=\prod_{i\in I}^*(1_{H_i})=1_{\prod^*_{i\in I} H_i}.$$

Отже, гомоморфізм $f=\prod^*_{i\in I} f_i$ має правий обернений. ■

Твердження 3.3. Нехай $\{G_i : i\in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, $f_i\colon G_i\to G$ — сім'я неперервних гомоморфізмів, $f\colon \prod^*_{i\in I} G_i\to G$ — гомоморфізм, що продовжує відображення f_i. Нехай також існує $j\in I$ таке, що гомоморфізм f_j має правий обернений. Тоді гомоморфізм f має правий обернений.

□ *Доведення.* Нехай гомоморфізм $f_j\colon G_j\to G$, де $j\in I$ має правий обернений $g\colon G\to G_j$, тобто $f_j\circ g=1_G$. Нехай $e_j\colon G_j\to\prod^*_{i\in I} G_i$ — гомоморфне вкладення паратопологічних груп. Приймемо $h=e_j\circ g$. Нехай $x\in G_j$, тоді $f\circ h(x)=f\circ e_j\circ g(x)=f_j\circ e_j\circ g(x)=$ $=f_j\circ g(x)=x$. Тобто, гомоморфізм h є правим оберненим до гомоморфізму f. ■

Означення 3.2. Скажемо, що гомоморфізм $f\colon G\to H$ має лівий обернений, якщо існує гомоморфізм $g\colon H\to G$ такий, що композиція $g\circ f$ є тотожним гомоморфізмом на G.

Твердження 3.4. Вільний добуток $f=\prod^*_{i\in I} f_i$ сім'ї неперервних гомоморфізмів $\{f_i\colon G_i\to H_i : i{\in}I\}$ має лівий обернений тоді і тільки тоді, коли усі співмножники f_i мають ліві обернені.

□ *Доведення.* Необхідність. Нехай $\{f_i\colon G_i\to H_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів таких, що гомоморфізм $f=\prod^*_{i\in I} f_i$ має лівий обернений гомоморфізм. Нехай $g\colon \prod^*_{i\in I} H_i\to\prod^*_{i\in I} G_i$ — гомоморфізм, такий, що $g\circ f=1_{\prod^*_{i\in I} G_i}$.

Приймемо $l_i=p_{G_i}\circ g$.

$$\begin{array}{ccccc}
\prod^*_{i\in I} G_i & \xrightarrow{\prod^*_{i\in I} f_i} & \prod^*_{i\in I} H_i & \xrightarrow{g} & \prod^*_{i\in I} G_i\\
p_{G_j}\downarrow & & \downarrow p_{H_j} & & \downarrow p_{G_j}\\
G_j & \xrightarrow{l_j} & H_j & \xrightarrow{f_j} & G_j
\end{array}$$

Нехай $x\in G_j$. Тоді $l_j\circ f_j(x)=p_{G_j}\circ g\circ f_j(x)=p_{G_j}\circ g\circ f(x)=p_{G_j}\circ(g\circ f)(x)=p_{G_j}(x)=x$. Тобто відображення l_j є лівим оберненим до відображення f_j.

Достатність. Нехай $\{f_i\colon G_i\to H_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів паратопологічних груп, які мають ліві обернені, $\{g_i\colon H_i\to G_i : i\in I\}$ — сім'я гомоморфізмів обернених до f_i. Приймемо $f=\prod^*_{i\in I} f_i$, $g=\prod^*_{i\in I} g_i$. Тоді

$$g\circ f=(\prod_{i\in I}^* g_i)\circ(\prod_{i\in I}^* f_i)=\prod_{i\in I}^*(g_i\circ f_i)=\prod_{i\in I}^*(1_{G_i})=1_{\prod^*_{i\in I} G_i}.$$

Отже, гомоморфізм $f=\prod^*_{i\in I} f_i$ має лівий обернений. ■

Нагадаємо, що відображення $f\colon X\to Y$ називається *скінченним (компактним, псевдокомпактним)*, якщо для кожної точки $y\in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ є скінченна (компактна, псевдокомпактна) підмножина. Замкнене компактне відображення називається *досконалим.*

Відображення $f\colon X\to Y$ називається *монотонним (легким, нульвимірним)* [8, стор. 526, 538], якщо для кожної точки $y\in Y$ прообраз $f^{-1}(y)$ є зв'язним (спадково незв'язним, нульвимірним). Для відображення f означимо розмірність цього відображення, а саме, скажемо, що $\dim(f)\le n$ якщо $\dim(f^{-1}(y))\le n$ для кожного $y\in Y$. Аналогічно означимо потужність відображення f, вказавши, що $\mathrm{card}(f)\le n$, якщо $\mathrm{card}(f^{-1}(y))\le n$ для кожного $y\in Y$. В силу однорідності паратопологічних груп всі вищеперелічені властивості для гомоморфізму $f\colon G\to H$ паратопологічних груп G і H визначаються відповідними характеристиками простору $kerf$. Зокрема гомоморфізм паратопологічних груп $f\colon G \to H$ є монотонним відображенням тоді і тільки тоді, коли множина $kerf$ є зв'язною.

У наступному прикладі ми встановлюємо перелік властивостей паратопологічних груп, що не зберігаються конструкцією вільного добутку.

Приклад. Нехай $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — тотожній автоморфізм адитивної групи цілих чисел зі стандарною топологією у себе, $g\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_1$ — гомоморфізм дискретної топологічної групи $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ в одноточкову топологічну групу $\mathbb{Z}_1$. Тоді обидва гомоморфізми є досконалими, відкрито-замкненими, легкими нульвимірними відображеннями потужності ≤ 2.

Покажемо, що відображення $f * g$ не є замкненим і не є компактним. Для натурального n розглянемо елемент $x_n = \frac{1}{n^2}\cdot\overline{1}\cdot\frac{1}{n^2}\cdots\overline{1}\cdot\frac{1}{n^2} \in \mathbb{R}*\mathbb{Z}_2$, де елемент $\frac{1}{n^2}$ входить n разів. Тоді $f*g(x_n) = n\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$. Розглянемо множину $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Приймемо $G = \mathbb{R}*\mathbb{Z}_2$ і для натурального m позначимо через $G_{(m)}$ множину елементів з G довжина яких у нескоротній формі не перевищує G. Оскільки групи $\mathbb{R}$ і $\mathbb{Z}_2$ є k_ω-просторами, то група G має топологію індуктивної границі відносно послідовності $\{G_{(m)} : m \in \mathbb{N}\}$ [13]. Оскільки для кожного $m \in \mathbb{N}$ перетин $X \cap G_{(m)}$ є скінченним, а отже, і замкненим у $G_{(m)}$, то множина X є замкненою у G. Образом множини X при відображенні $f * g$ є множина $\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$, яка є не замкненою у $\mathbb{R}$. Отже, відображення $f * g$ не є замкненим.

Нехай $I = [0,1]$ — одиничний відрізок, $I^n = I \times I \times \cdots \times I$. Покажемо, що ядро гомоморфізму $f*g$ містить замкнену копію n-вимірного куба, тобто не є легким чи скінченновимірним. Дійсно розглянемо відображення $t\colon I^n \to \ker(f*g) \subset \mathbb{R} * Z_2$ означене формулою

$$t(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\cdot\overline{1}\cdot x_2\cdot\overline{1}\cdot\cdots\cdot\overline{1}\cdot x_n\cdot\overline{1}\cdot(-x_1-x_2-\cdots-x_n).$$

Відображення t неперервно і бієктивно відображає компакт I^n на гаусдорфовий простір $t(I^n)$, а отже, є гомеоморфізмом просторів I^n і $t(I^n)$. Отже, простір $t(I^n)$ є замкненою гомеоморфною копією n-вимірного куба в $\ker(f*g) \subset \mathbb{R} * Z_2$, а тому відображення $f * g$ не є скінченновимірним.

У роботі [13] було побудовано приклад двох гомоморфізмів, які є локальними гомеоморфізмами, вільний добуток яких не є локальним гомеоморфізмом.

Теорема 3.1. *Вільний добуток $f = \prod_{i\in I}^* f_i$ сім'ї неперервних гомоморфізмів $\{f_i\colon G_i \to H_i : i \in I\}$ є монотонним відображенням тоді і тільки тоді, коли усі співмножники f_i є монотонними відображеннями.*

$\square$ *Доведення.* Необхідність. Нехай $\{f_i\colon G_i \to H_i : i \in I\}$ — сім'я гомоморфізмів таких, що гомоморфізм $f = \prod_{i\in I}^* f_i$ є монотонним відображенням. Тоді множина $kerf$ є зв'язною. За лемою 2.2 $p_{G_i}(kerf) = kerf_i$ для всіх $i \in I$. Множина $kerf_i$ є зв'язною, як образ зв'язної множини $kerf$ при неперервному відображенні p_{G_i}. Тобто гомоморфізми f_i є монотонними відображеннями.

Достатність. Нехай $\{f_i\colon G_i \to H_i : i \in I\}$ — сім'я гомоморфізмів паратопологічних груп, які є монотонними відображеннями. За наслідком 6.1.13 з [8], щоб довести зв'язність множини $kerf$, нам достатньо показати, що для довільного $g = a_1a_2...a_n \in kerf$ існує зв'язна множина в $\prod_{i\in I}^* G_i$, що містить одиницю групи $\prod_{i\in I}^* G_i$ і елемент g. За лемою 2.3 існує представлення $e = a_1a_2...a_n$ одиниці групи $\prod_{i\in I}^* G_i$ таке, що $f_{i_k}(a_{i_k}) = f_{i_k}(b_{i_k})$ для всіх $k = 1,..,n$, якщо $a_k \in G_{i_k}$.

Тоді множина $F_1 = U_1a_2...a_n$, де $U_1 = f_{i_1}^{-1}(f_{i_1}(a_1))$ є зв'язною, оскільки вона є зсувом множини U_1, а простір паратопологічної групи є однорідним і містить елементи $g = a_1a_2...a_n$ та $g_1 = b_1a_2...a_n$. Множина $F_2 = b_1U_2a_3...a_n$ є зв'язною та містить елементи $g_1 = b_1a_2...a_n$ і $g_2 = b_1b_2a_3...a_n$. Повторивши ці міркування n разів, отримаємо послідовність зв'язних множин F_1, F_2, F_{n-1}, причому $g_i \in F_i \cap F_{i+1}$, тобто $F_i \cap F_{i+1} \neq \emptyset$. Тому за теоремою 6.1.9 з [8] множина $F = \bigcup_{i=1}^{n-1} F_i$ є зв'язною, причому $a \in F_1 \subseteq F$ і $e \in F_{n-1} \subseteq F$.

Отже, множина $kerf$ є зв'язною, а значить гомоморфізм $f = \prod_{i\in I}^* f_i$ є монотонним відображенням. $\blacksquare$

Нехай G — паратопологічна група. Скажемо, що гомоморфізм $f\colon H_1 \to H_2$ паратопологічних груп H_1 і H_2 є G-гомоморфізмом, якщо для довільного гомоморфізму $p\colon H_2 \to G$ з неперервності композиції $p \circ f$ випливає неперервність гомоморфізму p. У роботі [6] було встановлено, що для довільної паратопологічної групи G вільний добуток сім'ї неперервних G-гомоморфізмів єG-гомоморфізмом.

Твердження 3.5. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, $\{f_i\colon G_i \to H\}$ — сім'я неперервних гомоморфізмів, $f\colon \prod_{i\in I}^* G_i \to H$ — гомоморфізм, що продовжує гомоморфізми f_i, G — паратопологічна група. Нехай також існує $j \in I$ таке, що гомоморфізм відображення f_j є G-гомоморфізмом. Тоді гомоморфізм f є G-гомоморфізмом.

У роботі [5] було встановлено, що вільний добуток сім'ї відкритих гомоморфізмів є відкритим гомоморфізмом.

Твердження 3.6. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, $\{f_i\colon G_i \to G\}$ — сім'я неперервних гомоморфізмів, $f\colon \prod_{i\in I}^* G_i \to G$ — гомоморфізм, що продовжує гомоморфізми f_i. Нехай також існує $j \in I$ таке, що відображення f_j є відкритим. Тоді відображення f є відкритим.
Доведення цього твердження випливає з наступної леми, яка доводиться аналогічно до леми 2.11 з [10].

Лема 3.1. *Нехай $f\colon G \to H$ — неперервний гомоморфізм з паратопологічної G групи у паратопологічну групу H. Якщо існує підмножина $S \subseteq G$ та-*

ка, що звуження $f|_S$ є відкритим відображенням, то гомоморфізм f є відкритим відображенням.

У роботі [14] було запропоновано модифікацію означення вільної топологічної групи.

Означення 3.3. Вільна топологічна група простору X — це є пара, що складається з топологічної групи $F(X)$ та неперервного відображення η_X таких, що для довільного неперервного відображення $f\colon X \to G$ з топологічного простору X у топологічну групу G існує неперервний гомоморфізм $\tilde{f}$ такий, що $\tilde{f} \circ \eta_X = f$.

Для кожного топологічного простору X вільна топологічна група у сенсі означення 3.3 існує, причому відображення η_X є ін'єктивним як тільки простір X є функціонально гаусдорфовим і замкненим вкладенням як тільки простір X є тихоновським.

Узагальнимо теорему 2.9 з роботи Морріса [11]. Для цього нам потрібне буде наступне допоміжне твердження.

Твердження 3.7. Нехай $(F(X), \eta_X)$ — вільна топологічна група топологічного простору X, Y — ретракт простору X, F_Y — підгрупа топологічної групи породжена множиною Y. Тоді $(F_Y, \eta_X|_Y)$ є вільною топологічною групою простору Y.

□ *Доведення.* Нехай $r\colon X \to Y$ — ретракція, $f\colon F_Y \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору Y у топологічну групу G. Тоді $f \circ r$ є неперервним відображенням з топологічного простору Y у топологічну групу G. А тому існує гомоморфізм $H\colon F(X) \to G$ з групи $F(X)$ у G такий, що $H \circ \eta_X = f$. Розглянемо звуження $\tilde{f} = H|_{F_Y}$. Тоді $\tilde{f} \circ \eta_X|_Y = f$. Отже, пара $(F_Y, \eta_X|_Y)$ задовольняє означення вільної топологічної групи простору Y. За єдиністю вільної топологічної групи отримаємо, що пара $(F_Y, \eta_X|_Y)$ є вільною топологічною групою простору Y. ■

Твердження 3.8. Нехай $\{X_i : i \in I\}$ — сім'я топологічних просторів, $F(X_i)$ — вільна топологічна група простору X_i. Тоді вільний топологічний добуток $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(X_i)$ є топологічно ізоморфний вільній топологічній групі $F(\bigoplus\limits_{i\in I} X_i)$.

□ *Доведення.* Нехай $(F(X_i), \eta_i)$ — вільна топологічна група простору X_i де $i \in I$. Покажемо, що для вільного топологічного добутку $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(X_i)$ виконуються умови означення вільної топологічної групи для простору $X = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$. Дійсно, розглянемо відображення $\eta\colon X \to \prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(X_i)$, означене як $\eta|_{X_i} = \eta_i$. Відображення η є неперервним в силу неперервності відображень η_i. Нехай $f\colon X \to G$ — неперервне відображення з топологічного простору X у топологічну групу G. Тоді $f_i = f|_{X_i}$ — неперервне відображення з топологічного простору X_i у G. За означенням вільної топологічної групи $F(X_i)$ існує неперервний гомоморфізм $\tilde{f}_i\colon F(X_i) \to G$ такий, що $\tilde{f}_i \circ \eta_i = f_i$. За означенням вільного добутку, гомоморфізм $\tilde{f}\colon \prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(X_i) \to G$, що продовжує гомоморфізми f_i є неперервним. Нехай $x \in \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, тоді існує $j \in I$ таке, що $x \in X_j$. Тоді $\tilde{f} \circ \eta(x) = \tilde{f} \circ \eta_j(x) = \tilde{f}_j \circ \eta_j(x) = f_j(x) = f(x)$. Тобто, $\tilde{f} \circ \eta = f$. Оскільки значення гомоморфізму $\tilde{f}$ повністю визначаються його значеннями на підмножині $\eta(X) = \bigoplus\limits_{i\in I} \eta_i(X_i)$, то єдиність гомоморфізму $\tilde{f}$ випливає з єдиності гомоморфних продовжень $\tilde{f}_i$. Оскільки пара $(\prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(X_i), \eta)$ задовольняє всі умови з означення III. вільної топологічної групи простору $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, то за єдиністю вільної топологічної групи, можемо стверджувати, що $\prod\limits_{i\in I}{}^{*}F(X_i)$ — вільна топологічна група простору $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$. ■

Зауваження. Ми можемо отримувати також нові властивості, що зберігаються конструкцією вільного добутку, враховуючи уже встановлений перелік цих властивостей. Нехай $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ — сім'я тополого-алгебраїчних властивостей гомоморфізмів паратопологічних груп, що зберігаються конструкцією вільного добутку. Розглянемо нову тополого-алгебраїчну властивість гомоморфізмів паратопологічних груп, яка полягає у можливості представити цей гомоморфізм у вигляді композиції $\phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_n$, де кожне ϕ_i повинно мати певну фіксовану властивість з набору $\{\Gamma_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$. Наприклад, скажемо, що гомоморфізм паратопологічних груп є rl-гомоморфізмом, якщо його можна представити у вигляді композиції двох гомоморфізмів, перший з яких має правий обернений, а другий — лівий обереневий. З тверджень 3.2 і 3.4 випливає, що властивість бути rl-гомоморфізмом зберігається конструкцією вільного добутку.

Питання. Нехай $\{f_i\colon G_i \to H_i : i \in I\}$, — сім'я вкладень паратопологічних груп. Чи є їхній вільний добуток $f = \prod\limits_{i\in I}{}^{*}f_i$ також вкладенням?

IV. Про деякі властивості вільних добутків паратопологічних груп

Скажемо, що паратопологічна група G є τ-збалансованою (англ. τ-steady), (див. [15]), якщо довільний гомоморфний образ H групи G, для якого $\psi(H) \le \tau$ задовольняє умову $nw(H) \le \tau$.

Твердження 4.1. Вільний добуток сім'ї паратопологічних груп $\{G_i : i \in I\}$, де $|I| \le \tau$, є τ-збалансованою паратопологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є τ-збалансованими паратопологічними групами.

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що підгрупа τ-збалансованої групи є τ-збалансованою групою.

Достатність. Нехай $\{G_i : i \in I\}$, $|I| \le \tau$ — сім'я τ-збалансованих паратопологічних груп. Нехай

H — гомоморфний образ групи $\prod^*_{i\in I} G_i$ такий, що $\psi(H) \le \tau$, а $f\colon \prod^*_{i\in I} G_i \to H$ — відповідний гомоморфізм, $H_i = f(G_i)$. Тоді $\psi(H_i) \le \tau$. Оскільки група G_i є τ-збалансованою, то $nw(H_i) \le \tau$. Позначимо через $H_0 = \bigcup_{i\in I} H_i$ — об'єднання множин H_i у H. Тоді $nw(H_0) \le \tau$. Група H алгебраїчно породжується своєю симетричною підмножиною H_0, звідки отримаємо (див. [3]), що $nw(H) = nw(H_0) \le \tau$. ■

Скажемо, що паратопологічна група G є збалансованою (англ. steady), якщо вона є τ-збалансованою для довільного нескінченного кардиналу τ.

Твердження 4.2. Вільний добуток зліченної сім'ї паратопологічних груп є збалансованою паратопологічною групою тоді і тільки тоді, коли усі співмножники є збалансованими паратопологічними групами.

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що підгрупа збалансованої групи є збалансованою групою. Достатність випливає з твердження 4.1. ■

Нехай (G, τ) — паратопологічна група. Розглянемо на групі G топологію $\tau^{-1} = \{U : U^{-1} \in \tau\}$. Тоді пара (G, τ^{-1}) є також паратопологічною групою. Позначимо цю групу скорочено через $\overleftarrow{G}$. Якщо H — підгрупа топологічної групи G, то топологія групи $\overleftarrow{H}$ співпадає з топологією підгрупи $\overleftarrow{G}$. Якщо $f\colon (G, \tau) \to (H, \theta)$ — неперервний гомоморфізм паратопологічних груп, то гомоморфізм $\overleftarrow{f} : (G, \tau^{-1}) \to (H, \theta^{-1})$ буде також неперервним.

Твердження 4.3. Нехай $\{G_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп. Тоді паратопологічні групи $\overleftarrow{\prod^*_{i\in I} G_i}$ і $\prod^*_{i\in I} \overleftarrow{G_i}$ є топологічно ізоморфними.

□ *Доведення.* Гомоморфні вкладення $h_i\colon \overleftarrow{G_i} \to \overleftarrow{G_i} \subseteq \overleftarrow{\prod^*_{i\in I} G_i}$ за означенням вільного добутку продовжуються до неперервного ізоморфізму $h\colon \prod^*_{i\in I} \overleftarrow{G_i} \to \overleftarrow{\prod^*_{i\in I} G_i}$. Щоб довести твердження нам залишається показати неперервність ізоморфізму, оберненого до h. Гомоморфні вкладення $f_i\colon G_i \to G_i \subseteq \overleftarrow{\prod^*_{i\in I} \overleftarrow{G_i}}$ за означенням вільного добутку продовжуються до неперервного гомоморфізму $f\colon \prod^*_{i\in I} G_i \to \overleftarrow{\prod^*_{i\in I} \overleftarrow{G_i}}$. Отже, гомоморфізм $\overleftarrow{f} : \overleftarrow{\prod^*_{i\in I} G_i} \to \prod^*_{i\in I} \overleftarrow{G_i}$ є також неперервним. ■

Нехай (X, τ) — топологічний простір, λ — нескінченний кардинал. На множині X означимо топологію τ_λ, базу якої утворюють множини вигляду $\bigcap_{i\in I} U_i$, де $U_i \in \tau$, $|I| \le \lambda$. Якщо (G, τ) — (пара)топологічна група, то пара (G, τ_λ) є також (пара)топологічною групою (див. [15]). Топологічний простір (X, τ) називається P_λ-простором, якщо $\tau = \tau_\lambda$, або інакше кажучи, якщо для довільної сім'ї відкритих множин $\{U_i : i \in I\}$ такої, що $|I| \le \lambda$ множина $\bigcap_{i\in I} U_i$ є відкритою.

Твердження 4.4. Нехай λ — нескінченний кардинал. Вільний добуток $\prod^*_{i\in I} G_i$ сім'ї паратопологічних груп є P_λ-простором тоді і тільки тоді, коли усі співмножники G_i є P_λ-просторами.

□ *Доведення.* Необхідність випливає з того, що підпростір P_λ-простору є P_λ-простором.

Достатність. Нехай $\{U_i : i \in I\}$ — сім'я паратопологічних груп, що є P_λ-просторами, $\prod^*_{i\in I} G_i$ — їхній вільний добуток. Тоді пара $(\prod^*_{i\in I} G_i, \tau_\lambda)$ є паратопологічною групою, яка індукує на групах G_i їхні вихідні топології, причому $\tau \subseteq \tau_\lambda$. Оскільки топологія вільного добутку — це найсильніша напівгрупова топологія, що індукує на співмножниках вихідні топології , то $\tau = \tau_\lambda$, а отже, топологічний простір $(\prod^*_{i\in I} G_i, \tau)$ є P_λ-простором. ■

Література

[1] Граев М.И. О свободных произведениях топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. матем., 14, 1950 – С. 343-350.

[2] Марков А.А. О свободных топологических группах // Известия АН СССР, Сер. мат. – 1945. – Т.9, № 1. – С. 3–64.

[3] Пирч Н.М. Вільні паратопрлогічні групи та вільні добутки паратопологічних груп // Мат. методи та фіз.-мех. поля – **52**, 2011, № 4. – P. 58–63.

[4] Пирч Н.М. Вільні добутки паратопологічних груп // Математичні студії – 2010 – т.33 № 2. – С. 139–146.

[5] Пирч Н.М. Про вільні добутки паратопологічних груп // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". – 2011 – **696**. – P. 20–25.

[6] Пирч Н.М. G-факторні відображення та гомоморфізми паратопологічних груп // Мат. методи та фізико-механічні поля – 2011 – **54**, № 3, – P.41–48.

[7] Пирч Н.М. Гомоморфізми вільних добутків паратопологічних груп // IV конференція молодих учених із сучасних проблем математики і механіки ім. Я. С. Підстригача. – Львів. – 2011. – С. 243–244.

[8] Энгелькинг Р. Общая топология. – М.: Мир, 1986, – 751 с.

[9] Arhangel'skii A.V., Tkachenko M.G., Topological Groups and Related Structures // Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2008, 781 p.

[10] Morris S.A. Varieties of topological groups // Bull. Austral. Math. Soc. – **1**, 1969, – P. 145–166.

[11] Morris S.A. Free products of topological groups // Bull. Austral. Math. Soc. – **4**, 1971, – P. 17–29. Corrigendum. Bull. Austral. Math. Soc. **12** 1975, – P. 480.

[12] Morris S.A., Ordman E. T. and Thompson H.B. The topology of free products of topological groups // Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra, 1973, Springer Lecture Notes 372, P. 220-227.

[13] Ordman E. T. Free products of topological groups which are k_ω -spaces // Transactions of the Amer. Math. Soc., **191**, 1974, 61–73.

[14] Smith Thomas B.V. Free topological groups // Gen. Top. and Appl. – **4**, 1974, – P. 51–72.

[15] Tkachenko M.G. Cellularity and the index of narrowness in topological groups // Comment. Math. Univ. Carolin. – **52**, 2 2011, – P. 309–315.

СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПАРАТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП И ИХ ГОМОМОРФИЗМЫ

Пырч Н.М.

Украинская академия печати
ул. Пидголоско, 19, 79020, Львов, Украина

Исследуются топологические и тополого-алгебраические свойства гомоморфизмов паратопологических групп сохраняемые конструкцией свободного произведения.

Ключевые слова: свободная паратопологическая группа, свободное произведение паратопологических групп, гомоморфизм паратопологических групп.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.546

FREE PRODUCTS OF PARATOPOLOGICAL GROUPS AND THEIRHOMOMORPHISMS

Pyrch N. M.

Academy druk of Ukraine
19 Pidgolosko Str., 79020, Lviv, Ukraine

We investigate topological and algebraically-topological properties of the homomorphisms of paratopological groups being preserved by construction of the free product

Key words: free paratopological group, free product of paratopological groups, homomorphisms of paratopological groups.

2000 MSC: 22A05

УДК: 512.546