ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 34–39

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 34–39

ІНТЕГРАЛЬНІ НЕРІВНОСТІ В ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ З ІМПУЛЬСНИМ ЗБУРЕННЯМ

Массалітіна Є. В.[a], Кільчинський О. О.[b]

[a] *Національний технічний університет України "КПІ"*
пр-т Перемоги 37, 03056, Київ, Україна
[b] *Державний економіко-технологічний університет транспорту*
вул. Лукашевіча 19, 03049, Київ, Україна

(Отримано 3 вересня 2013 р.)

Знайдена інтегральна оцінка для функції двох змінних, що задовольняє рівняння гіперболічного типу та отримує імпульсні збурення як дискретного, так і неперервного характеру на заданих кривих.

Ключові слова: інтегральні нерівності, рівняння гіперболічного типу, імпульсні збурення.

Ключові слова: інтегральні нерівності, рівняння гіперболічного типу, імпульсні збурення.

2000 MSC: 34A37, 35L70, 58J45

УДК: 517.9

I. Постановка задачі

Інтегральні нерівності часто використовують під час вивчення широкого кола питань, пов'язаних із дослідженням поведінки розв'язків диференціальних, інтегро-диференціальних, інтегральних рівнянь, а також рівнянь в частинних похідних [1–3]. У статті наведені результати, що узагальнюють оцінку, отриману в роботі [4] для функції двох змінних, яка задовольняє рівняння в частинних похідних другого порядку гіперболічного типу на випадок розривних фунцій, а також продовжують дослідження, розпочаті в роботах [5, 6].

Розглянемо функцію $v(x,y)$, що задовольняє рівняння гіперболічного типу [7] в деякій області $D^*\subset\mathbb{R}^2$, в припущенні, що вона на заданих кривих

$$L_j=\{(x,y):\ \psi_j(x,y)=0\},\ j=\overline{1,n},$$

отримує імпульсні збурення, які можуть відбуватися як в фіксованих точках на кривій, так і миттєво на всій довжині кривої, тобто можуть мати як дискретний, так і неперервний характер. Область $D^*=D\cup L$, де

$$L=\bigcup_{j=1}^{n}L_j,\ L_i\cap L_j=\emptyset,\ i\neq j,\ \ D=\bigcup_{j=1}^{n}D_j,$$

$$D_1=\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ \psi_1(x,y)<0\},$$

$$D_j=\{(x,y):\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ \psi_{j-1}(x,y)>0,\ \psi_j(x,y)<0\},\quad j=\overline{2,n};$$

Нехай еволюція цього процесу описується рівнянням гіперболічного типу з імпульсним збуренням

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=H^*(x,y,v(x,y)),\\ v(x,y_0)=g_1^*(x),\\ v(x_0,y)=g_2^*(y),\end{array}\right.\qquad \forall(x,y)\notin L_j\ ,\qquad (1)$$

$$\triangle v(x,y)\Big|_{(x,y)\in L_j}=\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j^*(M)\,v(M)\,d\mu_{\psi_j},\qquad (2)$$

де інтеграл Лебега-Стілтьєса (2) описує умову стрибка функції $v(x,y)$ на кривих L_j, функції $\omega_j^*(x,y)$, $j=\overline{1,n}$, $H^*(x,y,v(x,y))$ неперервні в області D^*, область

$$G_j=\{(s,t):\ (x,y)\in D_j,$$
$$(x_0,y_0)\in D_1,\ x_0\leq s\leq x,\ y_0\leq t\leq y\},\ j=\overline{1,n},$$

функції $g_1^*(x)$, $g_2^*(y)$ є диференційовними та задовольняють умову узгодженості

$$g_1^*(x_0)=g_2^*(y_0),\qquad (3)$$

причому $v(x_0,y_0)\neq 0$.

II. Оцінка функції, що задовольняє рівняння гіперболічного типу з імпульсним збуренням

Теорема 1. *Нехай в області $D^*\subset\mathbb{R}^2, D^*=D\cup L$ виконуються умови:*

1. *Невід'ємна функція $u(x,y)$ є неперервною в області D;*
2. *$L=\bigcup\limits_{j=1}^{n}L_j$, де $L_j=\{(x,y):\psi_j(x,y)=0\}$ – сукупність кривих, на яких функція $u(x,y)$ має скінченний стрибок, $L_i\cap L_j=\emptyset,\ i\neq j$;*
3. *Криві $\psi_j(x,y)$ є неперервно диференційовними та монотонно спадними, $grad\,\psi_j(x,y)>0$;*

4. μ_{ψ_j} – *міра Лебега-Стілтьєса [8], яка зосереджена на кривій* L_j*;*

5. *Функція* $H(x,y,u(x,y))$ – *неперервна та невід'ємна відносно своїх змінних,* $H(x,y,u(x,y)) \le \le f(x,y)\,h(u)$*;*

6. *Функції* $\omega_j(x,y)$, $j=\overline{1,n}$, $f(x,y)$ – *неперервні та невід'ємні в області* D^**;*

7. *Функція* $h(u)$ – *неперервна, додатна та неспадна відносно змінної* u*, задовольняє умову* $h(vw) \le h(v)\,h(w)$*;*

8. *Функції* $g_1(x)$, $g_2(y)$ *є додатними, диференційовними та задовольняють умову узгодженості* $g_1(x_0) = g_2(y_0)$*;*

9. $\frac{dg_1(x)}{dx} \ge 0$, $\frac{dg_2(y)}{dy} \ge 0$;

10. *Функція* $u(x,y)$ *задовольняє в області* D^* *інтегральну нерівність*

$$u(x,y) \le g_1(x)+g_2(y)+\iint\limits_{G_n} H(s,t,u(s,t))\,dsdt+$$
$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j(M)\,u(M)\,d\mu_{\psi_j}, \qquad (4)$$

де $M(\xi,\eta)$ – *змінна точка кривої* L_j.

Тоді для $(x,y) \in \widetilde{D_i}$, $i=\overline{2,n}$*, справджуються оцінки:*

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)\times$$
$$\times\Psi^{-1}\left\{\int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)}\frac{ds}{h(s)}+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{g\prime_2(t)\,dt}{h(g_1(x_0)+g_2(t))}+\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{G_i} f(s,t)\,h\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)\right)dsdt\right\} \qquad (5)$$

або

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)\times$$
$$\times\Psi^{-1}\left\{\int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)}\frac{dt}{h(t)}+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{g\prime_1(s)\,ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))}+\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{G_i} f(s,t)\,h\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)\right)dsdt\right\}, \qquad (6)$$

де Ψ^{-1} – *функція, обернена до функції*

$$\Psi(v)=\int\limits_{v_0}^{v}\frac{ds}{h(s)},\ 0<v_0\le v, \qquad (7)$$

а область $\widetilde{D_i}$, $i=\overline{2,n}$*, визначається відповідно з таких співвідношень:*

$$\widetilde{D_i}=\left\{(x,y)\in D_i:\int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)}\frac{ds}{h(s)}+\int\limits_{y_0}^{y}\frac{g\prime_2(t)\,dt}{h(g_1(x_0)+g_2(t))}+\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{G_i} f(s,t)\,h\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)\right)dsdt\in Dom\left(\Psi^{-1}\right)\right\}$$

або

$$\widetilde{D_i}=\left\{(x,y)\in D_i:\int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)}\frac{dt}{h(t)}+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{g\prime_1(s)\,ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))}+\right.$$
$$\left.+\iint\limits_{G_i} f(s,t)\,h\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}\right)\right)dsdt\in Dom\left(\Psi^{-1}\right)\right\}.$$

☐ *Доведення.* Для доведення використаємо метод математичної індукції. Нехай $(x,y)\in D_1$. Враховуючи умову 5 теореми 1, можна записати

$$u(x,y)\le g_1(x)+g_2(y)+\iint\limits_{G_1}H(s,t,u(s,t))\,dsdt\le g_1(x)+g_2(y)+\iint\limits_{G_1}f(s,t)\,h(u(s,t))\,dsdt. \qquad (8)$$

Позначимо праву частину нерівності (8)

$$\Phi_u(x,y) = g_1(x) + g_2(y) + \int\limits_{y_0}^{y}\int\limits_{x_0}^{x} f(s,t)\, h(u(s,t))\, dsdt. \quad (9)$$

Оскільки функція $u(x,y)$ в області D_1 не зазнає імпульсного впливу, то за теоремою 1.5.2, с. 55 [1] для нерівності (8) буде правильною оцінка

$$u(x,y) \le \Psi^{-1}\left\{ \int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)} \frac{ds}{h(s)} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{g'_2(t)\, dt}{h(g_1(x_0)+g_2(t))} + \iint\limits_{G_1} f(s,t)\, dsdt \right\} \quad (10)$$

або

$$u(x,y) \le \Psi^{-1}\left\{ \int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)} \frac{dt}{h(t)} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g'_1(s)\, ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))} + \iint\limits_{G_1} f(s,t)\, dsdt \right\}, \quad (11)$$

за умови, що

$$\int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)} \frac{ds}{h(s)} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{g'_2(t)\, dt}{h(g_1(x_0)+g_2(t))} +$$

$$+ \iint\limits_{G_1} f(s,t)\, dsdt \in Dom\left(\Psi^{-1}\right)$$

або

$$\int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)} \frac{dt}{h(t)} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g'_1(s)\, ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))} +$$

$$+ \iint\limits_{G_1} f(s,t)\, dsdt \in Dom\left(\Psi^{-1}\right).$$

Розглянемо область D_2. Для $(x,y) \in D_2$ маємо

$$u(x,y) \le \Phi_u(x,y) + \int\limits_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M)\, u(M)\, d\mu_{\psi_1}. \quad (12)$$

Позначимо праву частину нерівності (12)

$$\Phi_{1u}(x,y) = \Phi_u(x,y) + \int\limits_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M)\, u(M)\, d\mu_{\psi_1}.$$

Враховуючи нерівність (8) та те, що функція $\Phi_u(x,y)$ є неспадною за кожною змінною, тобто

$$\frac{\partial \Phi_u(x,y)}{\partial x} \ge 0, \quad \frac{\partial \Phi_u(x,y)}{\partial y} \ge 0,$$

$\forall\, M(\xi,\eta) \in L_1$ можемо записати

$$u(M) \le \Phi_u(M) \le \Phi_u(x,y). \quad (13)$$

З нерівностей (12) та (13) випливає

$$\Phi_{1u}(x,y) \le \left(1 + \int\limits_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M)\, d\mu_{\psi_1}\right) \Phi_u(x,y).$$

Тоді нерівність (12) набуде вигляду

$$u(x,y) \le \gamma_1(x,y)\, \Phi_u(x,y),$$

де позначено

$$\gamma_1(x,y) = 1 + \int\limits_{L_1 \cap G_2} \omega_1(M)\, d\mu_{\psi_1}.$$

Тоді

$$u(x,y) \le$$

$$\le \gamma_1(x,y) \left(g_1(x) + g_2(y) + \iint\limits_{G_2} f(s,t)\, h(u(s,t))\, dsdt \right),$$

$$\frac{u(x,y)}{\gamma_1(x,y)} \le g_1(x) + g_2(y) +$$

$$+ \iint\limits_{G_2} f(s,t)\, h\left(\frac{u(s,t)}{\gamma_1(s,t)} \gamma_1(s,t) \right) dsdt.$$

Скориставшись умовою 8 теореми 1, отримаємо

$$\frac{u(x,y)}{\gamma_1(x,y)} \le g_1(x) + g_2(y) + \iint\limits_{G_2} f_1(s,t)\, h\left(\frac{u(s,t)}{\gamma_1(s,t)} \right) dsdt, \quad (14)$$

де $f_1(s,t) = f(s,t)\, h(\gamma_1(s,t))$. За теоремою 1.5.2, с. 55 [1] для нерівності (14) $\forall (x,y) \in \widetilde{D}_2$ буде правильною оцінка

$$\frac{u(x,y)}{\gamma_1(x,y)} \le \Psi^{-1}\left\{ \int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)} \frac{ds}{h(s)} + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{g'_2(t)\, dt}{h(g_1(x_0)+g_2(t))} + \iint\limits_{G_2} f_1(s,t)\, dsdt \right\} \quad (15)$$

або

$$\frac{u(x,y)}{\gamma_1(x,y)} \le \Psi^{-1}\left\{\int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)} \frac{dt}{h(t)} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g\prime_1(s)\,ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))} + \iint\limits_{G_2} f_1(s,t)\,dsdt\right\}. \tag{16}$$

Припустимо, що нерівність (5)((6)) виконується для $(x,y) \in D_k$. Доведемо, що вона буде правильною і для $(x,y) \in D_{k+1}$. Справді,

$$u(x,y) \le \Phi_u(x,y) + \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M)\,u(M)\,d\mu_{\psi_j} \le$$

$$\le \Phi_{k-1u}(x,y) + \int\limits_{L_k \cap G_{k+1}} \omega_k(M)\,u(M)\,d\mu_{\psi_k} = \Phi_{ku}(x,y). \tag{17}$$

Звідси, враховуючи властивості функції $\Phi_{k-1u}(x,y)$, $\forall\, M(\xi,\eta) \in L_k$ можемо записати

$$u(M) \le \Phi_{k-1u}(M) \le \Phi_{k-1u}(x,y). \tag{18}$$

З нерівностей (17) та (18) випливає

$$\Phi_{ku}(x,y) \le \Phi_{k-1u}(x,y)\,\gamma_k(x,y) \le$$

$$\le \Phi_u(x,y)\,\gamma_k(x,y) \prod_{j=1}^{k-1} \gamma_j(x,y) = \Phi_u(x,y) \prod_{j=1}^{k} \gamma_j(x,y),$$

де позначено

$$\gamma_j(x,y) = 1 + \int\limits_{L_j \cap G_{k+1}} \omega_j(M)\,d\mu_{\psi_j}. \tag{19}$$

Тоді нерівність (18) набуде вигляду

$$u(x,y) \le \Phi_u(x,y) \prod_{j=1}^{k} \gamma_j(x,y)$$

або

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{k} \gamma_k(x,y) \left(g_1(x) + g_2(y) + \iint\limits_{G_{k+1}} f(s,t)\,h(u(s,t))\,dsdt\right),$$

$$\frac{u(x,y)}{\prod\limits_{j=1}^{k} \gamma_j(x,y)} \le \left(g_1(x) + g_2(y) + \iint\limits_{G_{k+1}} f_k(s,t)\,h\left(\frac{u(s,t)}{\prod\limits_{j=1}^{k} \gamma_j(s,t)} \prod \gamma_j(s,t)\right) dsdt\right) \le$$

$$\le \left(g_1(x) + g_2(y) + \iint\limits_{G_{k+1}} f_k(s,t)\,h\left(\frac{u(s,t)}{\prod\limits_{j=1}^{k} \gamma_j(s,t)}\right) dsdt\right), \tag{20}$$

де позначено

$$f_k(s,t) = f(s,t)\,h\left(\prod_{j=1}^{k} \lambda_j(s,t)\right). \tag{21}$$

За теоремою 1.5.2, с. 55 [1] для нерівності (20) $\forall (x,y) \in \widetilde{D}_{k+1}$ буде правильною оцінка

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{k} \gamma_j(x,y)\,\Psi^{-1}\left\{\int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)} \frac{ds}{h(s)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{y_0}^{y} \frac{g\prime_2(t)\,dt}{h(g_1(x_0)+g_2(t))} + \iint\limits_{G_{k+1}} f_k(s,t)\,dsdt\right\}$$

або

$$u(x,y) \le \prod_{j=1}^{k} \gamma_j(x,y)\,\Psi^{-1}\left\{\int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)} \frac{dt}{h(t)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g\prime_1(s)\,ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))} + \iint\limits_{G_{k+1}} f_k(s,t)\,dsdt\right\},$$

де функції $\gamma_j(x,y)$ та $f_k(s,t)$ визначаються за формулами (19), (21), а функція Ψ^{-1} є оберненою до функції (7). Область $\widetilde{D}_{k+1}$ визначається відповідно з таких співвідношень:

$$\widetilde{D}_{k+1} = \left\{(x,y) \in D_{k+1} : \int\limits_{v_0}^{g_1(x)+g_2(y_0)} \frac{ds}{h(s)} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{g\prime_1(s)\,ds}{h(g_1(s)+g_2(y_0))} + \iint\limits_{G_{k+1}} f_k(s,t)\,dsdt \in Dom\left(\Psi^{-1}\right)\right\},$$

або

$$\widetilde{D}_{k+1}=\left\{(x,y)\in D_{k+1}:\int\limits_{v_0}^{g_1(x_0)+g_2(y)}\frac{dt}{h\left(t\right)}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0}^{x}\frac{g\prime_1\left(s\right)ds}{h\left(g_1\left(s\right)+g_2\left(y_0\right)\right)}+\iint\limits_{G_{k+1}}f_k\left(s,t\right)dsdt\in Dom\left(\Psi^{-1}\right)\right\}.$$

Отже, отримано нерівність (5)((6)) для $n=k+1$. Згідно з методом математичної індукції нерівність виконується $\forall\, n\in N$. Теорему доведено.

Для знаходження оцінки розв'язків поставленої задачі (1), (2) з імпульсним збуренням, зробимо деякі припущення. Нехай в області $D^*\subset\mathbb{R}^2$ для неперервних функцій $\omega_j^*\left(x,y\right)$, $j=\overline{1,n}$, $H^*\left(x,y,u\left(x,y\right)\right)$ виконуються такі співвідношення:

$$\left|H^*\left(x,y,v\left(x,y\right)\right)\right|\leq f\left(x,y\right)h\left(\left|v\left(x,y\right)\right|\right),\qquad(22)$$

$$\left|\omega_j^*\left(x,y\right)\right|\leq\omega_j\left(x,y\right),\qquad(23)$$

де функції $\omega_j\left(x,y\right)$, $j=\overline{1,n}$, $f\left(x,y\right)$ – задовольняють умови теореми 1. Приймемо $u\left(x,y\right)=\left|v\left(x,y\right)\right|$ та припустимо

$$\left|g_1^*\left(x\right)-g_1^*\left(x_0\right)\right|\leq g_1\left(x\right),\ \left|g_2^*\left(y\right)\right|\leq g_2\left(y\right),\qquad(24)$$

де функції $g_1\left(x\right)$, $g_2\left(y\right)$ задовольняють умови теореми 1. ■

Наслідок. *Нехай в області D^* виконуються співвідношення (22)–(24) та функція $h\left(\left|v\left(x,y\right)\right|\right)$ задовольняє умову 7 теореми 1. Тоді для розв'язків задачі (1), (2) виконуються оцінки (5)((6)).*

Теорема 2. *Нехай в області D^* виконуються умови 1–7 теореми 1 та функція $u\left(x,y\right)$ задовольняє інтегральну нерівність*

$$\begin{gathered}u\left(x,y\right)\leq g\left(x,y\right)+\iint\limits_{G_n}H\left(s,t,u\left(s,t\right)\right)dsdt+\\+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j\left(M\right)u\left(M\right)d\mu_{\psi_j},\end{gathered}\qquad(25)$$

де $g\left(x,y\right)$ додатна, неспадна функція.
Тоді для $\left(x,y\right)\in D_i^*$, $i=\overline{2,n}$, справджується оцінка

$$u\left(x,y\right)\leq g\left(x,y\right)\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j\left(M\right)d\mu_{\psi_j}\right)\times$$

$$\times\Psi^{-1}\left\{\Psi\left(1\right)+\iint\limits_{G_i}f\left(s,t\right)\frac{h\left(g\left(s,t\right)\right)}{g\left(s,t\right)}h\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j\left(M\right)d\mu_{\psi_j}\right)\right)dsdt\right\},$$

де функція Ψ^{-1} визначається формулою (7), а область D_i^* визначається відповідно зі співвідношення

$$D_i^*=\left\{(x,y)\in D_i:\ \Psi\left(1\right)+\iint\limits_{G_i}f\left(s,t\right)\frac{h\left(g\left(s,t\right)\right)}{g\left(s,t\right)}h\left(\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\int\limits_{L_j\cap G_i}\omega_j\left(M\right)d\mu_{\psi_j}\right)\right)dsdt\in Dom\left(\Psi^{-1}\right)\right\}.$$

□ *Доведення.* Розглянемо нерівність (25). Враховуючи властивості функцій, які входять в цю нерівність, можемо записати

$$\frac{u\left(x,y\right)}{g\left(x,y\right)}\leq1+\iint\limits_{G_n}\frac{f\left(s,t\right)}{g\left(s,t\right)}h\left(\frac{u\left(s,t\right)}{g\left(s,t\right)}g\left(s,t\right)\right)dsdt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j\left(M\right)\frac{u\left(M\right)}{g\left(M\right)}d\mu_{\psi_j}\leq$$

$$\leq1+\iint\limits_{G_n}f\left(s,t\right)\frac{h\left(g\left(s,t\right)\right)}{g\left(s,t\right)}h\left(\frac{u\left(s,t\right)}{g\left(s,t\right)}\right)dsdt+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\int\limits_{L_j\cap G_n}\omega_j\left(M\right)\frac{u\left(M\right)}{g\left(M\right)}d\mu_{\psi_j}.$$

Застосовуючи до цієї нерівності схему доведення теореми 1 та теорему 1.5.1 с. 51 [1], отримаємо потрібний результат. ■

Висновки

Характерною особливістю отриманих результатів є те, що під час знаходження оцінок для розривних функцій двох змінних були застосовані теорія міри та інтеграл Лебега-Стілтьєса. Цей підхід дав змогу об'єднати в одному результаті два випадки:

1. Міра Лебега-Стілтьєса μ_{ψ_j}, яка зосереджена на кривій L_j, дискретна;

2. Міра Лебега-Стілтьєса μ_{ψ_j}, яка зосереджена на кривій L_j, абсолютно неперервна.

Отримані результати можуть бути використані для дослідження властивостей розв'язків рівнянь гіперболічного типу з імпульсним збуренням.

Література

[1] Мартынюк А.А., Гутовски Р. Интегральные неравенства и устойчивость движения. – К.: Наук. думка, 1979. – 249 с.

[2] Мартынюк А.А., Лакшмикантам В., Лила С. Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.

[3] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.

[4] Гутовски Р. Некоторые вопросы устойчивости дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих движение механических систем в теории колебаний // VII Int. Konf. nichtlineare Schwing. – Berlin, 1977. – B. 1. – S. 289–305.

[5] Массалітіна Є.В. Про інтегро-сумарну нерівність Перова для функцій двох змінних // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, №11. – С. 1569–1575.

[6] Массалітіна Є.В. Оцінка функції, яка задовольняє задачі Гурса // Вісник Харківського університету. Серія: Математика, прикладна математика і механіка. – 2005. – №711. – С. 8–16.

[7] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 737 с.

[8] Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. – М.: Наука, 1967. – 220 с.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Массалитина Е. В.[a], Кильчинский О. О.[b]

[a] *Национальный технический университет Украины "КПИ", проспект Победы 37, 03056, Киев, Украина*

[b] *Государственный экономико-технологический университет транспорта, ул. Лукашевича 19, 03049, Киев, Украина*

Найдена интегральная оценка для функции двух переменных, удовлетворяющей уравнению гиперболического типа и получающей импульсные воздействия как дискретного, так и непрерывного характера на заданых кривых.

Ключевые слова: интегральные неравенства, уравнения гиперболического типа, импульсные воздействия.

2000 MSC: 34A37, 35L70, 58J45

УДК: 517.9

INTEGRAL INEQUALITIES IN THE THEORY OF EQUATION OF HYPERBOLIC TYPE WITH IMPULSE PERTURBATION

Massalitina E.V.[a], Kilchinskiy O. O.[b]

[a] *National Technical University of Ukraine "KPI" 1Prospect Peremogy 37, 03056, Kyiv, Ukraine*

[b] *State Economy and Technology University of Transport str. Lukashevich 19, 03049, Kyiv, Ukraine*

Integral estimation for function of two variables which satisfies the equation of hyperbolic type and receives impulse perturbations both discrete and continuous character on given curves is founded.

Key words: integral inequalities, hyperbolic equation, impulse perturbation.

2000 MSC: 34A37, 35L70, 58J45

УДК: 517.9