ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 19–25

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 19–25

ПОЧАТКОВО-НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНОГО РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Симотюк М. М., Савка І. Я.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України
вул. Наукова 3-б, 79000, Львів, Україна

(Отримано 25 квітня 2013 р.)

Встановлено однозначну розв'язність початково-нелокальної задачі для факторизованого рівняння із частинними похідними для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів факторизації.

Ключові слова: диференціальні рівняння, початково-нелокальні умови, факторизоване рівняння, малі знаменники, метричні оцінки.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95

I. Формулювання задачі

Використовуватимемо такі позначення і функціональні простори: $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$ — p-вимірний тор, $Q_p^T = (0,T)\times\Omega_p$, $T>0$, $x=(x_1,\dots,x_p)\in\Omega_p$; $D_x = (-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1|+\dots+|k_p|$, $(k,x) = k_1x_1+\dots+k_px_p$; $\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ вимірної множини $A\subset\mathbb{R}^n$, $\Pi_n = \{\vec{\lambda}\equiv(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n : \lambda_1<\dots<\lambda_n\}$; $C(n,m)$ — множина всіх наборів $(i_1,\dots,i_m)$, складених з натуральних чисел $i_1,\dots,i_m$ таких, що

$$1\le i_1<\dots<i_m\le n,\quad 1\le m\le n;$$

$\mathrm{set}\,\omega$ позначає множину $\{i_1,\dots,i_m\}$ для деякого набору $\omega=(i_1,\dots,i_m)\in C(n,m)$;

$B(D_x)$ — такий диференціальний вираз, що

$$\begin{gathered}(\exists\, N_1,N_2\in\mathbb{N})\ (\exists\, C_1,C_2>0)\ (\forall\, k\in\mathbb{Z}^p)\\ C_1(1+|k|)^{N_1}\le|B(k)|\le C_2(1+|k|)^{N_2},\end{gathered}\tag{1}$$

$K_1=\{k\in\mathbb{Z}^p : \mathrm{Re}\,B(k)\ge0\}$, $K_2=\mathbb{Z}^p\backslash K_1$;
$W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$, $\alpha,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$, — простір, отриманий в результаті поповнення простору скінченних тригонометричних поліномів $\varphi(x)=\sum\varphi_k e^{(ik,x)}$ за нормою $\|\varphi;W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2}\| = \Big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}e^{2\chi(k)\mathrm{Re}\,B(k)}\Big)^{\frac12}$, де $\chi(k)=\beta_1$, якщо $k\in K_1$, $\chi(k)=\beta_2$, якщо $k\in K_2$;
$C^n([0,T];W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2})$ — простір функцій $u=u(t,x)$ таких, що при фіксованому $t\in[0,T]$ похідні $\partial^j u(t,x)/\partial t^j$, $0\le j\le n$, належать до $W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $[0,T]$; норму в просторі $C^n([0,T];W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2})$ задаємо формулою
$\|u;C^n([0,T];W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2})\| = \sum\limits_{j=0}^{n}\max\limits_{t\in[0,T]}\Big\|\frac{\partial^j u}{\partial t^j};W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2}\Big\|$.

В області Q_p^T розглянемо задачу

$$\begin{gathered}L_n\left(\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)u(t,x)\equiv\\ \equiv\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\lambda_jB\left(D_x\right)\right)u(t,x)=0,\ (t,x)\in Q_p^T,\end{gathered}\tag{2}$$

$$\begin{cases}U_j[u]\equiv\dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}=\varphi_j(x),\quad j=1,\dots,r,\\ U_{r+j}[u]\equiv\dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}-\\ \quad-\mu\,\dfrac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T}=\varphi_{r+j}(x),\quad j=1,\dots,l,\end{cases}\tag{3}$$

де $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\Pi_n$, $\mu\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$, $1\le r<n$, $l=n-r$. Задачу (2), (3) називатимемо початково-нелокальною задачею, оскільки умови (3) містять поєднання r початкових умов для шуканого розв'язку $u(t,x)$ в точці $t=0$ і l нелокальних умов, які пов'язують значення цього розв'язку та його похідних на кінцях відрізка $[0,T]$.

Розв'язність двоточкових крайових та нелокальних крайових задач для гіперболічних та безтипних рівнянь із частинними похідними досліджено в багатьох роботах (див. [1–8]), в яких використано метричний підхід для оцінки послідовності певних характеристичних визначників — малих знаменників задач.

Зокрема, в роботі [2] встановлено, що для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\vec{\lambda}$ існує єдиний розв'язок із простору $W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2}$ задачі для факторизованого рівняння (2) з двома кратними вузлами

$$\begin{cases}\frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0}=\varphi_j(x),\qquad j=1,\dots,r,\\ \frac{\partial^{j-1}u(t,x)}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T}=\varphi_{r+j}(x),\qquad j=1,\dots,l.\end{cases}\tag{4}$$

Основною метою нашої роботи є встановлення подібного результату про коректну розв'язність задачі

(2), (3) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ при довільному фіксованому параметрі $T > 0$ області Q_p^T і довільному фіксованому коефіцієнті $\mu \neq 0$ в умовах (3).

II. Умови єдиності та достатнього існування розв'язку задачі

Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(ik, x), \tag{5}$$

в якому кожна функція $u_k(t), k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі для звичайного диференціального рівняння

$$L_n\left(d/dt, k\right) u_k(t) = 0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} u_k^{(j-1)}(0) = \varphi_{j,k}, & j = 1, \ldots, r, \\ u_k^{(j-1)}(0) - \mu u_k^{(j-1)}(T) = \varphi_{r+j,k}, & j = 1, \ldots, l, \end{cases} \tag{7}$$

де $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Розв'язок задачі (6), (7) зображається формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{n} C_{k,q} \exp(\lambda_q B(k) t), \tag{8}$$

де сталі $C_{k,q}, q = 1, \ldots, n$, визначаються із системи

$$\begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{n} C_{k,q} (\lambda_q B(k))^{j-1} = \varphi_{j,k}, \quad j = 1, \ldots, r, \\ \sum\limits_{q=1}^{n} C_{k,q} (\lambda_q B(k))^{j-1} \times \\ \quad \times (1 - e^{\lambda_q B(k) T}) = \varphi_{r+j,k}, \quad j = 1, \ldots, l. \end{cases} \tag{9}$$

Визначник лінійної системи (9) позначимо через $\Delta(k, \vec{\lambda})$, $k \in \mathbb{Z}^p$:

$$\Delta(k,\vec{\lambda}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 B(k) & \ldots & \lambda_n B(k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{r-1} B^{r-1}(k) & \ldots & \lambda_n^{r-1} B^{r-1}(k) \\ 1 - \mu e^{\lambda_1 B(k) T} & \ldots & 1 - \mu e^{\lambda_n B(k) T} \\ \lambda_1 B(k)(1 - \mu e^{\lambda_1 B(k) T}) & \ldots & \lambda_n B(k)(1 - \mu e^{\lambda_n B(k) T}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{l-1} B^{l-1}(k)(1 - \mu e^{\lambda_1 B(k) T}) & \ldots & \lambda_n^{l-1} B^{l-1}(k)(1 - \mu e^{\lambda_n B(k) T}) \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Теорема 1. *Для того, щоб розв'язок задачі* (2), (3) *був єдиним у просторі* $C^n([0,T]; W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2})$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta(k, \vec{\lambda}) \neq 0. \tag{11}$$

Наступна теорема описує клас рівнянь (2), для яких виконується умова єдиності (11) для розв'язку задачі з умовами (3), якщо $\mu \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Теорема 2. *Якщо* $n \geq 2$, $r \geq l$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $T > 0$, $B(k) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$, *то для всіх векторів* $\vec{\lambda} \in \Pi_n$ *виконується умова* (11).

Для доведення теореми 2 доведемо спочатку допоміжну лему. Для цього позначимо:

$$\Gamma_{n,r}(\tau_1, \ldots, \tau_n; \mu, T) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \tau_1 & \ldots & \tau_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{r-1} & \ldots & \tau_n^{r-1} \\ 1 - \mu e^{\tau_1 T} & \ldots & 1 - \mu e^{\tau_n T} \\ \tau_1(1 - \mu e^{\tau_1 T}) & \ldots & \tau_n(1 - \mu e^{\tau_n T}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{n-r-1}(1 - \mu e^{\tau_1 T}) & \ldots & \tau_n^{n-r-1}(1 - \mu e^{\tau_n T}) \end{vmatrix},$$

де $n \geq 2$, $1 \leq r \leq n-1$, $l = n - r$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $T > 0$, $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — дійсні числа.

Лема 1. *Якщо* $n \geq 2$, $r \geq n - r$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $T > 0$, *то для довільних* n *дійсних різних чисел* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *виконується нерівність*

$$\Gamma_{n,r}(\tau_1, \ldots, \tau_n; \mu, T) \neq 0. \tag{12}$$

□ *Доведення.* Використаємо метод математичної індукції.

Перевіримо спочатку нерівність (12) для всіх таких пар $(n,r) \in \mathbb{N}^2$, що $n \geq 2$, $n - r = 1$. Розглянемо визначник $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ як функцію змінної τ. Із розвинення визначника $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ за елементами останнього стовпця випливає, що

$$\begin{gathered} \left(\tfrac{\partial}{\partial \tau}\right)^{n-1} \Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T) = \\ = -\mu T^{n-1} e^{\tau T} \prod_{n-1 \geq j > q \geq 1} (\tau_j - \tau_q) \neq 0, \end{gathered} \tag{13}$$

бо $\mu, T \neq 0$, $\tau_j \neq \tau_q$, $j \neq q$. Тому з формули (13) та узагальненої теореми Ролля (див. задачу 92 у [4, с. 63]) випливає, що кількість різних дійсних τ-нулів функції $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$ (при фіксованих $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \mu, T$) не перевищує $(n-1)$. Але функція $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau; \mu, T)$, очевидно, перетворюється в нуль у $(n-1)$ різних точках: $\tau = \tau_1, \ldots, \tau = \tau_{n-1}$, бо кожен із визначників $\Gamma_{n,n-1}(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, \tau_1; \mu, T), \ldots,$

$\Gamma_{n,n-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau_{n-1};\mu,T)$ має однакові стовпці. Отже, для довільного $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}\}$

$$\Gamma_{n,n-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau;\mu,T) \neq 0.$$

Припустимо, що для деякого $m \geq 1$ нерівність (12) виконується для всіх таких $(n,r) \in \mathbb{N}^2$, що $n-r=m$ і $2 \leq n \leq 2r$. Доведемо, що тоді нерівність (12) буде істинною для всіх пар (n,r), таких, що $n-r=m+1$ і $2 \leq n \leq 2r$. Розкриваючи визначник $\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau;\mu,T)$ за елементами останнього стовпця і враховуючи, що $m+1 \leq n/2$, одержимо

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau}\right)^{n-m-1}\left(\tfrac{\partial}{\partial\tau}-T\right)^{m}\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau;\mu,T)=$$
$$=-\mu\, m!\, T^{n-m-1}e^{\tau T}\Gamma_{n-1,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1};\mu,T). \tag{14}$$

За припущенням індукції

$$\Gamma_{n-1,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1};\mu,T)\neq 0,$$

тому з формули (14) та узагальненої теореми Ролля випливає, що кількість різних τ-нулів функції $\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau;\mu,T)$ (для фіксованих $\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$, $\mu\neq 0$ і $T>0$) не перевищує $(n-1)$. Оскільки

$$\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau_j;\mu,T)=0,\ j=1,\ldots,n-1,$$

то $\Gamma_{n,n-m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1},\tau;\mu,T)\neq 0$, якщо $\tau\neq\tau_j$, $j=1,\ldots,n-1$. Лему доведено. ■

Із леми 1 випливає твердження теореми 2, оскільки при $\tau_i=\lambda_i B(k)$, $i=1,\ldots,n$, виконується тотожність

$$\Delta(k,\vec{\lambda})\equiv\Gamma_{n,r}(\tau_1,\ldots,\tau_n;\mu,T),\quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

Далі припускатимемо, що умова єдиності (11) виконується. Тоді матимемо зображення розв'язку задачі (2), (3) у вигляді формального ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\exp(ik,x)\times$$
$$\times\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})}{\Delta(k,\vec{\lambda})}\exp(\lambda_q B(k)t)\varphi_{j,k}, \tag{15}$$

де $\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})$ — алгебричне доповнення елемента $U_j\left[\exp(\lambda_q B(k)t)\right]$ у визначнику $\Delta(k,\vec{\lambda})$. Збіжність ряду (15) у просторах $C^n([0,T];W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2})$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки визначник $|\Delta(k,\vec{\lambda})|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної множини векторів $k\in\mathbb{Z}^p$.

Для встановлення достатніх умов існування розв'язку задачі (2), (3) позначимо

$$\theta=(n+1+C_l^2+C_r^2)N_2=(n+l^2+r^2+2)N_2/2,$$

$$\theta_j=\theta-jN_2,\quad j=\overline{1,r},$$

$$\theta_j=\theta+r-jN_2,\quad j=\overline{r+1,n},$$

$$\delta_1(\vec{\lambda})=\lambda_{r+1}+\ldots+\lambda_n,\quad \delta_2(\vec{\lambda})=\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-r},$$

$$\beta_{1,j}=(l+1)\max\{0,\lambda_n\}T-\delta_1(\vec{\lambda})T,\quad j=1,\ldots,r,$$

$$\beta_{2,j}=(l+1)\min\{0,\lambda_1\}T-\delta_2(\vec{\lambda})T,\quad j=1,\ldots,r,$$

$$\beta_{1,j}=l\max\{0,\lambda_n\}T-\delta_1(\vec{\lambda})T,\quad j=r+1,\ldots,n,$$

$$\beta_{2,j}=l\min\{0,\lambda_1\}T-\delta_2(\vec{\lambda})T,\quad j=r+1,\ldots,n.$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (1), (11) *та існує така стала* $\eta\in\mathbb{R}$, *що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *справджується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{\lambda})|\geq|k|^{-\eta}\begin{cases}\exp(\delta_1(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}\,A(k)), k\in K_1,\\ \exp(\delta_2(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}\,A(k)), k\in K_2.\end{cases} \tag{16}$$

Якщо $\varphi_j\in W^A_{\theta_j+\alpha+\eta,\beta_{1,j}+\beta_1,\beta_{2,j}+\beta_2}, j=1,\ldots,n$, *то в просторі* $C^n([0,T];W^A_{\alpha,\beta_1,\beta_2})$ *існує єдиний розв'язок задачі* (2), (3), *який зображається рядом* (15) *і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x), j=1,\ldots,n$.

□ *Доведення.* Очевидно, що справедлива нерівність

$$|\exp(\lambda_q B(k)t)|\leq\exp\left(\eta_k T\mathrm{Re}\,B(k)\right), \tag{17}$$

де

$$\eta_k=\begin{cases}\max\{0,\lambda_n\}, & k\in K_1,\\ \min\{0,\lambda_1\}, & k\in K_2.\end{cases}$$

Розкриваючи визначник $\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})$ за правилом Лапласа за мінорами перших $r-1$ рядків, якщо $j\leq r$, або за мінорами перших r рядків, якщо $j>r$, одержимо, що

$$\begin{gathered}\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})=[B(k)]^{C_l^2+C_r^2-(j-1)}\times\\ \sum_{\omega_1\in C(n-1,r-1)}(-1)^{s_{\omega_1}}V^{jq}_{\omega_1}W^q_{\sigma(\omega_1)}\times\\ \times\prod_{s=1,j_s\neq q}^{l}(1-\mu e^{\lambda_{j_s}B(k)T}),\ j\leq r,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})=[B(k)]^{C_l^2+C_r^2-(j-r-1)}\times\\ \times\sum_{\omega_0\in C(n-1,r)}(-1)^{s_{\omega_0}}W^q_{\omega_0}V^{jq}_{\sigma(\omega_0)}\times\\ \times\prod_{s=1,j_s\neq q}^{l-1}(1-\mu e^{\lambda_{j_s}B(k)T}),\ j>r,\end{gathered} \tag{19}$$

де $\omega_\ell=(i_1,\ldots,i_{r-\ell})$, $s_{\omega_\ell}=C^2_{r+1-\ell}+i_1+\ldots+i_{r-\ell}$, набір $\sigma(\omega_\ell)=(j_1,\ldots,j_{n-r-(1-\ell)})\in C(n-1,n-r-(1-\ell))$ однозначно визначається за набором $\omega_\ell\in C(n-1,r-\ell)$ умовою $\mathrm{set}\,\omega_\ell\cap\mathrm{set}\,\sigma(\omega_\ell)\neq\emptyset$, символ W^q_κ (κ – деякий набір) позначає визначник Вандермонда сукупностей чисел $\{\lambda_j,\ j\in\mathrm{set}\,\kappa, j\neq q\}$, а символ V^{jq}_κ — визначник типу Вандермонда, який отримується із визначника Вандермонда сукупностей чисел $\{\lambda_\iota,\ \iota\in\mathrm{set}\,\kappa\}$, закресленням j-го рядка та q-го стовпця, $\ell=0,1$.

Звідки отримаємо, що

$$|\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})| \le C_3 \times \begin{cases}(1+|k|)^{N_2(C_l^2+C_r^2+1-j)}e^{l\eta_k T\mathrm{Re}\,B(k)}, & j\le r,\\ (1+|k|)^{N_2(C_l^2+C_r^2+1+r-j)}e^{(l-1)\eta_k T\mathrm{Re}\,B(k)}, & j>r,\end{cases} \tag{20}$$

де C_3 — додатна стала.

Позначимо

$$\tilde{\delta}_k = \begin{cases}\delta_1(\vec{\lambda}), & k\in K_1,\\ \delta_2(\vec{\lambda}), & k\in K_2.\end{cases}$$

Тоді, з нерівностей (1), (16) (17), (20) для коефіцієнтів ряду Фур'є $u_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, ряду (5) одержимо оцінку

$$\left|u_k^{(m)}(t)\right|^2 = \left|\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\lambda_q^m B^m(k)\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})}{\Delta(k,\vec{\lambda})}e^{(\lambda_q B(k)t)}\varphi_{j,k}\right|^2 \le$$
$$\le C_4(1+|k|)^{2(\eta+nN_2)}\times \left|\sum_{j=1}^{n}\Delta_{jq}(k,\vec{\lambda})\exp\left((\eta_k-\tilde{\delta}_k)T\mathrm{Re}\,B(k)\right)\varphi_{j,k}\right|^2 \le$$
$$\le C_5\Big(\sum_{j=1}^{r}|\varphi_{j,k}|^2(1+|k|)^{2(\eta+\theta-jN_2)}\times \exp\left(2(\eta_k+l\eta_k-\tilde{\delta}_k)T\mathrm{Re}\,B(k)\right)+ \sum_{j=r+1}^{n}|\varphi_{j,k}|^2(1+|k|)^{2(\eta+\theta+(r-j)N_2)}\times \exp\left(2(l\eta_k-\tilde{\delta}_k)T\mathrm{Re}\,B(k)\right)\Big), \tag{21}$$

де $m=0,\dots,n$. Враховуючи вище позначення, з оцінок (21) отримаємо, що

$$\|u(t,x);C^n([0,T];W^B_{\alpha,\beta_1,\beta_2})\|^2 \le$$
$$\le C_6\sum_{j=1}^{n}\|\varphi_j;W^B_{\theta_j+\alpha+\eta,\beta_{1,j}+\beta_1,\beta_{2,j}+\beta_2}\|.$$

Зауважимо, що додатні сталі C_3, C_4, C_5 і C_6 не залежать від k. Таким чином, з останньої нерівності випливає доведення теореми.■

III. Оцінки знизу малих знаменників

Нехай $R(\lambda)$ — поліном степеня n вигляду

$$R(\lambda)\equiv\lambda^n+\sum_{j=1}^{n}a_j\lambda^{n-j},\quad a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}, \tag{22}$$

а $Q(t)$ — квазімногочлен вигляду

$$Q(t)\equiv\sum_{j=1}^{m}e^{z_jt}p_j(t),\quad z_j\ne z_q,\quad j\ne q, \tag{23}$$

де $z_1,\dots,z_m\in\mathbb{C}$, а $p_1(t),\dots,p_m(t)$ — многочлени степенів $n_1-1,\dots,n_m-1$ відповідно ($n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}$). Для квазімногочлена $Q(t)$ позначимо:

$$M_Q=1+\max_{1\le j\le m}|z_j|,\quad n_0\equiv n_1+\ldots+n_m.$$

Лема 1. **[2]** *Якщо*

$$\forall\, t\in[a,b]\quad |R(d/dt)Q(t)|\ge\delta e^{\vartheta t}>0,\quad \vartheta\in\mathbb{R},$$

то для всіх $\varepsilon\in\left(0,\frac{\delta}{(2n+2)A_R^n(\vartheta)}\right]$ *справджується оцінка*

$$\mathrm{mes}_{\,\mathbb{R}}\{t\in[a,b]:|Q(t)|\le\varepsilon e^{\vartheta t}\}\le C_7\left(M_Q+|\vartheta|\right)(\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}},$$

де

$$C_7=C_7(n,n_0,b-a),$$
$$A_R(\vartheta)=1+\max_{0\le j\le n-1}\left|\frac{R^{(j)}(\vartheta)}{j!}\right|^{1/(n-j)}.$$

Теорема 1. *Якщо для виразу* $B(D_x)$ *виконується умова* (1), *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*)* $\vec{\lambda}\in\Pi_n$ *нерівність* (16) *виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p$ *при* $\eta>\eta_0$, *де* $\eta_0=n(n-2r)+pr(3r-1)/2-N_1C_r^2$.

☐ *Доведення.* Нехай $P_n=\prod\limits_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$ — довільний фіксований паралелепіпед такий, що $P_n\subset\Pi_n$. Для кожного $k\in K_1\bigcup K_2$ запровадимо такі множини:

$$E_\eta(k)=\left\{\vec{\lambda}\in P_n:|\Delta(k,\vec{\lambda})|<|k|^{-\eta}\,e^{\delta_1(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}\,A(k)}\right\},$$
$$\text{якщо } k\in K_1,$$
$$E_\eta(k)=\left\{\vec{\lambda}\in P_n:|\Delta(k,\vec{\lambda})|<|k|^{-\eta}\,e^{\delta_2(\vec{\lambda})T\mathrm{Re}\,A(k)}\right\},$$
$$\text{якщо } k\in K_2.$$

Нехай E_η — множина тих векторів $\vec{\lambda}$, які належать до нескінченної кількості множин $E_\eta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Для доведення теореми 4 досить перевірити, що для довільного паралелепіпеда $P_n\subset\Pi_n$ $\mathrm{mes}_{\,\mathbb{R}^n}E_\eta=0$, якщо $\eta>\eta_0$. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі, для цього досить встановити збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\mathrm{mes}_{\,\mathbb{R}^n}E_\eta(k)$.

Доведемо, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$ виконується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\,\mathbb{R}^n}E_\eta(k)\le C_8|k|^{-p-\varepsilon}, \tag{24}$$

де додатні сталі ε, C_8 не залежать від k. З оцінки (24), очевидно, випливає збіжність ряду $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p}\mathrm{mes}_{\,\mathbb{R}^n}E_\eta(k)$.

Встановимо оцінку (24) для випадку, коли $k\in K_1\backslash\{\vec{0}\}$. Через $\Delta_j(k,\vec{\lambda})$, $j=\overline{1,n}$, позначимо визначник, який одержується з визначника $\Delta(k,\vec{\lambda})$ шляхом викреслювання останніх $(n-j)$ рядків та останніх

$(n-j)$ стовпців. Для кожного $k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}$ розглянемо множини:

$$F_\eta(k) = \{\vec{\lambda} \in P_n : |\Delta_n(k, \vec{\lambda})| < \nu_n(k, \vec{\lambda})\},$$
$$F_\eta(j,k) = \{\vec{\lambda} \in P_n : |\Delta_j(k, \vec{\lambda})| < \nu_j(k, \vec{\lambda}),$$
$$|\Delta_{j-1}(k, \vec{\lambda})| \geq \nu_{j-1}(k, \vec{\lambda})\}, \quad j = \overline{r+1, n},$$

де числа $\nu_j(k, \vec{\lambda})$, $k \in K_1$, $j = \overline{r, n}$, визначаються таким способом:

$$\nu_r(k, \vec{\lambda}) = |B(k)|^{C_r^2} \prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q|,$$

$$\nu_j(k, \vec{\lambda}) = \nu_r(k, \vec{\lambda}) \xi_j(k) \prod_{q=r+1}^{j} e^{\lambda_q \mathrm{Re} B(k) T}, \ j > r,$$

$$\xi_j(k) = \frac{\xi_{j-1}(k)}{|k|^{p(j-r-1+\max\{r, j-r\})+\varepsilon_j}}, \quad j > r, \quad \xi_r(k) = 1,$$

$\varepsilon_j = \varepsilon_0 / 2^{n-j+1}$, $r+1 \leq j \leq n$, $\varepsilon_0 = \eta - \eta_0$.

Зауважимо, що

$$(\forall\, k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}) \quad F_\eta(k) \subset \bigcup_{j=r+1}^{n} F_\eta(j,k).$$

Дійсно, нехай $\vec{\lambda} \in F_\eta(k)$. Якщо $\vec{\lambda} \notin F_\eta(j,k)$ для всіх $j \in \{r+1, \ldots, n\}$, то, згідно з вибором множин $F_\eta(j,k), r+1 \leq j \leq n$, виконується суперечлива нерівність

$$\nu_r(k, \vec{\lambda}) \equiv |\Delta_r(k, \vec{\lambda})| < \nu_r(k, \vec{\lambda}).$$

Тому $\vec{\lambda} \in F_\eta(j_0, k)$ для деякого номера $j_0 \in \{r+1, \ldots, n\}$, а, отже, потрібне включення встановлено. Отже,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(k) \leq \sum_{j=r+1}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j,k). \qquad (25)$$

Для кожної з множин $F_\eta(j,k), r+1 \leq j \leq n$, за теоремою Фубіні маємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j,k) = \int\limits_{\overline{P}_j} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_\eta(j,k,\vec{\lambda}_j) d\vec{\lambda}_j, \qquad (26)$$

де

$$\overline{P}_j = \prod_{q=1, q\neq j}^{n} [a_q, b_q], \ \ \vec{\lambda}_j = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n),$$

$$F_\eta(j,k,\vec{\lambda}_j) = \{\lambda_j \in [a_j, b_j] :$$
$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n) \in F_\eta(j,k)\}.$$

Для оцінок зверху лебегових мір множин $F_\eta(j,k,\vec{\lambda}_j), r+1 \leq j \leq n$, скористаємось лемою 1. Для цього запровадимо такі многочлени:

$$R_j(\xi, k) = \xi^{\max\{r, j-r\}} (\xi - B(k)T)^{j-r-1}, \quad r+1 \leq j \leq n.$$

До розвинення визначника $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$, $j = \overline{r+1, n}$, за елементами його останнього стовпця застосуємо диференціальний вираз $R_j\left(\dfrac{\partial}{\partial \lambda_j}, k\right)$.

У результаті одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} R_j\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k\right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) &= -\mu\,(j-r-1)! \times \\ \times B^{j-r-1}(k) &(B(k)T)^{\max\{r, j-r\}} \times \\ \times e^{\lambda_j B(k) T} \Delta_{j-1}(k, \vec{\lambda}), &\qquad r+1 \leq j \leq n. \end{aligned} \qquad (27)$$

Для фіксованих $\lambda_q, q \neq j$, визначник $\Delta_j(k, \vec{\lambda})$ як функція змінної λ_j є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $|B(k)|T$, причому $M_{\Delta_j} = 1 + |B(k)|T$. Якщо $\vec{\lambda} \in F_\eta(j,k)$, то з формул (27) та означення множини $F_\eta(j,k)$ випливає, що

$$\begin{aligned} &\left| R_j\left(\frac{\partial}{\partial \lambda_j}, k\right) \Delta_j(k, \vec{\lambda}) \right| \geq \\ &\geq |\mu| |B(k)|^{j-r-1+\max\{r, j-r\}} T^{\max\{r, j-r\}} \times \\ &\times e^{\lambda_j \mathrm{Re}\, A(k) T} \nu_{j-1}(k, \vec{\lambda}), \ \ r+1 \leq j \leq n. \end{aligned} \qquad (28)$$

Степінь многочлена $R_j(\xi, k), j = r+1, \ldots, n$, за змінною ξ дорівнює $(j-r-1+\max\{r, j-r\})$, $\deg R_j = j - r - 1 + \max\{r, j-r\}$, а вирази $A_{R_j}\big(B(k)T\big)$, $j = r+1, \ldots, n$, обчислюються за формулами:

$$A_{R_j}\big(B(k)T\big) = 1 + \max_{0 \leq i \leq \deg R_j} \left| \frac{R_j^{(i)}\big(B(k)T, k\big)}{i!} \right|^{\frac{1}{\deg R_j - i}},$$

де $R_j^{(i)}\big(B(k)T, k\big) = \frac{d^i R_j(\xi, k)}{d\xi^i}\Big|_{\xi = B(k)T}$.

Оскільки

$$\frac{d^i R_j(\xi, k)}{d\xi^i}\Big|_{\xi = B(k)T} = 0,$$

якщо $r+2 \leq j \leq n$, $0 \leq i \leq j-r-2$, та

$$R_j^{(i)}\big(B(k)T, k\big) =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{i} C_i^\ell [\xi^{\max\{r, j-r\}}]^{(i-\ell)} [(\xi - B(k)T)^{(j-r-1)}]^{(\ell)}\Big|_{\xi = B(k)T} =$$

$$= C_i^{j-r-1} \frac{(j-r-1)!\big(\max\{r, j-r\}\big)!}{\deg R_j - i} \big(B(k)T\big)^{\deg R_j - i},$$

якщо $r+1 \leq j \leq n$, $i \geq j-r-1$, то

$$A_{R_j}\big(B(k)T\big) \leq C_9 |B(k)|,$$

де стала C_9 не залежить від k. Тому з оцінок (28) на підставі леми 2 отримуємо, що для всіх $k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}$ справджується нерівність

$$\begin{aligned} &\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} F_\eta(j,k,\vec{\lambda}_j) \leq C_{10} |B(k)| \times \\ &\times \left(\frac{\xi_j(k)}{|B(k)|^{\deg R_j} \xi_{j-1}(k)} \right)^{1/\deg R_j} \leq C_{10} |k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}_j}, \\ &j = r+1, \ldots, n, \end{aligned} \qquad (29)$$

де $\widetilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_0 / ((j-1) 2^{n-j+2})$, а стала $C_{10} > 0$ не залежить від вибору значень $\lambda_q \in [a_q, b_q]$, $q = 1, \ldots, n$,

$q \neq j$. Інтегруючи оцінки (29), з рівностей (26) отримаємо, що для всіх $k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}$ виконуються оцінки

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(j,k) \leq C_{11}|k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}}, \quad r+1 \leq j \leq n, \qquad (30)$$

де $\widetilde{\varepsilon} = \min\limits_{r+1 \leq j \leq n} \widetilde{\varepsilon}_j$. Тоді з оцінок (30) на підставі нерівностей (25) дістаємо, що для всіх $k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}$

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} F_\eta(k) \leq (n-r) C_{11}|k|^{-p-\widetilde{\varepsilon}}. \qquad (31)$$

Враховуючи, що для всіх $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in P_n$

$$\prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q| \geq \prod_{r \geq j > q \geq 1} |a_j - b_q|,$$

і те, що $|B(k)| \geq c_1(1+|k|)^{N_1}$, $\varepsilon_{r+1} + \ldots + \varepsilon_n < \varepsilon_0$, а

$$\nu_n(k,\vec{\lambda}) = e^{(\lambda_{r+1}+\ldots+\lambda_n)\mathrm{Re}B(k)T} \prod_{r \geq j > q \geq 1} |\lambda_j - \lambda_q| \times$$

$$\times \frac{|B(k)|^{C_r^2}}{|k|^{p(r+\ldots+n-1)+\varepsilon_{r+1}+\ldots+\varepsilon_n}}, \quad k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\},$$

з оцінок (1) дістаємо, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) $k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}$ виконується включення $E_\eta(k) \subset F_\eta(k)$, якщо $\eta > \eta_0$. Тому з оцінки (31) випливає істинність оцінки (24) для $k \in K_1 \backslash \{\vec{0}\}$.

Для випадку, коли $k \in K_2 \backslash \{\vec{0}\}$, оцінку (24) можна встановити аналогічними міркуваннями.

Теорему доведено. ■

Література

[1] *Бобик І.О., Пташник Б.Й.* Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн., 1994. – **46**, № 7.– С. 795–802.

[2] *Бобик І.О., Симотюк М.М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фізико математичні науки, 2010. – Вип. 687. – С. 11–19.

[3] *Ільків В. С., Пташник Б. Й.* Задачі з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними. Метричний підхід до проблеми малих знаменників // Укр. мат. журн. — 2006. – Т. 58, № 12. – С. 1624–1650.

[4] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

[5] *Илькив В.С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – В 5. – С. 15–19.

[6] *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[7] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[8] *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Дослідження задачі з однорідними локальними двоточковими умовами для однорідної системи рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2009. – **52**, №4. — С. 7–17.

[9] *Симотюк М.М.* Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту, 2002. – Вип. 7. – С. 96–107.

НАЧАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Сымотюк М. М., Савка И. Я.

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины, ул. Научная 3-б, 79000, Львов, Украина

Установлена однозначная разрешимость начально-нелокальной задачи для факторизованного уравнения с частными производными для почти всех (относительно меры Лебега) векторов, составленных из коэффициентов факторизации.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, начально-нелокальные условия, факторизованное уравнения, малые знаменатели, метрические оценки.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95

INITIAL-NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR FACTORIZED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Symotyuk M. M., Savka I. Ya.

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine 3b Naukova Str., Lviv 79000, Ukraine

We established the correct solvability of initial-nonlocal boundary value problem for factorized partial differential equations for almost all (with respect to Lebesgue measure) values of coefficients of factorization.

Key words: differential equations, initial-nonlocal conditions, factorized equations, small denominators, metric estimations.

2000 MSC: 35G30

УДК: 517.95