ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
"ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
"Фізико-математичні науки"
Вип.768 № 768, (2013) с. 26–33

JOURNAL OF NATIONAL UNIVERSITY
"LVIVSKA POLITECHNIKA"
"Physical & mathematical sciences"
Vol.768 No 768, (2013) 26–33

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ У СМУЗІ

Репетило С.М.

Національний університет "Львівська політехніка"
вул. С.Бандери 12, 79013, Львів, Україна

(Отримано 3 жовтня 2013 р.)

Для лінійних гіперболічних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі досліджено однозначну розв'язність задачі з умовами Діріхле-Неймана за часовою змінною та умовами періодичності або майже періодичності за просторовою координатою. Для рівняння вільних коливань струни у смузі також досліджено триточкову задачу за часовою змінною з умовами Діріхле або Неймана у вузлах інтерполяції без додаткових умов за просторовою координатою. Встановлено умови однозначної розв'язності розглянутих задач та конструктивно побудовано їхні розв'язки. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язків досліджуваних задач, використано метричний підхід.

Ключові слова: крайова задача, гіперболічні рівняння, малі знаменники, метричний підхід, міра Лебега.

2000 MSC: 35L20

УДК: 517.956.32

Крайові задачі з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними, взагалі кажучи, некоректні, їх розв'язність пов'язана з проблемою малих знаменників (див. [2, 3, 7—10] та бібліографію в них). Типовим прикладом некоректної крайової задачі є задача типу Діріхле для хвильового рівняння [7, с. 23].

Для забезпечення, за певних умов, коректності у шарі чи смузі крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними (коли порушується умова єдиності розв'язку) на шуканий розв'язок накладають додаткові умови, наприклад, умови періодичності чи майже періодичності за просторовими координатами [9, 10] або додаткові умови за часовою змінною [3].

Встановлено [2, 9, 10] умови існування єдиного періодичного або майже періодичного за просторовими координатами розв'язку крайових задач для лінійних та слабко нелінійних гіперболічних рівнянь та систем рівнянь високого порядку. Досліджено [4, 6, 11, 13] питання розв'язності двоточкових задач з умовами Діріхле та Діріхле-Неймана для лінійних та нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку за умови періодичності шуканого розв'язку за часовою змінною.

У цій статті, яка примикає до праць [3; 7, гл. 3], для лінійних гіперболічних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами у смузі досліджено однозначну розв'язність задачі з умовами Діріхле - Неймана за часовою змінною та умовами періодичності або майже періодичності за просторовою координатою. Для рівняння вільних коливань струни у смузі також досліджено триточкову задачу за часовою змінною з умовами Діріхле або Неймана у вузлах інтерполяції без додаткових умов за просторовою координатою. Встановлено умови однозначної розв'язності розглянутих задач та конструктивно побудовано їхні розв'язки. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків досліджуваних задач, використано метричний підхід.

I. Основні позначення

Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{Z}_+$ — множина цілих невід'ємних чисел, $\mathbb{R}_+$ — множина дійсних невід'ємних чисел; $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, Ω^ω — одновимірний тор $(\mathbb{R}/\omega\mathbb{Z})$, $Q = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}\}$, $D^\omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T, x \in \Omega^\omega\}$;

$H_q^\omega(\Omega^\omega)$, $q \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}_+$,— простір, отриманий шляхом поповнення множини скінченних тригонометричних поліномів $\upsilon(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \upsilon_k \exp(ikx2\pi/\omega)$ з періодом ω за змінною x щодо норми

$$\left\|\upsilon; H_q^\omega(\ \Omega^\omega\ )\right\| := \sqrt{\omega \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^q |\upsilon_k|^2};$$

$C^n\left([0,T], H_q^\omega(\ \Omega^\omega\ )\right)$, $q \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{R}_+$, — простір функцій $\upsilon(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\partial^r \upsilon(t,x)/\partial t^r$, $r \in \{0,1,\ldots,n\}$, належать простору $H_q^\omega(\Omega^\omega)$ та є неперервними за t у нормі $H_q^\omega(\Omega^\omega)$; $\left\|\upsilon; C^n\left([0,T], H_q^\omega(\Omega^\omega)\right)\right\| := \sum_{r=0}^{n} \max_{0\le t\le T} \left\|\partial^r \upsilon/\partial t^r; H_q^\omega(\Omega^\omega)\right\|$; c_j, $j=1,2,\ldots$, — додатні сталі, які не залежать від k.

II. Розв'язність у класі 2π-періодичних функцій

1. Рівняння коливань струни. В області Q розглянемо задачу

$$L[u] := \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = 0, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} U_1[u] := u(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x), \\ U_2[u] := \left.\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T} = \varphi_2(x). \end{cases} \qquad (2)$$

У праці [9] встановлено, що розв'язок задачі (1), (2) не буде єдиним, якщо на нього не накласти певні додаткові умови, що, звичайно, звужує класи допустимих розв'язків та вихідних даних.

Щоб за певних умов забезпечити коректність задачі (1), (2), шукатимемо її розв'язок у класі функцій, 2π-періодичних за змінною x. При цьому вважатимемо, що функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$ є 2π-періодичними за змінною x. Отже, вивчатимемо задачу (1), (2) в області $D^{2\pi}$.

Нехай $\varphi_j(x) \in H_q(\Omega^{2\pi})$, $\varphi_j(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{jk} \exp(ikx)$, $\varphi_{jk} = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} \varphi_j(x) \exp(-ikx)\, dx$, $j \in \{1,2\}$.

Означення. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^2([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$ називатимемо функцію $u(t,x)$, яка задовольняє такі умови:

$$\|L[u]; C([0,T], H_{q-2}(\Omega))\| = 0,$$

$$\|U_i[u] - \varphi_i; H_q(\Omega)\| = 0, \quad i \in \{1,2\}.$$

Розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^2([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp(ikx). \qquad (3)$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, в (3) є розв'язком такої крайової задачі:

$$\frac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + u_k(t) k^2 = 0. \qquad (4)$$

$$u_k(0) = \varphi_{1k}, \quad u_k'(T) = \varphi_{2k}. \qquad (5)$$

Поряд з умовами (2) і (5), розглядатимемо відповідні їм однорідні умови

$$U_1[u] := 0, \quad U_2[u] := 0 \qquad (2')$$

та

$$u_k(0) = 0, \quad u_k'(T) = 0. \qquad (5')$$

Якщо k=0, то рівняння (4) має таку фундаментальну систему розв'язків: $\{1, t\}$, а характеристичний визначник задачі (4), (5)

$$\Delta(0,T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ фундаментальна система розв'язків рівняння (4) є такою: $\{\exp(ikt); \exp(-ikt)\}$, а характеристичний визначник задачі (4), (5)

$$\Delta(k,T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ ik\exp(ikT) & -ik\exp(-ikT) \end{vmatrix} =$$

$$= -2ik\cos(kT).$$

Відомо [5], що задача (4), (5) для кожного $k \in \mathbb{Z}$ не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta(k,T) \neq 0$. Тому на підставі виразів для $\Delta(0,T)$ та $\Delta(k,T)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ отримуємо таке твердження.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $C^2([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$ *необхідно і досить, щоб справджувались умови*

$$(\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \forall m \in \mathbb{Z}) \qquad \frac{T}{\pi} \neq \frac{2m+1}{2k}. \qquad (6)$$

□ *Доведення.* Скористаємося схемою доведення теореми 2.1 з [7, ст. 97].

Необхідність. Припустимо, що для деяких k=$k_0 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ та m=$m_0 \in \mathbb{Z}$, справджується рівність T/π=$(2m_0+1)/(2k_0)$. Тоді існують нетривіальні розв'язки задачі (1), (2′),

$$u^0(t,x) = A\sin((2m_0+1)\pi t/(2T)) \exp(ik_0 x)$$

де A — довільна стала. Тому розв'язок задачі (1), (2), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність. Припустимо, що задача (1), (2) має два різні розв'язки $u_1(t,x)$, $u_2(t,x) \in C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$. Тоді функція $u_1(t,x) - u_2(t,x) = \bar{u}(t,x) \in C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$ є нетривіальним розв'язком задачі (1), (2′), причому функції $\bar{u}(t,x)$, $L[\bar{u}]$, $U_1[\bar{u}]$, $U_2[\bar{u}]$ розвиваються у ряди Фур'є вигляду (3) за змінною x, причому ці ряди співпадають з рядами, отриманими шляхом застосування операторів L, U_1, U_2 до ряду Фур'є функції $\bar{u}(t,x)$. Із рівності Парсеваля для функцій $L[\bar{u}]$, $U_1[\bar{u}]$, $U_2[\bar{u}]$ випливає, що кожен коефіцієнт Фур'є $\bar{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, функції $\bar{u}(t,x)$ є розв'язком задачі (4), (5′), визначник якої дорівнює $\Delta(k,T)$. Оскільки для кожного числа $k \in \mathbb{Z}$ $\Delta(k,T) \neq 0$, то $\bar{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді згідно з рівністю Парсеваля (за змінною x) для функції $\bar{u}(t,x)$, враховуючи, що $\bar{u}(t,x) \in C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$, $\bar{u}(t,x) = 0$ для майже всіх точок $x \in \Omega^{2\pi}$ і для кожного $t \in [0,T]$, тобто $\|u_1(t,x) - u_2(t,x); C^{2n}([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))\| = 0$. ■

Зауваження 1. Із теореми 1 випливає, що для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^2([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$ достатньо, щоб число T/π, було ірраціональним.

Надалі будемо вважати, що справджується умова (6). Тоді формальний розв'язок задачі (1), (2) зображає ряд

$$u(t,x) = \varphi_{1,0} + \varphi_{2,0}t + \\ + \sum_{|k|>0} \frac{\varphi_{1k} k\cos(k(t-T)) + \varphi_{2k}\sin(kt)}{k\cos(kT)} \exp(ikx). \quad (7)$$

Питання існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $C^2([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$ пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, бо модулі виразів $\cos(kT)$, що входять знаменниками у ряд (7), будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості значень $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Лема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T оцінка $|\cos(kT)| > 2|k|^{-(1+\varepsilon)}$, $\varepsilon>0$, справджується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.*

Доведення грунтується на використанні елементарної нерівності $\sin x \geq 2x/\pi$, $x \in [0,\pi/2]$, та теореми 32 з [12, с. 87].

Теорема 2. *Якщо $\varphi_j \in H_{\gamma_j}(\Omega^{2\pi})$, $\gamma_j = q+4-j+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $j \in \{1,2\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T \in (0,+\infty)$ існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору $C^2([0,T], H_q(\Omega^{2\pi}))$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$.*

□ *Доведення.* На підставі формули (7) та леми 1 для розв'язку задачі (1), (2) отримуємо таку оцінку:

$$\left\|u; C^2([0,T], H_q(\Omega))\right\| \leq \sum_{r=0}^{2} \sqrt{2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \max_{0\leq t\leq T} \left|u_k^{(r)}(t)\right|^2 (1+k^2)^q} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\pi} \sum_{r=0}^{2} \sqrt{\max_{0\leq t\leq T}\left|u_0^{(r)}(t)\right|^2 + \sum_{|k|>0} (1+k^2)^q \left|1/2\left(|k|^{r+1+\varepsilon}\varphi_{1k} + |k|^{r+\varepsilon}\varphi_{2k}\right)\right|^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{2\pi}3/2\left(\max_{0\leq r\leq 2,\, 0\leq t\leq T}\left|u_0^{(r)}(t)\right| + \sqrt{\sum_{|k|>0}(1+k^2)^{q+3+\varepsilon}|\varphi_{1k}|^2} + \sqrt{\sum_{|k|>0}(1+k^2)^{q+2+\varepsilon}|\varphi_{2k}|^2}\right) \leq$$

$$\leq 3/2\left(\sqrt{2\pi}\max_{0\leq r\leq 2,\, 0\leq t\leq T}\left|u_0^{(r)}(t)\right| + \|\varphi_1; H_{\gamma_1}(\Omega)\| + \|\varphi_2; H_{\gamma_2}(\Omega)\|\right), \ \varepsilon > 0,$$

де $u_0(t) = \varphi_{1,0} + \varphi_{2,0}t$. З отриманої нерівності випливає доведення теореми. ■

2. Рівняння з молодшими членами. Наявність у рівнянні молодших членів може покращити природу задачі з умовами (2), що розглядається в області $D^{2\pi}$. Покажемо це на прикладі рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} - a_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} - a_2\right) u(t,x) = 0, \quad (8)$$

де $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$, $a_1 \neq a_2$.

У випадку задачі (2), (8) відповідний характеристичний визначник $\Delta_1(k,T)$ визначається формулою

$$\Delta_1(k,T) = (-ik+a_2)\exp(-ikT+a_2T) - \\ -(ik+a_1)\exp(ikT+a_1T). \quad (9)$$

Зауважимо, що

$$\Delta_1(0,T) = a_2\exp(a_2T) - a_1\exp(a_1T) \neq 0.$$

Лема 2. *Якщо $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, то для довільного $T \in (0,+\infty)$ справджується оцінка $|\Delta_1(k,T)| \geq c_1|k|$, де $c_1 = |\exp(a_2T) - \exp(a_1T)|$.*

□ *Доведення.* На підставі формули (9) отримуємо

$$|\Delta_1(k,T)| \geq \big||-ik+a_2|\,|\exp(-ikT+a_2T)| - \\ - |ik+a_1|\,|\exp(ikT+a_1T)|\big| = \\ = \left|\sqrt{k^2+a_2^2}\exp(a_2T) - \sqrt{k^2+a_1^2}\exp(a_1T)\right| \geq \\ \geq \sqrt{k^2+a^2}\,|\exp(a_2T) - \exp(a_1T)| = \\ = c_1\sqrt{k^2+a^2}c_1|k| \geq c_1|k|,$$

де $c_1 = |\exp(a_2T) - \exp(a_1T)|$, $a = \max\{a_1,a_2\}$, для довільних $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $T \in (0,+\infty)$. ■

Отже, задача (2), (8) не може мати двох різних розв'язків; для довільного $T \in (0,+\infty)$ формальний розв'язок задачі (2), (8) у класі функцій, 2π-періодичних за змінною x, зображає ряд

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Delta_1^{-1}(k,T)\exp(ikx) \times \\ \times\{\varphi_{1k}[(-ik+a_2)\exp(ik(t-T)+a_1t+a_2T) - \\ -(ik+a_1)\exp(ik(T-t)+a_1T+a_2t)] - \\ -\varphi_{2k}[\exp(t(ik-a_1)) - \exp(-t(ik+a_2))]\}. \quad (10)$$

Теорема 3. *Якщо $\varphi_j \in H_{\gamma_j}\left(\Omega^{2\pi}\right)$, $\gamma_j = q + 3 - j$, $j \in \{1,2\}$, то для довільного $T \in (0,+\infty)$ існує єдиний розв'язок задачі* (2), (8) *з простору $C^2\left([0,T], H_q\left(\Omega^{2\pi}\right)\right)$, який неперервно залежить від $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2.

III. Розв'язність у класі майже періодичних функцій

Дослідимо питання однозначної розв'язності задач (1), (2) та (2), (8) у класі функцій, майже періодичних за Безіковичем за змінною x зі спектром $M = \{\mu_k \in \mathbb{R} : \mu_{-k} = -\mu_k,\, \mu_0 = 0,\, d_1|k|^\sigma \le |\mu_k| \le d_2|k|^\sigma,\, \sigma > 0,\, d_2 \ge d_1 > 0,\, k \in \mathbb{Z}\}$.

1. Рівняння коливань струни. Розглянемо задачу (1), (2) в області Q. Нехай функції $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,2\}$, є майже періодичними за x зі спектром M і допускають розвинення у ряди Фур'є вигляду

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k x), \qquad (11)$$

$$\varphi_{jk} = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\int_0^h \varphi_j(x)\exp(-i\mu_k x)\,dx,\ j \in \{1,2\}.$$

Позначимо: $H_q^B(\mathbb{R})$, $q\in\mathbb{R}$, — простір функцій, майже періодичних за Безіковичем за змінною x зі спектром M, $\upsilon(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \upsilon_k \exp(i\mu_k x)$, зі скінченною нормою

$$\left\|\upsilon; H_q^B(\mathbb{R})\right\| := \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+\mu_k^2)^q |\upsilon_k|^2};$$

$C^2\left([0,T], H_q^B(\mathbb{R})\right)$, $q\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}_+$, — простір функцій $\upsilon(t,x)$ таких, що для кожного $t\in[0,T]$ функції $\partial^r\upsilon(t,x)/\partial t^r$, $r\in\{0,1,2\}$, належать простору $H_q^B(\mathbb{R})$ та є неперервними за t у нормі $H_q^B(\mathbb{R})$;

$$\left\|\upsilon; C^2\left([0,T], H_q^B(\mathbb{R})\right)\right\| := \sum_{r=0}^{2} \max_{0\le t\le T} \left\|\partial^r\upsilon/\partial t^r; H_q^B(\mathbb{R})\right\|.$$

Означення розв'язку задачі (1), (2) з простору $C^2([0,T], H_q^B(\mathbb{R}))$ є аналогічним до означення з пункту II.1.

Майже періодичний за x зі спектром M розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\exp(i\mu_k x). \qquad (12)$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, в (12)) є розв'язком крайової задачі з умовами (5) для рівняння

$$\frac{d^2u_k(t)}{dt^2} + \mu_k^2 u_k(t) = 0. \qquad (13)$$

Для кожного $\mu_k \in M\setminus\{0\}$ фундаментальна система розв'язків рівняння (13) є такою: $\{\exp(i\mu_k t);\, \exp(-i\mu_k t)\}$, а характеристичний визначник задачі (5), (13) $\Delta_2(\mu_k,T) = -2i\mu_k\cos(\mu_k T)$.

Якщо μ_k=0, то визначник $\Delta_2(0,T) \equiv \Delta(0,T)$=1.

Задача (5), (13) для кожного $\mu_k \in M$ не може мати двох різних розв'язків тоді і лише тоді, коли $\Delta_2(\mu_k,T) \ne 0$.

Теорема 4. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі $C^2([0,T], H_q^B(\mathbb{R}))$ необхідно і досить, щоб справджувались умови*

$$(\forall\,\mu_k \in M\setminus\{0\},\, \forall\, m \in \mathbb{Z}) \qquad \frac{T}{\pi} \ne \frac{2m+1}{2\mu_k}. \qquad (14)$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1.

Надалі вважатимемо, що виконується умова (14). Тоді формальний розв'язок задачі (1), (2) зображає ряд

$$u(t,x) = \varphi_{1,0} + \varphi_{2,0}t +$$
$$+ \sum_{|k|>0} \left(\varphi_{1k}\cos(\mu_k(t-T)) + \varphi_{2k}\mu_k^{-1}\sin(\mu_k t)\right) \times$$
$$\times \cos^{-1}(\mu_k T)\exp(i\mu_k x). \qquad (15)$$

Лема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T оцінка $|\cos(\mu_k T)| \ge \dfrac{2T}{\pi}|k|^{-(1+\varepsilon)}$, де $\varepsilon > 0$, справджується для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$.*

Доведення леми грунтується на використанні елементарної нерівності $\sin x \ge 2x/\pi$, $x \in [0,\pi/2]$, леми 2 з [8, с. 19] і неперервності функції $y = \pi/T$ при $T > 0$.

Теорема 5. *Якщо $\varphi_j \in H_{\gamma_j}^B(\mathbb{R})$, $\gamma_j = q+3-j+(1+\varepsilon)/\sigma$, $\varepsilon > 0$, $j \in \{1,2\}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору $C^2([0,T], H_q^B(\mathbb{R}))$, який неперервно залежить від функцій $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,2\}$.*

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 2.

2. Рівняння з молодшими членами. В області Q розглянемо задачу (2), (8) за припущення, що функції $u(t,x)$ та $\varphi_j(x)$, $j \in \{1,2\}$, є майже періодичними за Безіковичем за змінною x зі спектром M.

Формальний розв'язок задачі (2), (8) зображає ряд

$$u(t,x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\varphi_{1k}\left[(-i\mu_k+a_2)\exp\left(i\mu_k\left(t-T\right)+a_1t+a_2T\right)-\left(i\mu_k+a_1\right)\exp\left(i\mu_k\left(T-t\right)+a_1T+a_2t\right)\right]-$$

$$-\varphi_{2k}\left[\exp\left(t\left(i\mu_k-a_1\right)\right)-\exp\left(-t\left(i\mu_k+a_2\right)\right)\right]\}\,\Delta_3^{-1}\exp\left(i\mu_k x\right),$$

де

$$\Delta_3=\Delta_3\left(\mu_k,T\right)=\left(-i\mu_k+a_2\right)\exp\left(-i\mu_kT+a_2T\right)-\left(i\mu_k+a_1\right)\exp\left(i\mu_kT+a_1T\right).$$

Зауважимо, що $\Delta_3(0,T)\equiv\Delta_1(0,T)\neq0$.

Лема 4. *Для довільного* $T\in(0,+\infty)$ *справджується оцінка* $|\Delta_3(\mu_k,T)|\geq c_1|\mu_k|$, $\mu_k\in M\setminus\{0\}$, *де* $c_1=|\exp(a_2T)-\exp(a_1T)|$.

Доведення аналогічне до доведення леми 2.

Отже, задача (2), (8) не може мати два різних розв'язки. Для задачі (2), (8) справедлива теорема існування єдиного розв'язку, аналогічна до теореми 3.

IV. Триточкова задача за часовою змінною для рівняння коливань струни

Для забезпечення однозначної розв'язності задачі (1), (2) в області Q, замість додаткової умови за змінною x, накладемо на шуканий розв'язок додаткову умову за змінною t.

1. В області Q розглянемо задачу з умовами

$$u(t,x)|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\varphi(x),\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=0, \tag{16}$$

$0<\tau<T$, для рівняння (1).

Задача (1), (16) не може мати два різних класичних розв'язки тоді і лише тоді, коли відповідна однорідна задача з умовами

$$u(t,x)|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=0,\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=0, \tag{17}$$

$0<\tau<T$, не має нетривіальних розв'язків.

Теорема 6. *Для єдиності класичного розв'язку задачі* (1), (16) *достатньо, щоб число* τ/T *було ірраціональним.*

☐ *Доведення.* Розв'язок задачі (1), (16) має вигляд

$$u(t,x)=\chi(x+t)+\psi(x-t), \tag{18}$$

де функції $\chi(x)$ та $\psi(x)$ визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases}\chi(x)+\psi(x)=0,\\ \chi'(x+\tau)-\psi'(x-\tau)=0,\\ \chi'(x+T)-\psi'(x-T)=0.\end{cases} \tag{19}$$

Система рівнянь (19) рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases}\psi(x)=-\chi(x),\\ \chi(x+2\tau)+\chi(x)=b_1,\\ \chi(x+2T)+\chi(x)=b_2,\end{cases} \tag{20}$$

де b_1,b_2 — константи інтегрування.

Якщо функція $\chi(x)$ задовольняє друге і третє рівняння системи (20), то ця функція задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases}\chi(x+4\tau)=\chi(x),\\ \chi(x+4T)=\chi(x),\end{cases} \tag{21}$$

з якої видно, що функція $\chi(x)$ — двояко періодична з періодами 4τ та $4T$.

Відомо [1], що якщо відношення τ/T є ірраціональним числом, то неперервна функція $\chi(x)$, яка має два несумірні періоди, є константою, тобто $\chi(x)=b_3$. Тоді $\psi(x)=-b_3$, і задача (1), (16) має лише тривіальний розв'язок. ■

Класичний розв'язок задачі (1), (16) зображає формула (18), де $\chi(x)$ та $\psi(x)$ є двічі неперервно диференційовними функціями, які визначаються із системи рівнянь

$$\begin{cases}\chi(x)+\psi(x)=0,\\ \chi'(x+\tau)-\psi'(x-\tau)=\varphi(x),\\ \chi'(x+T)-\psi'(x-T)=0,\end{cases} \tag{22}$$

яка рівносильна такій системі:

$$\begin{cases}\psi(x)=-\chi(x),\\ \chi'(x+\tau)-\psi'(x-\tau)=\varphi(x),\\ \chi(x+2T)+\chi(x)=b_4,\end{cases} \tag{23}$$

де b_4 — константа інтегрування.

Третє рівняння системи (23) задовольняють функції $\chi(x)$, що є періодичними функціями з періодом $4T$, вигляду

$$\chi(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\chi_k\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right).$$

Тоді із першого рівняння системи (23) видно, що $\psi(x)$ буде $4T$-періодичною, а отже, і функція $\varphi(x)$ теж повинна бути $4T$-періодичною, тобто $\varphi(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}\varphi_k\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right)$, $\varphi_k=\frac{1}{4T}\int\limits_0^{4T}\varphi(x)\exp\left(-ikx\frac{\pi}{2T}\right)dx$.

Для розв'язності системи (22) необхідно накласти умову

$$\int\limits_0^{4T}\varphi(x)\,dx=0. \tag{24}$$

За умови (24) $\chi_k\left(ik\frac{\pi}{T}\cos\left(k\tau\frac{\pi}{2T}\right)\right)=\varphi_k$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Зауваження 2. Для однозначного визначення коефіцієнтів χ_k, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, необхідно і досить, щоб справджувались умови

$$(\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,,\forall m\in\mathbb{Z})\quad \frac{\tau}{T}\neq\frac{2m+1}{k}. \tag{25}$$

Надалі вважатимемо, що справджується умова (25). Тоді

$$\chi(x)=\chi_0+\sum_{|k|>0}\varphi_k\frac{T}{k\pi i\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right),$$

а формальний розв'язок задачі (1), (16) зображає ряд

$$u(t,x)=\sum_{|k|>0}\varphi_k\frac{2T}{k\pi}\frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right). \tag{26}$$

Якщо $\varphi(x)$ тригонометричний многочлен вигляду $\varphi(x)=\sum_{k=-N}^{N}\varphi_k\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right)$, то завжди існує єдиний розв'язок задачі (1), (16), який є скінченною сумою

$$u(t,x)=\sum_{k=-N}^{N}\varphi_k\frac{2T}{k\pi}\frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right).$$

У загальному випадку величини $|\cos(\tau k\pi/(2T))|$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості чисел $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, що впливає на збіжність ряду (26), тому питання існування розв'язку задачі (1), (16) з простору $C^2([0,T]\,,H_q^{4T}(\Omega^{4T}))$ пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників.

Означення розв'язку задачі (1), (16) з простору $C^2([0,T]\,,H_q^{4T}(\Omega^{4T}))$ є аналогічним до означення з пункту II.1.

Лема 5. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *нерівність* $|\cos(\tau k\pi/(2T))|\geq c_2|k|^{-\alpha_1}$, $\alpha_1>1$, *виконується для всіх (крім скінченної кількості) значень* $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Теорема 7. *Якщо* $\varphi\in H_{q+1+\alpha_1}^{4T}(\Omega^{4T})$ *і* $\int_0^{4T}\varphi(x)\,dx=0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує розв'язок задачі* (1), (16) *з простору* $C^2([0,T]\,,H_q^{4T}(\Omega^{4T}))$, *який неперервно залежить від функції* $\varphi(x)$.

Аналогічні результати отримано у випадку задачі з умовами

$$u(t,x)|_{t=0}=0,\, u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi(x)\,,\,\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=0, \tag{27}$$

де $0<\tau<T$, для рівняння (1).

Для задачі (1), (27) формальний розв'язок зображає формула

$$u(t,x)=\sum_{|k|>0}\varphi_k\frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\sin(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right). \tag{28}$$

Аналогічно, як для задачі (1), (16), можна довести такі теореми.

Теорема 8. *Для єдиності класичного розв'язку задачі* (1), (27) *достатньо, щоб число* τ/T *було ірраціональним.*

Теорема 9. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (27) *у просторі* $C^2([0,T]\,,H_q^{4T}(\Omega^{4T}))$ *необхідно і досить, щоб справджувались умови*

$$(\forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\,,\forall m\in\mathbb{Z})\qquad \frac{\tau}{T}\neq\frac{2m}{k}. \tag{29}$$

Теорема 10. *Якщо* $\varphi\in H_{q+3+\varepsilon}^{4T}(\Omega^{4T})$, $\varepsilon>0$, *тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує розв'язок* (28) *задачі* (1), (27) *з простору* $C^2([0,T]\,,H_q^{4T}(\Omega^{4T}))$, *який неперервно залежить від функції* $\varphi(x)$.

2. Результати пункту 1 поширено на випадки крайових задач для рівняння (1) з умовами

$$\begin{gathered}u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x)\,,\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=\tau}=\varphi_3(x)\\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=\varphi_2(x)\,,\quad 0<\tau<T,\end{gathered} \tag{30}$$

$$\begin{gathered}\text{або}\ \ u(t,x)|_{t=0}=\varphi_1(x)\,,\ u(t,x)|_{t=\tau}=\varphi_3(x)\,,\\ \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=T}=\varphi_2(x)\,,\quad 0<\tau<T.\end{gathered} \tag{31}$$

Розв'язки задач (1), (30) та (1), (31) знайдено у вигляді

$$u(t,x)=u_1(t,x)+u_2(t,x)+u_3(t,x)\,, \tag{32}$$

де кожна з функцій $u_i(t,x)$, $i\in\{1,2,3\}$, є розв'язком задачі (1), (30) чи (1), (31), коли $\varphi_j(x)\equiv 0$, $j\in\{1,2,3\}$, $j\neq i$.

Для задач (1), (30) та (1), (31) встановлено справедливість таких теорем.

Теорема 11. *Якщо* $\varphi_i\in H_{\gamma_i}^{\omega_i}(\Omega^{\omega_i})$, $i\in\{1,2,3\}$, *де* $\omega_1=2(T-\tau)$, $\gamma_1=q+3+\varepsilon_1$, $\omega_2=4\tau$, $\gamma_2=q+2+\varepsilon_2$, $\omega_3=4T$, $\gamma_3=q+2+\varepsilon_3$, ε_iЂ0, $i\in\{1,2,3\}$, $\int_0^{\omega_3}\varphi_3(x)\,dx=0$, $\int_0^{\omega_2}\varphi_2(x)\,dx=0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (30), *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_i(x)$, $i\in\{1,2,3\}$. *Цей розв'язок зображає формула* (32), *де* $u_1(t,x)=$

$$=\sum_{|k|>0}\varphi_{1k}\frac{\cos(\pi k(t-\tau)/(T-\tau))}{\cos(\pi k\tau/(T-\tau))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{T-\tau}\right),$$

$$u_2(t,x)=\frac{2\tau}{\pi}\sum_{|k|>0}\varphi_{2k}\frac{\sin(tk\pi/(2\tau))}{k\cos(Tk\pi/(2\tau))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2\tau}\right),$$

$$u_3(t,x)=\frac{2T}{\pi}\sum_{|k|>0}\varphi_{3k}\frac{\sin(tk\pi/(2T))}{k\cos(\tau k\pi/(2T))}\exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right),$$

причому $u_i\in C^2([0,T]\,,H_q^{\omega_i}(\Omega^{\omega_i}))$, $i\in\{1,2,3\}$.

Теорема 12. *Якщо функції* $\varphi_i \in H^{\omega_i}_{\gamma_i}(\Omega^{\omega_i})$, $i \in \{1,2,3\}$, *де* $\omega_1 = 4(T-\tau)$, $\gamma_1 = q+3+\varepsilon_1$, $\omega_2 = 2\tau$, $\gamma_2 = q+2+\varepsilon_2$, $\omega_3 = 4T$, $\gamma_3 = q+3+\varepsilon_3$, $\varepsilon_i > 0$, $i \in \{1,2,3\}$, $\int\limits_0^{\omega_2} \varphi_2(x)\,dx = 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* τ/T *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (31), *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_i(x)$, $i \in \{1,2,3\}$. *Цей розв'язок зображає формула* (32), *де* $u_1(t,x) = \sum\limits_{|k|>0} \varphi_{1k} \dfrac{\cos(\pi k(T-t)/(2(T-\tau)))}{\cos(\pi kT/(2(T-\tau)))} \exp\left(ikx\dfrac{\pi/2}{(T-\tau)}\right)$,

$$u_2(t,x) = \frac{\tau}{\pi} \sum_{|k|>0} \varphi_{2k} \frac{\sin(tk\pi/\tau)}{k\cos(Tk\pi/\tau)} \exp\left(ikx\frac{\pi}{\tau}\right),$$

$$u_3(t,x) = \sum_{|k|>0} \varphi_{3k} \frac{\sin(tk\pi/(2T))}{\sin(\tau k\pi/(2T))} \exp\left(ikx\frac{\pi}{2T}\right),$$

причому $u_i \in C^2([0,T], H^{\omega_i}_q(\Omega^{\omega_i}))$, $i \in \{1,2,3\}$.

Зауваження 3. Якщо $\varphi_i(x)$, $i \in \{1,2,3\}$, є тригонометричними многочленами вигляду $\varphi_i(x) = \sum\limits_{k=-N}^{N} \varphi_{ik} \exp(ikx2\pi/\omega_i)$, а число τ/T ірраціональне, то завжди існують розв'язки задач (1), (30) та (1), (31), які є скінченними тригонометричними сумами за змінною x.

Результати роботи можна поширити на випадок гіперболічних рівнянь високого порядку з багатьма просторовими змінними.

Література

[1] Арнольд В. И. Малые знаменатели. 1. Об отображении окружности на себя // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1961. – **25**, № 1. – С. 21–86.

[2] Білусяк Н. І., Пташник Б. Й. Задача з умовами типу умов Діріхле для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Вісник Прикарпатського університету. Математика. Фізика. Хімія. – 1999. – Вип. 1. – С. 22–32.

[3] Клюс І. С., Пташник Б. Й. Триточкова задача для хвильового рівняння // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип. 40. – С. 78–86.

[4] Митропольський Ю. О., Хома Г. П., Хома-Могильська С. Г. Розв'язки крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку // Доповіді Національної академії наук України. – 2008. – № 5. – С. 30–36.

[5] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 526 с.

[6] Павленко В. Н., Петраш Т. А. Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью // Труды Инст. мат. і мех. УрО РАН. – 2012. – **18**, No 2. – С. 199–204.

[7] Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[8] Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[9] Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.

[10] Пташник Б. И., Штабалюк П. И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения. – **22**, №.4. – С. 669–678.

[11] Рудаков И. А. Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 2007. – **537**, No 2. – С. 46–55.

[12] Хинчин А. Я. Цепные дроби. – М.: Наука, 1978. – 112 с.

[13] Gentile G., Mastropietro V., Procesi M. Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations // Commun. math. phys. – 2005. – № 256. – P. 437–490.

ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПОЛОСЕ

Репетило С. М.

Национальный университет "Львивська политэхника", ул. С. Бандеры, 12, Львов, 79013, Украина

Для линейных гиперболических уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в полосе исследовано однозначную разрешимость задачи с условиями Дирихле-Неймана по временной переменной и условиями периодичности или почти периодичности по пространственной координате. Для уравнения свободных колебаний струны в полосе также исследовано трехточечную задачу по временной переменной с условиями Дирихле или Неймана в узлах интерполяции без дополнительных условий по пространственной координате. Установлены условия однозначной разрешимости рассмотренных задач и конструктивно построены их решения. Для оценок снизу малых знаменателей, возникших при построении решений исследуемых задач, использовано метрический подход.

Ключевые слова: краевая задача, гиперболические уравнения, малые знаменатели, метрический подход, мера Лебега.

2000 MSC: 35L20

УДК: 517.956.32

THE DIRICHLET-NEUMMANN PROBLEM FOR SECOND ORDER LINEAR HYPERBOLIC EQUATION IN THE STRIP

Repetylo S.M.

National University "Lvivska Politechnika" 12 S.Bandera Str., 79013, Lviv, Ukraine

We investigate the condition for the unique solvability in a strip of the problem with Dirichlet-Neumann conditions with respect to time variable and conditions periodicity or almost periodicity with respect to spatial coordinate for second order linear hyperbolic equations with constant coefficients. For the equation of free vibrations of the string in the strip also investigated three-point problem with respect to time variable with Dirichlet or Neumann conditions at the interpolation nodes without additional conditions with respect to spatial coordinate. For the considered problems the conditions of the unique solvability are established and its solutions are structurally constructed. For estimations from below of small denominators that appeared during construction of solutions study tasks the metric approach is used.

Key words: boundary-value problem, hyperbolic equation, small denominators, metric approach, Lebesque measure.

2000 MSC: 35L20

УДК: 517.956.32